CHƯƠNG IX

BÀI 33. HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

VD 1.1. Cho hai tam giác MNP và RSK có $MN = 9cm, MP = 12cm, NP = 15cm, RS = 5cm$, $KR = 3cm$, $KS = 4cm$. Chứng minh rằng: $\Delta MPN \backsim \Delta KRS$.

Giải

Ta có $\dfrac{MN}{KR} = \dfrac{9}{3} = 3$; $\dfrac{MP}{KS} = \dfrac{12}{4} = 3$; $\dfrac{NP}{RS} = \dfrac{15}{5} = 3$

$\Rightarrow \dfrac{MN}{KR} = \dfrac{MP}{KS} = \dfrac{NP}{RS} = 3$

Xét ΔMNP và ΔKRS có: $\dfrac{MN}{KR} = \dfrac{MP}{KS} = \dfrac{NP}{RS}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MPN \backsim \Delta KRS$

VD 1.2. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = 2AB. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho AE = 2AC. Chứng minh $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Giải

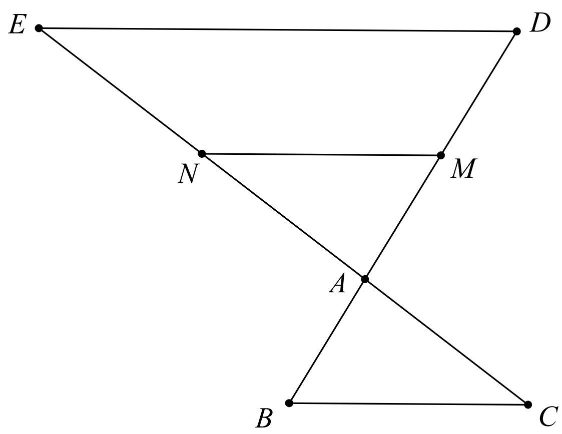
Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AD, AE.

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của tam giác ADE.

$\Rightarrow MN \parallel DE$ (tính chất)

$\Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ADE$ (định lí) (1)

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AD, AE nên $AD = 2AM$; $AE = 2AN$



Mà $AD = 2AB$; $AE = 2AC$

Suy ra $AM = AB$; $AN = AC$

Xét hai ΔABC và ΔAMN có

$AM = AB$ (cmt)

$\widehat{BAC} = \widehat{MAN}$ (đối đỉnh)

$AN = AC$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta AMN$ (c.g.c) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (đpcm)

VD 1.3. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có CD = 2AB. Gọi E là trung điểm của DC. Chứng minh ba tam giác EDA, ABE, CEB đồng dạng với nhau.

Giải

Vì CD = 2AB nên AB = DE = EC.

Vì AB // DC (ABCD là hình thang) nên $\widehat{AED} = \widehat{EAB}$; $\widehat{ABE} = \widehat{BEC}$ (so le trong)

Xét hai ΔEDA và ΔABE có:`

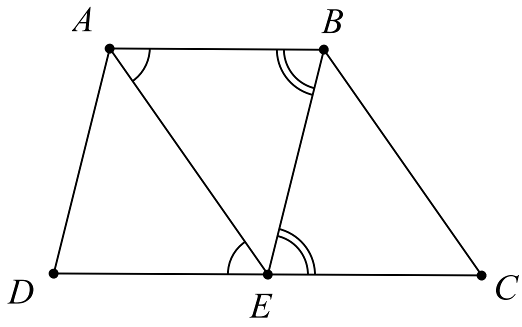
AE chung

$\widehat{AED} = \widehat{EAB}$ (cmt)

DE = AB (cmt)

$\Rightarrow \Delta EDA = \Delta ABE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \Delta EDA \backsim \Delta ABE$ (tính chất) (1)



Xét hai ΔABE và ΔCEB có:

BE chung

$\widehat{ABE} = \widehat{BEC}$ (cmt)

AB = EC (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta CEB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta CEB$ (tính chất) (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba tam giác EDA; ABE và CEB đồng dạng với nhau.

VD 2.1. Cho tam giác ABC có $AB = 8cm, AC = 6cm, BC = 5cm$. Tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC, có cạnh lớn nhất $A'B' = 7cm$. Tính các cạnh còn lại của tam giác $A'B'C'$.

Giải

Vì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{7}{8} = \dfrac{A'C'}{6} = \dfrac{B'C'}{5}$

$\Rightarrow A'C' = \dfrac{42}{8} = 5,25$ (cm) ; $B'C' = \dfrac{35}{8} = 4,375$ (cm)

VD 2.2. Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF theo tỉ số đồng dạng $k = \dfrac{3}{5}$. Chu vi tam giác ABC là 12cm. Tính chu vi tam giác DEF.

Giải

Ta có $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ (gt)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ (định nghĩa)

Với tỉ số đồng dạng $k = \dfrac{3}{5}$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB + AC + BC}{DE + DF + EF} = \frac{12}{C_{\Delta DEF}} = \frac{3}{5}$$

$\Rightarrow C_{\Delta DEF} = \dfrac{12.5}{3} = 20$ (cm)

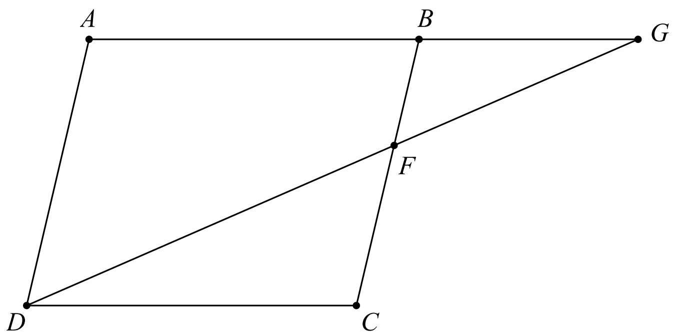
VD 3.1. Cho hình bình hành ABCD có AB = 6cm, AD = 5cm. Lấy F trên cạnh BC sao cho CF = 3cm. Tia DF cắt tia AB tại G.

a) Chứng minh: $\Delta GBF \backsim \Delta DCF$ và $\Delta GAD \backsim \Delta DCF$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng AG.

c) Chứng minh: AG.CF = AD.AB

Giải



a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $BC // AD$, $AB // DC$ (tính chất)

$\Rightarrow BF // AD$, $BG // DC$

Xét hai tam giác ΔGBF và ΔGAD có $BF // AD$ suy ra $\Delta GBF \backsim \Delta GAD$

Xét hai tam giác ΔGBF và ΔDCF có $BG // DC$ suy ra $\Delta GBF \backsim \Delta DCF$

$\Rightarrow \Delta GAD \backsim \Delta DCF$

b) Do $\Delta GBF \backsim \Delta DCF \Rightarrow \dfrac{GB}{DC} = \dfrac{BF}{CF}$

Ta có $BF + CF = BC \Rightarrow 3 + CF = 5 \Rightarrow CF = 5 - 3 = 2$ (cm)

$\Rightarrow \dfrac{GB}{6} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GB = 6.2 : 3 = 4$ (cm)

Ta có $AB + BG = AG \Rightarrow 6 + 4 = AG \Rightarrow AG = 10$ (cm)

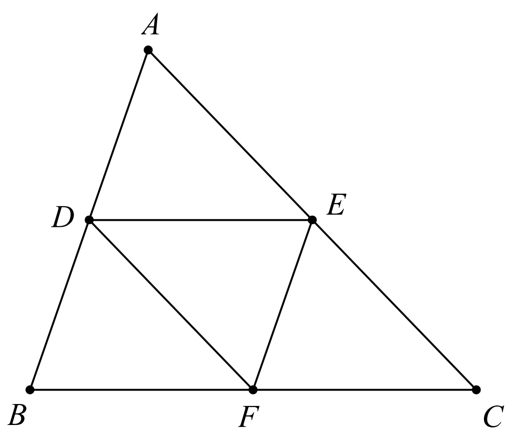
c) Do $\Delta GAD \backsim \Delta DCF \Rightarrow \dfrac{GA}{DC} = \dfrac{AD}{CF} \Rightarrow GA.CF = AD.DC$

Mà AB = CD $\Rightarrow GA.CF = AD.AB$ (đpcm)

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, AC. Chứng minh rằng $\Delta DEF \backsim \Delta ABC$.

Giải



Do D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC $\Rightarrow DE \parallel BC$

Do E, F lần lượt là trung điểm của AC và BC $\Rightarrow EF \parallel AB$

Do D, F lần lượt là trung điểm của AB và BC $\Rightarrow DF \parallel AC$

Xét ΔDEF và ΔABC có $DE \parallel BC; EF \parallel AB; DF \parallel AC \Rightarrow \Delta DEF \backsim \Delta ABC$ (đpcm)

Bài 2. Cho ΔABC có $AB = 3cm, AC = 5cm, BC = 4cm.$ Biết $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$.

a) Tính các cạnh A_1B_1, A_1C_1 biết $B_1C_1 = 8cm$.

b) Tính các cạnh A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 biết $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số bằng 3.

Giải

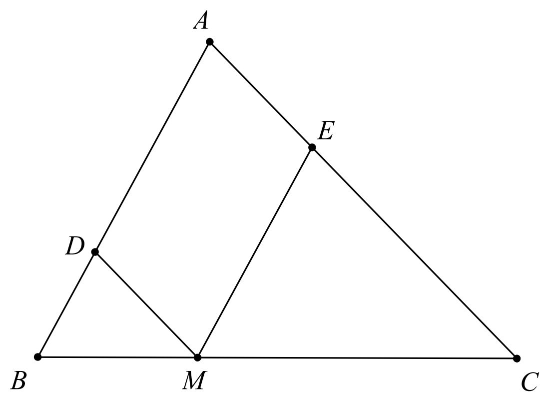
a) Ta có: $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{A_1B_1}{3} = \dfrac{8}{4} = \dfrac{A_1C_1}{5} \Rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = 6cm \\ A_1C_1 = 10cm \end{cases}$

b) Ta có: $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = k \Leftrightarrow \dfrac{A_1B_1}{3} = \dfrac{B_1C_1}{4} = \dfrac{A_1C_1}{5} = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = 9cm \\ B_1C_1 = 12cm \\ A_1C_1 = 15cm \end{cases}$$

Bài 3. Cho tam giác ΔABC, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{1}{2}$. Đường thẳng đi qua điểm M và song song với AC cắt AB ở D. Đường thẳng đi qua M và song song với AB cắt AC ở E. Biết chu vi tam giác ABC bằng 24cm, tính chu vi của các tam giác DBM và EMC.

Giải



Do $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{1}{3}; \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{2}{3}$

Xét hai ΔBDM và ΔBAC có $DM \parallel AC \Rightarrow \Delta BDM \backsim \Delta BAC$ (định lí)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DM}{AC} = \dfrac{BM}{BC}$ (định nghĩa)

Mà $\dfrac{MB}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DM}{AC} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{3}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{BD}{BA}=\frac{DM}{AC}=\frac{BM}{BC}=\frac{BD+DM+CM}{BA+AC+BC}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{C_{\Delta BDM}}{C_{\Delta ABC}}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{C_{\Delta BDM}}{24}=\frac{1}{3}\Rightarrow C_{\Delta BDM}=8$ (cm)

Xét hai ΔEMC và ΔABC có $ME // AB$ $\Rightarrow \Delta EMC \backsim \Delta ABC$ (định lí)

$\Rightarrow \frac{EM}{AB}=\frac{MC}{BC}=\frac{EC}{AC}$ (định nghĩa)

Mà $\frac{MC}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{EM}{AB}=\frac{MC}{BC}=\frac{EC}{AC}=\frac{2}{3}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{EM}{AB}=\frac{MC}{BC}=\frac{EC}{AC}=\frac{EM+MC+EC}{AB+BC+AC}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{C_{\Delta EMC}}{C_{\Delta ABC}}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{C_{\Delta EMC}}{24}=\frac{2}{3}\Rightarrow C_{\Delta EMC}=\frac{2}{3}.24=16$ (cm)

Bài 4. Cho hai tam giác ABC và DEF có: $AB=48cm, AC=20cm, BC=52, DE=6cm,$ $DF=2,5cm, \widehat{EDF}=90^0$. Chứng minh rằng: $\widehat{ACB}=\widehat{DFE}$.

Giải

ΔDEF có: $\widehat{EDF}=90^0$ (gt)

Theo định lí Py-ta-go, ta có: $EF^2=DE^2+DF^2\Rightarrow EF^2=6^2+2,5^2=42,25=6,5^2$

$\Rightarrow EF=6,5\,\text{cm}$

Xét ΔABC và ΔDFE có: $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$ (vì $\frac{48}{6}=\frac{20}{2,5}=\frac{52}{6,5}$).

Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta DEF \Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{DFE}$ (đpcm)

Bài 5. Một tam giác đồng dạng với một tam giác có các cạnh là 15, 20, 30. Tính các cạnh của một tam giác này nếu chu vi của nó bằng 26.

Giải

Gọi các cạnh của tam giác cần tìm là a, b, c từ giả thiết ta có:

$\frac{a}{15}=\frac{b}{20}=\frac{c}{30}=\frac{a+b+c}{15+20+30}=\frac{26}{65}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{26}{65}.15=6 \\ b=\frac{26}{65}.20=8 \\ c=\frac{26}{65}.30=12 \end{cases}$$

Vậy tam giác đó có cạnh lần lượt là 6; 8 và 12.

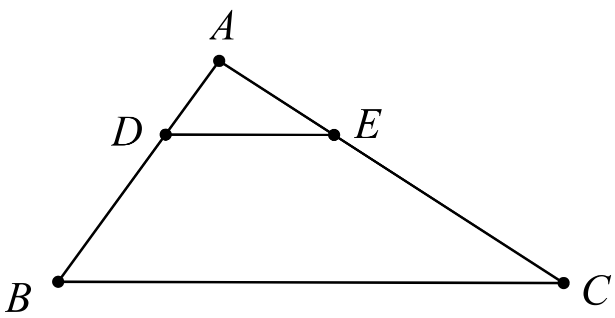
Bài 6. Cho ΔABC có $AB=6cm, AC=9cm.$ Các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $BD=4cm, CE=6cm$.

a) Chứng minh rằng $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ và xác định tỉ số đồng dạng.

b) Kẻ $EK \parallel AB (K \in BC)$. Chứng minh rằng $\Delta ADE \backsim \Delta EKC$.

c) Tính tỉ số chu vi ΔADE và ΔEKC.

Giải



a) Trong ΔABC ta có: $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \frac{AE}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Tỉ số đồng dạng của ΔADE và ΔEKC là: $k = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$.

b) Theo kết quả câu a) ta có $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$

Mặt khác vì $EK \parallel BC \Rightarrow \Delta EKC \backsim \Delta ABC$

$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta EKC$.

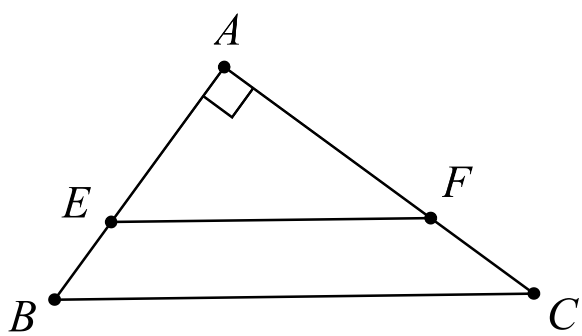
c) Theo kết quả câu b) ta có $\Delta ADE \backsim \Delta EKC$ suy ra:

$$\frac{AD}{EK} = \frac{DE}{KC} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} = \frac{AD + DE + EC}{EK + KC + EC} = \frac{C_{\Delta ADE}}{C_{\Delta EKC}}$$

Vậy $C_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} C_{\Delta EKC}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 6cm, BC = 10cm. Kẻ một đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB và AC tại E và F. Biết AE = 2cm, tính tỉ số đồng dạng của AEF, ABC và độ dài các đoạn cạnh AF, EF.

Giải



Ta có $EF \parallel BC \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC$ định lí)

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Vậy tỉ số đồng dạng của hai tam giác AEF và ABC là $\dfrac{1}{3}$.

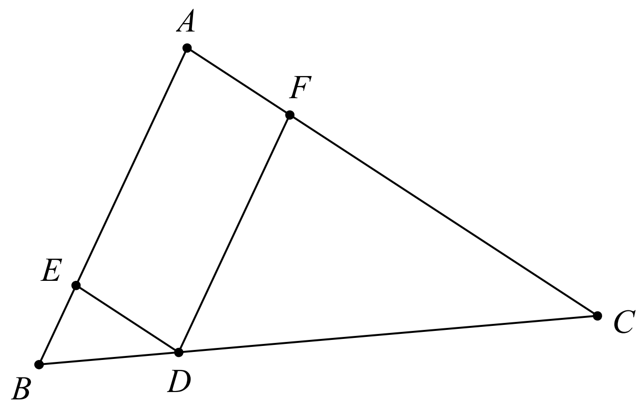
Có $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AF = \dfrac{AC}{3} = \dfrac{8}{3}cm;\ EF = \dfrac{BC}{3} = \dfrac{10}{3}cm$

Bài 8. Cho tam giác ABC có AB = 5cm, BC = 8cm, AC = 7cm. Điểm D nằm trên cạnh BC sao cho BD = 2cm. Qua D kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AC và AB lần lượt tại F và E.

a) Chứng minh $\Delta BDE \backsim \Delta DCF$.

b) Tính chu vi tứ giác AEDF.

Giải



a) HS tự chứng minh: $\Delta BDE \backsim \Delta BCA$; $\Delta DFC \backsim \Delta BAC$

Từ đó suy ra $\Delta BDE \backsim \Delta DCF$

b) Ta có $\Delta BDE \backsim \Delta BCA \Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{DE}{CA} = \dfrac{BE}{BA}$ (định nghĩa)

$\Rightarrow \dfrac{2}{8} = \dfrac{ED}{7} \Rightarrow ED = \dfrac{7.2}{8} = \dfrac{7}{4}$ (cm)

Ta có $\Delta DFC \backsim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{DF}{BA} = \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{FC}{AC}$ (định nghĩa)

$\Rightarrow \dfrac{DF}{5} = \dfrac{BC - BD}{BC} \Rightarrow \dfrac{DF}{5} = \dfrac{6}{8} \Rightarrow DF = \dfrac{6.5}{8} = \dfrac{15}{4}$ (cm)

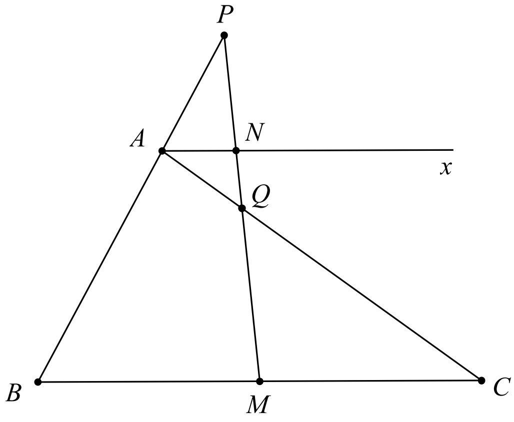
Xét tứ giác $AEDF$ có $AF \parallel AB$; $DE \parallel AC$ $\Rightarrow AEDF$ là hình bình hành.

Ta có $C_{AEDF} = AE + ED + DF + AF = 2DF + 2DE = 2\left(DE + DF\right) = 2.\left(\dfrac{7}{4} + \dfrac{15}{4}\right) = 2.\dfrac{22}{4} = 11$ (cm)

Bài 9. Cho tam giác ABC, kẻ Ax song song với BC. Từ trung điểm M của cạnh BC, kẻ một đường thẳng bất kì cắt Ax ở N, cắt AB ở P và cắt AC ở Q. Chứng minh: $\dfrac{PN}{PM} = \dfrac{QN}{QM}$.

Giải

Do AN // BM nên $\Delta PBM \backsim \Delta PAN \Rightarrow \dfrac{PM}{PN} = \dfrac{BM}{AN}$



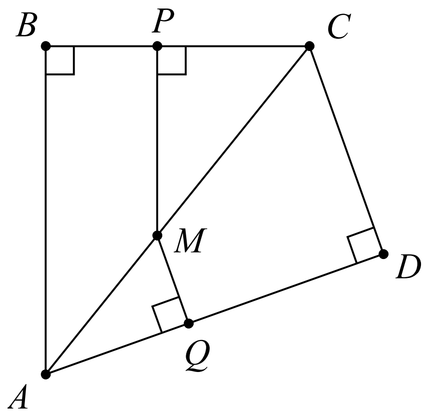
Do AN // MC ta có $\dfrac{QM}{QN} = \dfrac{MC}{AN}$ (định lí Ta-lét)

Mà $BM = MC$ (M là trung điểm của BC)

$\dfrac{QM}{QN} = \dfrac{PM}{PN} \Rightarrow \dfrac{PN}{PM} = \dfrac{QN}{QM}$ (đpcm)

Bài 10. Tứ giác ABCD có $\hat{B} = \hat{D} = 90^0$. Từ một điểm M bất kì trên đường chéo AC kẻ $MP \perp BC, MQ \perp AD$. Chứng minh: $\dfrac{MP}{AB} + \dfrac{MQ}{CD} = 1.$

Giải



Vì $MP \perp BC, \hat{B} = 90^0 \Rightarrow MP \,//\, AB \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta MPC \Rightarrow \dfrac{MP}{AB} = \dfrac{MC}{AC}$

Vì $MQ \perp AD, \hat{D} = 90^0 \Rightarrow MQ \,//\, CD \Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta AMQ \Rightarrow \dfrac{MQ}{CD} = \dfrac{MA}{AC}$

Cộng vế với vế ta được: $\dfrac{MP}{AB} + \dfrac{MQ}{CD} = \dfrac{MC}{AC} + \dfrac{MA}{AC} = \dfrac{MC + MA}{AC} = \dfrac{AC}{AC} = 1$.

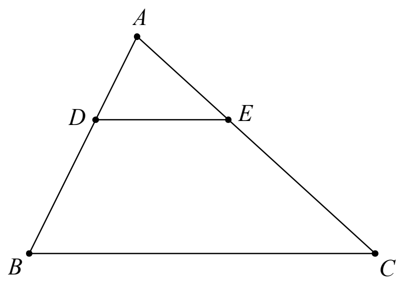
Vậy $\dfrac{MP}{AB} + \dfrac{MQ}{CD} = 1.$

Bài 11. Cho tam giác ΔABC có $AB = 15cm, AC = 20cm.$ Trên hai cạnh $AB,\ AC$ lần lượt lấy hai điểm D, E sao cho $AD = 6cm, AE = 8cm.$

a) Chứng minh: $AD.BC = AB.DE.$

b) Tính chu vi của tam giác $\Delta ADE,$ khi biết $BC = 25cm.$

Giải



Ta có $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}; \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow DE \,//\, BC$

$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC} \Rightarrow AD.BC = AB.DE.$

b) Ta có chu vi tam giác ABC là: $AB + BC + AC = 15 + 35 + 20 = 70$ (cm)

Vì $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (cmt)

Nên $\dfrac{P_{\Delta ADE}}{P_{\Delta ABC}} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow P_{\Delta ADE} = \dfrac{2}{5}.P_{\Delta ABC} = \dfrac{2}{5}.70 = 28$ (cm)

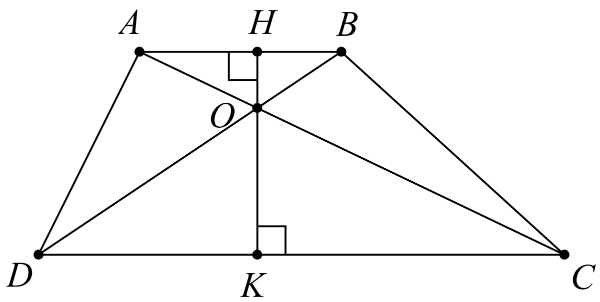
Bài 12. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh $OA.OD = OB.OC$.

b) Đường thẳng qua O, vuông góc với AB, CD theo thứ tự tại H, K. Chứng minh $OH.CD = AB.OK$.

Giải

a) Vì $AB \mathbin{/\mkern-6mu/} CD$ nên $\Delta OAB \backsim \Delta OCD$



$\Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$

$\Rightarrow OA.OD = OC.OB$ (đpcm)

b) Vì $H \in AB$, $K \in CD$ nên $AH \mathbin{/\mkern-6mu/} KC$

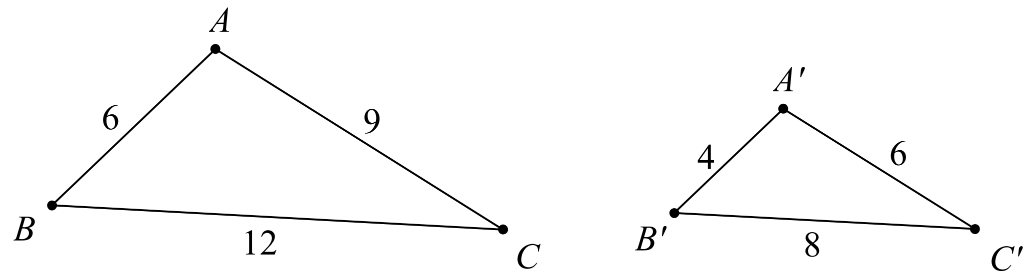
$\Rightarrow \Delta OAH \backsim \Delta OCK \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OH}{OK}$

Mà $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AB}{CD}\left(do\,\Delta OAB \backsim \Delta OCD\right)$

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OK} = \dfrac{AB}{CD} \Rightarrow OH.CD = AB.OK$ (đpcm)

BÀI 34. BA TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC

VD 1.1. Cho ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có kích thước như hình vẽ:



a) Hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có đồng dạng với nhau hay không? Vì sao?

b) Tính tỷ số chu vi của hai tam giác đó.

Giải

a) Ta có:

$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$; $\quad \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$; $\quad \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

Xét ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ (c.c.c)

b) Vì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ (cmt)

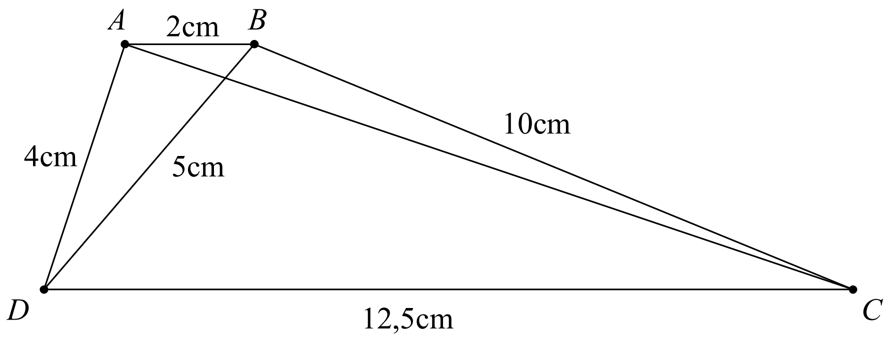
$\Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'} = \dfrac{P}{P'}$

Vậy tỉ số chu vi của ΔABC và $\Delta A'B'C'$ là $\dfrac{3}{2}$

VD 1.2. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 2\,cm$, $BC = 10\,cm$, $CD = 12,5\,cm$, AD = 4cm, BD = 5cm. Chứng minh rằng: ABCD là hình thang.

Giải



Ta có $\frac{AB}{BD}=\frac{2}{5}; \frac{BD}{DC}=\frac{5}{12,5}=\frac{50}{125}=\frac{2}{5}; \frac{AD}{BC}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{AB}{BD}=\frac{BD}{DC}=\frac{AD}{BC}$

Xét hai ΔABD và ΔBDC có $\frac{AB}{BD}=\frac{BD}{DC}=\frac{AD}{BC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{BDC}$ (cặp góc tương ứng)

Mà hai góc $\widehat{ABD}$ và $\widehat{BDC}$ ở vị trí so le trong

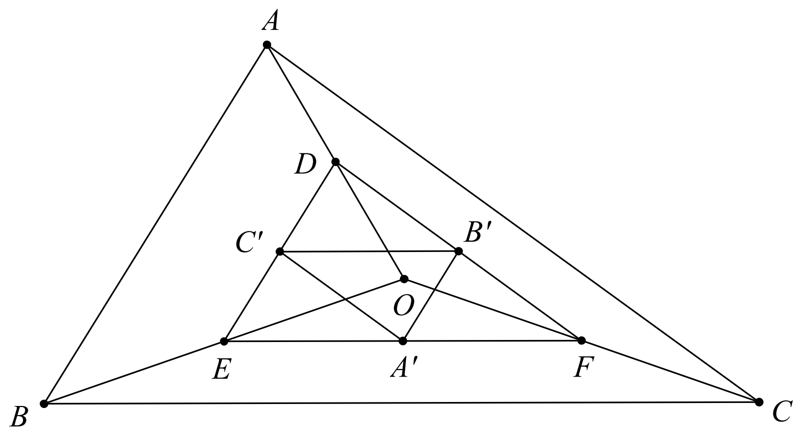
$\Rightarrow AB // CD$ (dhnb)

VD 1.3. Gọi O là điểm bất kì nằm trong ΔABC. Gọi D,E,F theo thứ tự là trung điểm của OA, OB, OC. Gọi A',B',C' theo thứ tự là trung điểm của EF,DF,DE. Chứng minh rằng:

a) $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

b) $\widehat{A'B'C'}=\widehat{ABC}$

Giải



a) Xét ΔOAB có D và E lần lượt là trung điểm của OA, OB.

$\Rightarrow DE$ là đường trung bình của ΔOAB

$\Rightarrow DE=\frac{1}{2}AB$ (1)

Xét ΔDEF có A', B' lần lượt là trung điểm của FE,FD.

$\Rightarrow A'B'$ là đường trung bình của ΔDEF

$\Rightarrow A'B'=\frac{1}{2}DE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A'B'=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}AB=\frac{1}{4}AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{4}$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{A'C'}{AC}=\frac{1}{4}; \frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{4}$

Từ đó suy ra $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{4}$

Xét hai $\Delta A'B'C'$ và ΔABC có $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (c.c.c)

b) Vì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{A'B'C'}=\widehat{ABC}$ (cặp góc tương ứng)

VD 2.1. Cho ΔABC có $AB=18\,\text{cm}$, $AC=27\,\text{cm}$, $BC=30\,\text{cm}$. Gọi D là trung điểm của AB, E thuộc cạnh AC sao cho $AE=6\,\text{cm}$.

a) Chứng minh rằng: $\Delta AED \backsim \Delta ABC$

b) Tính độ dài đoạn DE.

Giải

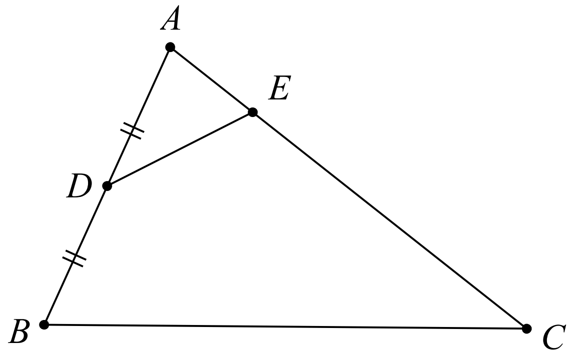
Ta có $\frac{AE}{AB}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3};\frac{AD}{AC}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AD}{AC}$

Xét hai ΔAED và ΔABC ta có:

$\widehat{A}$ chung

$\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{AC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AED \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)



b) Vì $\Delta AED \backsim \Delta ABC$ (cmt)

$\Rightarrow \frac{ED}{BC}=\frac{AE}{AB}$ (cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \frac{ED}{30}=\frac{6}{18}\Rightarrow ED=30.6:18=10\,(\text{cm})$

VD 2.2. Cho hình thang $ABCD$ $(AB\,//\,CD)$ có AB = 2cm, BD = 4cm, CD = 8cm.

Chứng minh rằng $\widehat{A}=\widehat{DBC}$.

Giải

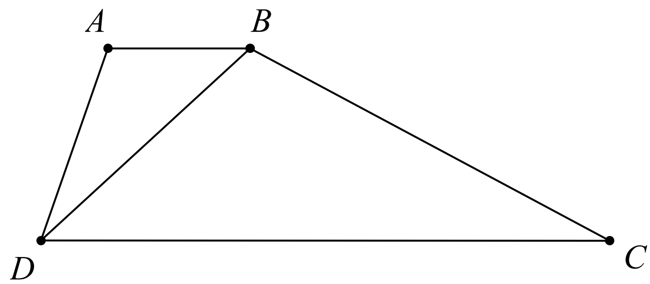
Ta có $\frac{AB}{BD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\frac{BD}{DC}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{AB}{BD}=\frac{BD}{DC}$

Xét hai ΔABD và ΔBDC ta có:

$\widehat{ABD}=\widehat{BDC}$ (so le trong)

$\frac{AB}{BD}=\frac{BD}{DC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC$ (c.g.c)



$\Rightarrow \widehat{A}=\widehat{DBC}$ (cặp góc tương ứng)

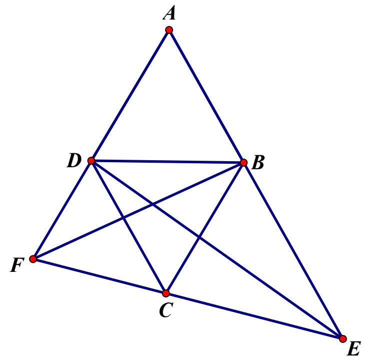
$\Rightarrow$ đpcm

VD 2.3. Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{A}=60^0$. Qua C kẻ đường thẳng d cắt tia đối của các tia $BA,\ DA$ theo thứ tự ở $E,\ F$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{EB}{BA}=\dfrac{AD}{DF}$

b) $\Delta EBD \backsim \Delta BDF$

Giải



a) Do BC // AF nên ta có: $\dfrac{EB}{BA}=\dfrac{EC}{CF}$ (định lí Talet)

Mà CD // AE nên ta có: $\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{EC}{CF}$ (định lí Talet)

Do đó: $\dfrac{EB}{BA}=\dfrac{AD}{DF}$

b) Vì AB = BD = AD (ABCD là hình thoi) nên ta có $\dfrac{EB}{BD}=\dfrac{BD}{DF}$

Lại có $\widehat{A}=60^0$ suy ra $\widehat{EBD}=\widehat{BDF}=120^\circ$

Xét hai ΔEBD và ΔBDF có

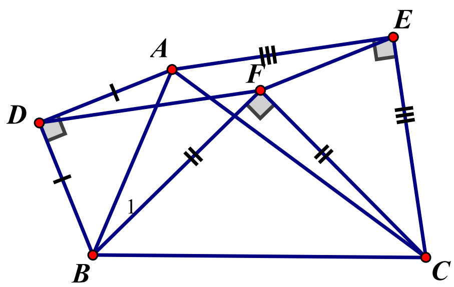
$\widehat{EBD}=\widehat{BDF}$ (cmt)

$\dfrac{EB}{BD}=\dfrac{BD}{DF}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta EBD \backsim \Delta BDF$ (c.g.c)

VD 2.4. Cho ΔABC nhọn, lấy các cạnh $AB,\ AC$ và BC dựng các tam giác vuông cân $\Delta ABD\ \Delta ACE\ \Delta BCF$. Hai tam giác đầu dựng ra phía ngoài ΔABC, còn tam giác thứ ba dựng trong cùng một nửa mặt phẳng bờ BC với ΔABC. Chứng minh rằng tứ giác $AEFD$ là hình bình hành.

Giải



Ta có $\Delta BAD \backsim \Delta BCF$ (Hai tam giác vuông cân)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BF}=\dfrac{BA}{BC} \Rightarrow \dfrac{BD}{BA}=\dfrac{BF}{BC}$

Mặt khác $\widehat{DBF}=\widehat{ABC}\left(=45^0+\widehat{B_1}\right)$

$\Rightarrow \Delta BDF \backsim \Delta BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BDF}=\widehat{BAC}$

Chứng minh tương tự ta có $\Delta BDF \backsim \Delta BAC \Rightarrow \widehat{FEC}=\widehat{BAC}$

Ta có $\widehat{DAE}+\widehat{ADF}=\left(90^0+\widehat{BAC}\right)+\left(90^0-\widehat{BDF}\right)=180^0 \Rightarrow AE$ // DF

Chứng minh tương tự ta được AD // EF. Vậy tứ giác $AEFD$ là hình bình hành.

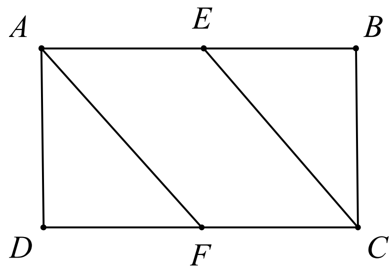
VD 3.1. Cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi E là trung điểm của AB, F là trung điểm của CD. Chứng minh hai tam giác ADF và CBE đồng dạng với nhau.

Giải

$AECF$ là hình bình hành (Vì có AE, FC song song và bằng nhau), suy ra: $AF // EC$.

Khi đó, ta có: $\widehat{AFD} = \widehat{ECF}$ (hai góc đồng vị)

$\widehat{CEB} = \widehat{ECF}$ (hai góc so le trong)



Từ đó: $\widehat{AFD} = \widehat{CEB}$

Xét ΔADF và ΔCBE, ta có:

$\hat{B} = \hat{D} = 90^0$

$\widehat{AFD} = \widehat{CEB}$

Do vậy: $\Delta ADF \backsim \Delta CBE$ (g.g)

VD 3.2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$). Biết $AB = 3cm; AD = 2,5cm; BD = 6cm$ và $\widehat{DBC} = \widehat{DAB}$.

a) Chứng minh hai tam giác ADB và BCD đồng dạng.

b) Tính độ dài các cạnh BC và CD.

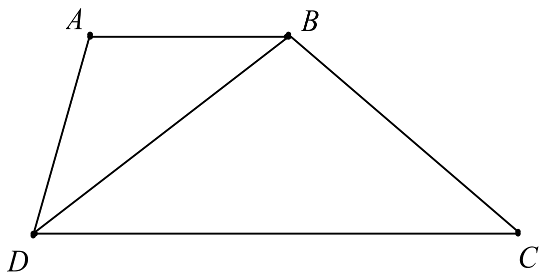
Giải

a) Xét ΔADB và ΔBCD có:

$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (hai góc so le trong)

$\widehat{DBC} = \widehat{DAB}$

Do đó: $\Delta ADB \backsim \Delta BCD$ (g.g)



b) Vì $\Delta ADB \backsim \Delta BCD$ nên $\frac{AD}{BC} = \frac{AB}{BD} = \frac{DB}{CD}$

Hay $\frac{2,5}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{6}{CD}$

$\Rightarrow BC = 5cm, CD = 12cm.$

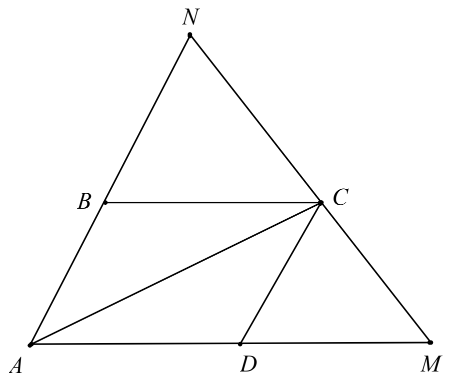
VD 3.3. Cho hình bình hành $ABCD$, trên tia đối của tia DA lấy điểm M sao cho $DM = AB$, trên tia đối của tia BA lấy điểm N sao cho $BN = AD$. Chứng minh:

a) ΔCNB và ΔMDC cân.

b) $\Delta CNB \backsim \Delta MDC$

c) Chứng minh M, C, N thẳng hàng.

Giải



a) Xét ΔCNB có: $BN = AD$(gt), mà $AD = BC$ nên $BN = BC$

$\Rightarrow \Delta CNB$ cân tại B.

Xét ΔMDC có: $DM = AB$ (gt), mà $AB = DC$ nên $DM = DC$

$\Rightarrow \Delta MDC$ cân tại D.

b) Vì ΔCNB cân tại B nên $\widehat{BCN} = \widehat{BNC} = \dfrac{180^0 - \hat{B}}{2}$

Vì ΔMDC cân tại D nên $\widehat{DCM} = \widehat{DMC} = \dfrac{180^0 - \hat{D}}{2}$

Mà $\hat{B} = \hat{D}$ (vì cùng bù với 2 góc bằng nhau) nên $\widehat{BCN} = \widehat{BNC} = \widehat{DCM} = \widehat{DMC}$

Xét ΔCNB và ΔMDC có:

$\widehat{DCM} = \widehat{BNC}$ (cùng bù với hai góc bằng nhau $\widehat{CBA}$ và $\widehat{BCD}$)

$\widehat{CMD} = \widehat{NCB}$ (cmt)

Do đó: $\Delta CNB \sim \Delta MDC$ (g.g).

c) Ta có: $\widehat{CMD} = \widehat{NCB}$ (hai góc đồng vị)

$\widehat{DCM} = \widehat{BNC}$ (hai góc đồng vị)

$\widehat{BCD} = \widehat{CDM}$ (hai góc so le trong)

Mà $\widehat{DCM} + \widehat{CDM} + \widehat{DMC} = 180^0$ (Định lí tổng ba góc trong một tam giác).

Nên $\widehat{NCM} = \widehat{NCB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCM} = 180^0$.

Do đó M, C, N thẳng hàng.S

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho ΔABC có AB = 6cm, AC = 9cm, BC = 12cm. ΔA'B'C' có A'B' = 10cm, B'C' = 20cm, A'C' = 15cm

a) Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$.

b) Tính tỉ số chu vi của ΔABC và ΔA'B'C'.

Giải

a) Ta có $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}; \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}; \dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{3}{5}$

Xét ΔABC và ΔA'B'C' có $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ (c.c.c)

b) Ta có $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ (cmt) $\Rightarrow \dfrac{C_{\Delta ABC}}{C_{\Delta A'B'C'}} = \dfrac{3}{5}$

Bài 2. Cho $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$, biết tỉ số chu vi của ΔABC và ΔMNP là $\dfrac{4}{5}$ và hiệu độ dài hai cạnh tương ứng của chúng là 4. Tính độ dài hai cạnh tương ứng đó.

Giải

Ta có $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$ (gt)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{AB+AC+BC}{MN+MP+NP}$

Mà $\dfrac{AB+AC+BC}{MN+MP+NP} = \dfrac{4}{5}$ (gt)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{4}{5}$

Ta có $\dfrac{BC}{NP} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \dfrac{BC}{NP-BC} = \dfrac{4}{5-4}$

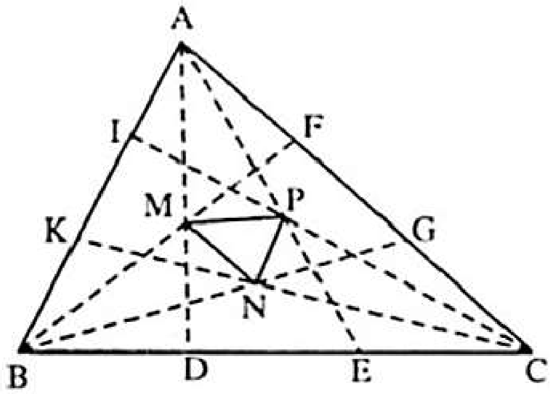
Mà $NP - BC = 4$ cm (gt)

$\Rightarrow \dfrac{BC}{4} = \dfrac{4}{1} \Rightarrow BC = 16$ (cm)

Do đó $NP - BC = 4$ cm $\Rightarrow NP = 20$ cm

Bài 3. Cho ΔABC. Trên cạnh AB lấy các điểm I, K sao cho AI = IK = KB. Trên cạnh BC lấy điểm E và D sao cho BD = DE = EC. Trên cạnh AC lấy điểm F và G sao cho AF = FG = GC. Gọi M là giao điểm của AD và BF, N là giao điểm BG và CK, P là giao điểm của AE và CI. Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta NPM$.

Giải



Ta có: $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow DF \,//\, AB$

Vì $DF \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{DF}{AB} = \dfrac{CD}{CB} \Rightarrow \dfrac{DF}{AB} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{AB}{DF} \Rightarrow \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{3}{5}$

Tương tự $\dfrac{AP}{AE} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AP}{AE}$

Hay $MP \,//\, DE$ hay $MP \,//\, BC$

Do đó $\dfrac{MP}{DE} = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow \dfrac{MP}{DE} = \dfrac{3}{5}$

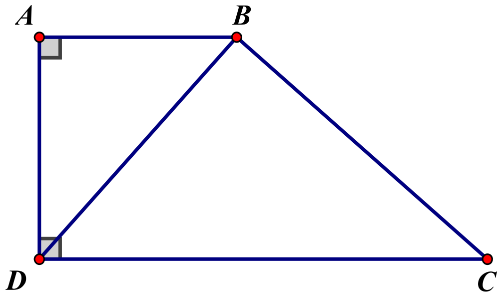
Mặt khác $DE = \dfrac{1}{3}BC \Rightarrow \dfrac{MP}{BC} = \dfrac{1}{5}$ (1)

Tương tự ta có $\frac{NP}{AB}=\frac{1}{5};\frac{MN}{AC}=\frac{1}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta NPM$ (c.c.c)

Bài 4. Cho hình thang $ABCD(AB//CD)$, $\hat{A}=\hat{D}=90^0; AB=2; CD=4,5; BD=3$. Chứng minh rằng $BC\perp BD$.

Giải



Xét ΔBAD và ΔDBC có

$\widehat{ABD}=\widehat{BDC}$ (2 góc so le trong)

$\frac{AB}{BD}=\frac{BD}{DC}=\frac{2}{3}$

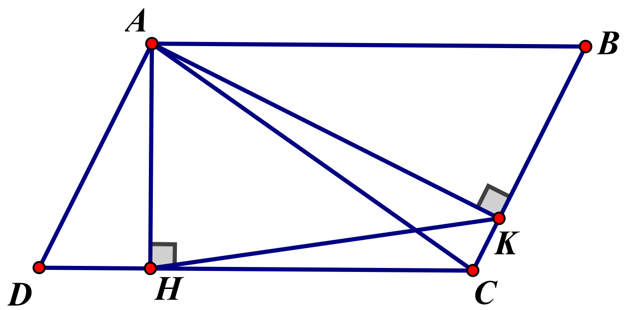
$\Rightarrow \Delta BAD \backsim \Delta DBC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{A}=\widehat{DBC}=90^0$

$\Rightarrow BC\perp BD$

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Kẻ $AH\perp CD, AK\perp BC$. Chứng minh rằng $\Delta KAH \backsim \Delta ABC$.

Giải



Ta có : $S_{ABCD}=AH.DC=AK.BC$

$\Rightarrow AH.AB=AK.BC$

$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AK}{AH}$

Xét ΔABC và ΔKAH có

$\hat{B}=\widehat{KAH}$ (cùng phụ với $\widehat{BAK}$)

$\frac{AB}{BC}=\frac{AK}{AH}$ (chứng minh trên)

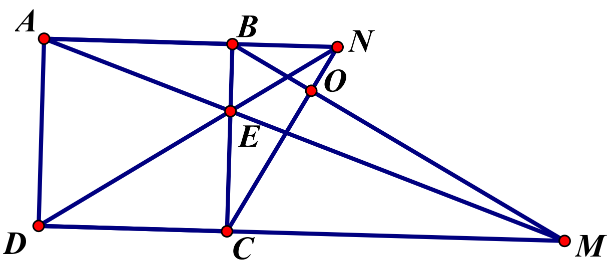
$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta KAH$ (c.g.c)

Bài 6. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại M, tia DE cắt đường thẳng AB tại N. Chứng minh rằng

a) $\Delta NBC \backsim \Delta BCM$

b) $BM\perp CN$

Giải



a) Ta có $AB//CM \Rightarrow \frac{AB}{CM}=\frac{EB}{EC}$ (1)

$BN//CD \Rightarrow \frac{BN}{CD}=\frac{EB}{EC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AB}{CM}=\frac{BN}{CD}$ (3)

Mặt khác $AB = BC = CD$ nên từ (3) suy ra

$$\frac{BC}{CM} = \frac{BN}{CB}$$

Xét ΔNBC và ΔBCM có: $\widehat{NBC} = \widehat{BCM} = 90^0$; $\dfrac{BC}{CM} = \dfrac{BN}{CB}$

$\Rightarrow \Delta NBC \backsim \Delta BCM$ (c.g.c)

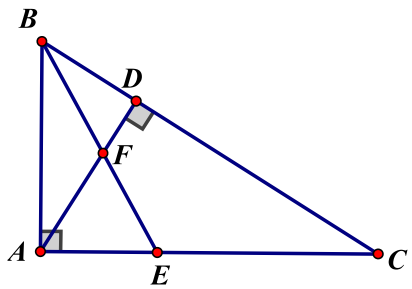
b) Gọi O là giao điểm của BM và CN.

Xét ΔOCM có $\widehat{OMC} + \widehat{MCO} = \widehat{BCN} + \widehat{MCO} = 90^0$

$\widehat{MOC} = 90^0 \Rightarrow BM \perp CN$

Bài 7. Cho ΔABC vuông tại A có BE là đường phân giác của ΔABC ($E \in AC$). Kẻ $AD \perp BC$ ($D \in BC$), AD cắt BE tại F. Chứng minh $\dfrac{FD}{FA} = \dfrac{EA}{EC}$.

Giải



Ta có: BF là đường phân giác của ΔBAD

$\Rightarrow \dfrac{FD}{FA} = \dfrac{BD}{AB}$ (1)

BE là đường phân giác của ΔBAC

$\Rightarrow \dfrac{EA}{EC} = \dfrac{AB}{BC}$ (2)

Mặt khác $\Delta DBA \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \dfrac{DB}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{FD}{FA} = \dfrac{EA}{EC}$

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a có $\widehat{A} = 60^0$, một đường thẳng bất kỳ qua C cắt tia đối của các tia BA, DA tại M, N

a) Chứng minh rằng tích $BM.\,DN$ có giá trị không đổi

b) Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính số đo của góc BKD.

Giải

a) Gọi độ dài cạnh của hình thoi $ABCD$ là a

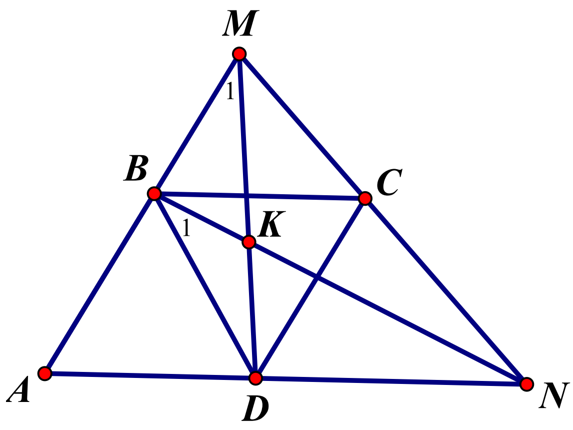
Ta có $BC\ //\ AN \Rightarrow \dfrac{MB}{BA} = \dfrac{CM}{CN}$ (1)

$CD // AM \Rightarrow \dfrac{CM}{CN} = \dfrac{AD}{DN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\dfrac{MB}{BA} = \dfrac{AD}{DN} \Rightarrow MB.DN = BA.AD = a.a = a^2$

$\Rightarrow BM.\ DN$ có giá trị không đổi.



b) $\Delta\ MBD$ và $\Delta\ BDN$ có $\widehat{MBD} = \widehat{BDN} = 120^0$

Mặt khác $\dfrac{MB}{BD} = \dfrac{MB}{BA} = \dfrac{CM}{CN} = \dfrac{AD}{DN} = \dfrac{BD}{DN}$

(Do $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{A} = 60^0$ nên $AB = BC = CD = DA$)

$\Rightarrow \dfrac{MB}{BD} = \dfrac{BD}{DN} \Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta BDN$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{B_1}$.

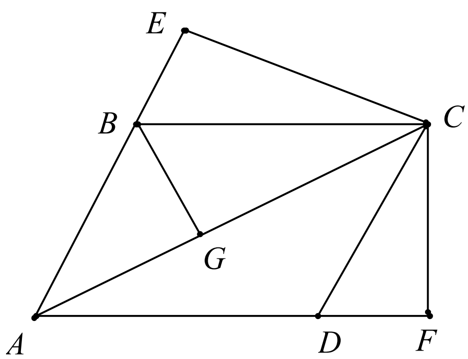
Mặt khác $\Delta\ MBD$ và $\Delta\ BDN$ có $\widehat{BDM} = \widehat{BDK}$ và $\widehat{M_1} = \widehat{B_1}$ nên $\widehat{BKD} = \widehat{MBD} = 120^0$

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$ với đường chéo $AC > BD$. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD. Gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC. Chứng minh rằng:

a) ΔBCG đồng dạng với ΔCAF

b) $BG.AF = CG.CF$

Giải



a) Xét ΔBCG và ΔCAF có:

$\widehat{G} = \widehat{F}\ (= 90^0)$

$\widehat{BCG} = \widehat{CAF}$ (hai góc so le trong)

Do đó: $\Delta BCG \sim \Delta CAF$ (g.g)

b) $\Delta BCG \sim \Delta CAF$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BG}{CF} = \dfrac{CG}{AF}$

Hay $BG.AF = CG.CF$

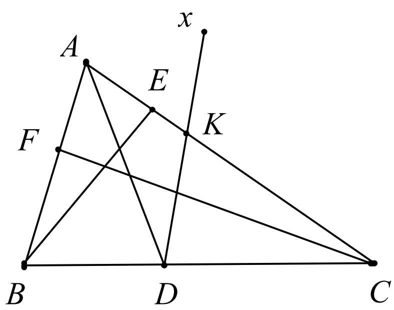
Bài 10. Cho tam giác $ABC\left(AB \le BC\right)$ có các góc đều nhọn, đường phân giác AD. Các đường cao BE, CF cắt nhau ở H, đường phân giác AD. Vẽ tia Dx sao cho $\widehat{CDx} = \widehat{BAC}$ (tia Dx và A cùng phía đối với BC), tia Dx cắt AC ở K. Chứng minh:

a) $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$. Từ đó suy ra: $AE.AC = AF.AB$

b) $\Delta ABC \backsim \Delta DKC$.

c) $DK = DB$.

Giải



a) Xét ΔABE và ΔACF có:

$\hat{E} = \hat{F}$ $(= 90^0)$

$\hat{A}$ góc chung

Do đó: $\Delta ABE \sim \Delta ACF$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$

Hay $AE.AC = AF.AB$

b) Xét ΔABC và ΔDKC có:

$\widehat{BAC} = \widehat{CDx}$ (gt)

$\hat{C}$ góc chung

Do đó: $\Delta ABC \sim \Delta DKC$ (g.g)

c) Theo b. và tính chất đường phân giác ta có: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{DE}{DC}$ vì cùng bằng $\dfrac{AB}{AC}$.

$\Rightarrow DK = DB$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 6cm, AC = 8cm, BC = 10cm$.

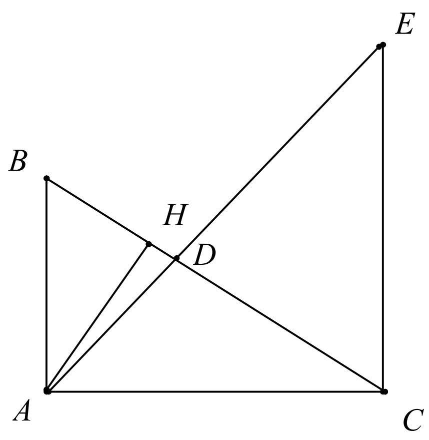
Đường cao $AH(H \in BC)$.

a) Chỉ ra các cặp tam giác đồng dạng.

b) Chứng minh rằng $AH^2 = BH.HC$

c) Cho AD là đường phân giác của tam giác $ABC(D \in BC)$. Vẽ đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt đường phân giác AD tại E. Chứng minh tam giác ABD đồng dạng tam giác ECD.

Giải



a) Các cặp tam giác đồng dạng: $\Delta ABC \sim \Delta HBA; \Delta ABC \sim \Delta HAC; \Delta HBA \sim \Delta HAC$.

b) Xét hai tam giác vuông ΔHBA và ΔHAC có: $\widehat{BAH} + \widehat{HAC} = 90^0$

$$\widehat{ACH} + \widehat{HAC} = 90^0$$

Suy ra: $\widehat{BAH} = \widehat{HCA}$

$\Rightarrow \Delta HBA \sim \Delta HAC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{AH}{CH}$ hay $AH^2 = BH.HC$

c) Vì $EC \perp AC, BA \perp AC \Rightarrow BA // CE$

Xét ΔABD và ΔECD có:

$\widehat{BAD} = \widehat{DEC}$ (hai góc so le trong)

$\widehat{ABD} = \widehat{DCE}$ (hai góc so le trong)

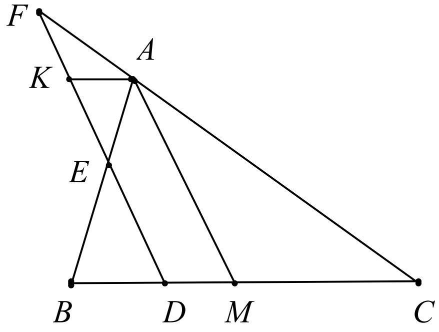
Do đó: $\Delta ABD \sim \Delta ECD$ (g.g).

Bài 12. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh rằng khi điểm D chuyển động trên cạnh BC thì tổng $DE + DF$ có giá trị không đổi.

b) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt EF ở K. Chứng minh rằng K là trung điểm của EF.

Giải



a) Ta có: $\frac{DE}{AM}+\frac{DF}{AM}=\frac{BD}{BM}+\frac{DC}{MC}=\frac{BC}{BM}=2$

Vậy $DE+DF=2AM$.

Mà AM không đổi, nên $DE+DF$ không đổi.

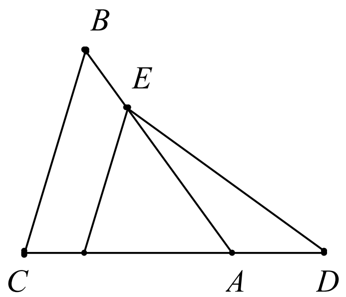
b) Ta chứng minh được: $\frac{FK}{AM}=\frac{KE}{AM}$ (cùng bằng $\frac{KA}{MC}$).

$\Rightarrow FK=KE$

Do đó: K là trung điểm của EF.

Bài 13. Cho các tam giác ABC và $A'B'C'$ có $\widehat{A}+\widehat{A'}=180^0, \widehat{B}=\widehat{B'}$. Gọi $BC=a, AC=b$, $AB=c$, $B'C'=a', A'C'=b', A'B'=c'$. Chứng minh rằng $aa'=bb'+cc'$.

Giải



Vẽ ΔADE bằng $\Delta A'B'C'$, kẻ $EF//BC$.

Vì $EF//BC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{b'}{c}=\frac{AF}{b} \Rightarrow bb'=c.AF$ (1)

ΔABC và ΔEDF đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BC}{DF}=\frac{AB}{ED}=\frac{a}{AF+c'}=\frac{c}{a'}$$

$$\Rightarrow aa'=c.AF+cc' \quad (2)$$

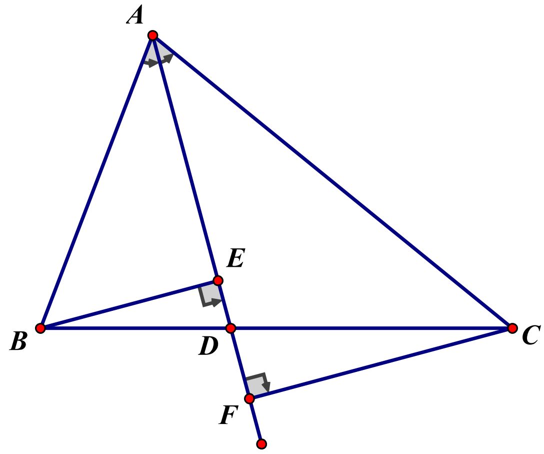
Từ (1) và (2) suy ra: $aa'=bb'+cc'$.

Bài 14. Cho tam giác ABC, AD là phân giác. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu của B và C trên AD.

a) Chứng minh $\Delta ABE \backsim \Delta ACF, \Delta BDE \backsim \Delta CDF$.

b) Chứng minh $AE.DF=AF.DE$.

Giải



a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACF$ có:

$\widehat{BAE} = \widehat{FAC}$ (AD là phân giác)

$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^0$

$\Rightarrow \triangle ABE \backsim \triangle ACF$ (g.g)

Xét $\triangle BDE$ và $\triangle CDF$ có:

$\widehat{BDE} = \widehat{FDC}$ (đối đỉnh)

$\widehat{DEB} = \widehat{DFC} = 90^0$

$\Rightarrow \triangle BDE \backsim \triangle CDF$ (g.g)

b) $\triangle ABE \backsim \triangle ACF \Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{CF}$

$\triangle BDE \backsim \triangle CDF \Rightarrow \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{DE}{DF}$

Suy ra: $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{DE}{DF} \Rightarrow AE.DF = AF.DE$.

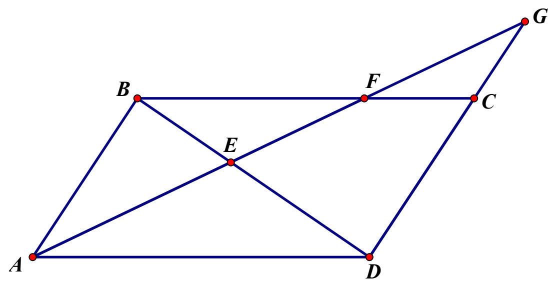
Bài 15. Cho hình bình hành ABCD, điểm F trên cạnh BC. Tia AF cắt BD và DC lần lượt ở E và G. Chứng minh:

a) $\triangle BEF \backsim \triangle DEA$ và $\triangle DGE \backsim \triangle BAE$.

b) $AE^2 = EF.EG$.

c) BF.DG không đổi khi điểm F thay đổi trên cạnh BC.

Giải



a) $\widehat{BEF} = \widehat{AED}$ (đối đỉnh); $\widehat{BFE} = \widehat{EAD}$ (BF // AD)

$\Rightarrow \triangle BEF \backsim \triangle DEA$ (g.g)

$\widehat{BEA} = \widehat{GED}$ (đối đỉnh); $\widehat{BAE} = \widehat{EGD}$ (AB // DG)

$\Rightarrow \triangle DGE \backsim \triangle BAE$ (g.g)

b) Từ phần a suy ra: $\dfrac{AE}{EF} = \dfrac{ED}{EB}; \dfrac{EG}{AE} = \dfrac{ED}{EB}$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{EF} = \dfrac{EG}{AE} \Rightarrow AE^2 = EF.EG$

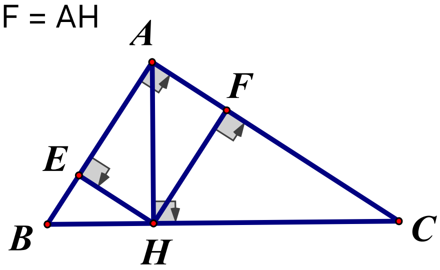
c) $\triangle ABF \backsim \triangle GDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BF}{AB} = \dfrac{AD}{DG}$

$\Rightarrow BF.DG = AB.AD$ (không đổi).

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Chứng minh rằng $AB.AE + AC.AF = 2EF^2$.

Giải

Tứ giác AFHE có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật. ⇒ EF = AH



$\Delta AHB \sim \Delta AEH$ (g.g) nên $\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AB.AE = AH^2$ (1)

$\Delta AHC \sim \Delta AFH$ (g.g) nên $\frac{AC}{AH} = \frac{AH}{AF} \Rightarrow AC.AF = AH^2$ (2)

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), thu được:

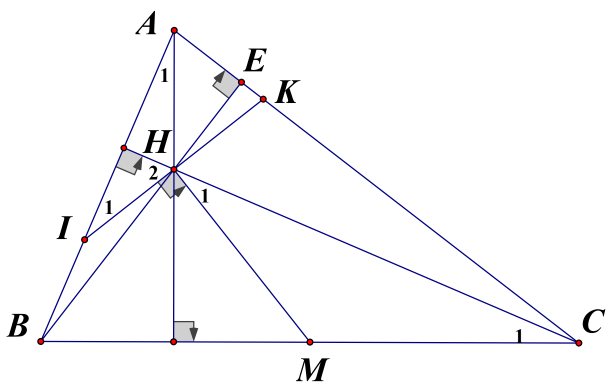
$AB.AE + AC.AF = AH^2 + AH^2 = 2AH^2 = 2EF^2$

Bài 17. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua H và vuông góc với MH cắt AB và AC theo thứ tự ở I và K. Chứng minh rằng:

a) ΔAIH đồng dạng ΔCHM và ΔAKH đồng dạng ΔBHM.

b) HI = HK.

Giải



a) Xét ΔAIH và ΔCHM có:

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$); $\widehat{I_1} = \widehat{H_1}$ (cùng phụ với $\widehat{H_2}$)

⇒ $\Delta AIH \backsim \Delta CHM$ (g.g)

Xét ΔAKH và ΔBHM có:

$\widehat{AKH} = \widehat{BHM}$ (vì cùng phụ với $\widehat{EHK} = \widehat{IHB}$)

$\widehat{HAK} = \widehat{HBM}$ (vì cùng phụ với $\widehat{BCA}$)

Suy ra $\Delta AKH \backsim \Delta BHM$ (g.g)

b) Theo câu a, $\Delta AIH \sim \Delta CHM \Rightarrow \frac{AH}{CM} = \frac{HI}{MH}$

$\Delta AKH \sim \Delta BHM \Rightarrow \frac{AH}{BM} = \frac{HK}{MH}$. Ta lại có CM = BM nên $\frac{HI}{MH} = \frac{HK}{MH}$

Suy ra HI = HK (đpcm)

Bài 18. Cho ΔABC cân tại A. Trên đường phân giác ngoài của góc A lấy hai điểm M và N về hai phía của A (M thuộc nửa mặt phẳng bờ AC chứa B, N thuộc nửa mặt phẳng còn lại) sao cho $AM.AN = AB^2$.

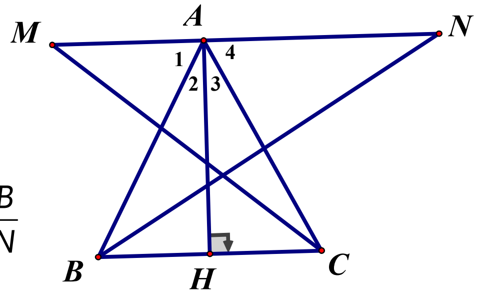
Chứng minh rằng $\Delta ANB \backsim \Delta ACM$.

Giải

Kẻ đường cao AH của tam giác cân ABC, ta có AH đồng thời là phân giác của $\widehat{BAC}$

$\Rightarrow AH \perp AM$

Mà AH$\perp$ BC $\Rightarrow$ MN // BC



Vì $\widehat{A_2} = \widehat{A_3} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_4}$

Do đó $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$ (1)

Mặt khác theo giả thiết ta có: $AM.AN = AB^2 \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AN}$

Mà AB = AC nên $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AN}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có ΔANB $\backsim$ ΔACM (c.g.c)

Bài 19. Cho ΔABC cân tại A và O là trung điểm của BC. Một điểm D di động trên AB, lấy điểm E trên AC sao cho CE = $\frac{OB^2}{BD}$. Chứng minh rằng

a) $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) $\Delta DOE \backsim \Delta DBO$

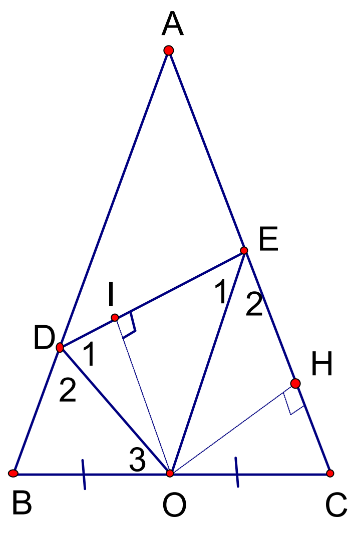
c) DO, EO lần lượt là phân giác của các góc BDE, CED.

d) Khoảng cách từ O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB.

Giải

a) Từ CE = $\frac{OB^2}{BD}$ $\Rightarrow$ $\frac{CE}{OB} = \frac{OB}{BD}$ và $\hat{B} = \hat{C}$ (gt)

$\Rightarrow$ $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$



b) Từ câu a suy ra $\widehat{O_3} = \hat{E}_2$ (1)

Vì B, O ,C thẳng hàng nên $\widehat{O_3} + \widehat{DOE} + \widehat{EOC} = 180^0$ (2)

trong tam giác EOC thì $\hat{E}_2 + \hat{C} + \widehat{EOC} = 180^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{DOE} = \hat{B} = \hat{C}$

ΔDOE và ΔDBO có $\frac{DO}{DB} = \frac{OE}{OC}$ (Do $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$)

và $\frac{DO}{DB} = \frac{OE}{OB}$ (Do OC = OB) và $\widehat{DOE} = \hat{B} = \hat{C}$

nên $\Delta DOE \backsim \Delta DBO$.

c) Từ câu b suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{D_2} \Rightarrow$ DO là phân giác của các góc BDE.

Củng từ câu b suy ra $\hat{E}_1 = \hat{E}_2 \Rightarrow$ EO là phân giác của các góc CED.

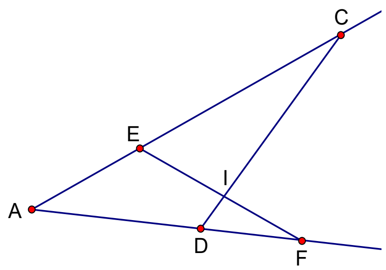
d) Gọi OH, OI là khoảng cách từ O đến DE, CE thì OH = OI, mà O cố định nên OH không đổi $\Rightarrow$OI không đổi khi D di động trên AB.

Bài 20. Trên một cạnh của một góc đỉnh A, lấy đoạn thẳng AE = 3cm, AC = 8cm. Trên cạnh thứ hai của góc đó, đặt các đoạn thẳng AD = 4cm và AF = 6cm.

a) Hỏi tam giác ACD và tam giác AEF đồng dạng không? Vì sao?

b) Gọi I là giao điểm của CD và EF. Tính tỷ số diện tích của hai tam giác IDF và tam giác IEC.

Giải



a) Xét ΔACD và ΔAFE đồng dạng

vì $\dfrac{AC}{AF}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{4}{3}$; A chung

Vậy $\Delta ACD \sim \Delta AFE$ (c.g.c)

b) Ta chứng minh được Δ IDF và Δ IEC đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow k=\dfrac{2}{5} \Rightarrow \dfrac{S_{IDF}}{S_{IEC}}=\dfrac{4}{25}$

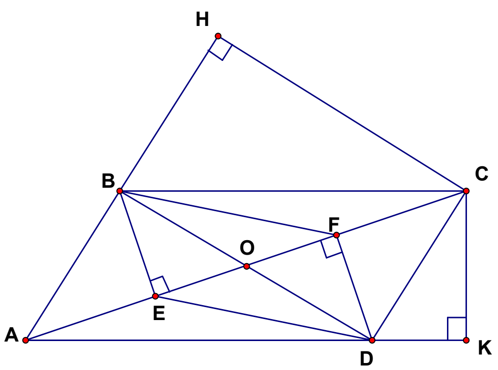
Bài 21. Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD.

a) Tứ giác BEDF là hình gì ? Hãy chứng minh điều đó?

b) Chứng minh rằng: CH.CD = CB.CK

c) Chứng minh rằng: AB.AH + AD.AK = AC^2.

Giải



a) Ta có: BE $\perp$ AC (gt); DF $\perp$ AC (gt) $\Rightarrow$ BE // DF

Chứng minh: $\Delta BEO=\Delta DFO(g-c-g) \Rightarrow$ BE = DF

Suy ra: Tứ giác BEDF là hình bình hành.

b) Ta có: ABC = ADC $\Rightarrow$ HBC = KCD

Chứng minh: $\Delta CBH \sim \Delta CDK(g-g)$ ~

$\Delta CBH \sim \Delta CDK(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{CH}{CB}=\dfrac{CK}{CD} \Rightarrow CH.CD=CK.CB$

c) Chứng minh: $\Delta AFD \sim \Delta AKC(g-g)$ ~$\Delta AFD \sim \Delta AKC(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AK}{AC} \Rightarrow AD.AK=AF.AC$

Chứng minh: $\Delta CFD \sim \Delta AHC(g-g)$ ~$\Delta CFD \sim \Delta AHC(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{CF}{CD}=\dfrac{AH}{AC}$

Mà: CD = AB $\Rightarrow \dfrac{CF}{AB}=\dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AH=CF.AC$

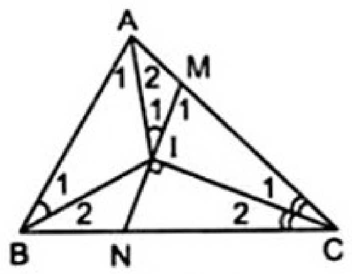
Suy ra: AB.AH + AB.AH = CF.AC + AF.AC = (CF + AF)AC = AC^2 (đpcm).

Bài 22. Cho tam giác ABC, I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng vuông góc với CI tại I cắt AC, BC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AIM \sim \Delta ABI$.

b) $\dfrac{AM}{BN} = \left(\dfrac{AI}{BI}\right)^2$

Giải



a) Ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{A_2} = \hat{I_1}$

$\widehat{M_1} = 90^\circ - \widehat{C_1} = \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2}$

Suy ra: $\hat{I_1} = \dfrac{\hat{B}}{2} = \widehat{B_1}$. Do đó $\Delta AIM \sim \Delta ABI$ (g.g)

b) Từ câu a suy ra $\dfrac{AM}{BN} = \dfrac{AI}{BI}$ nên $AI^2 = AM.AB$

Tương tự $BI^2 = BN.AB$. Do đó $\dfrac{AI^2}{BI^2} = \dfrac{AM}{BN}$

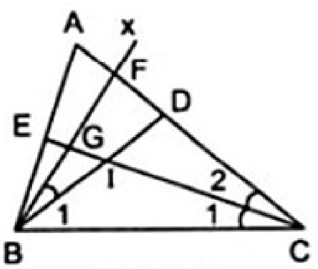
Vậy $\dfrac{AM}{BN} = \left(\dfrac{AI}{BI}\right)^2$

Bài 23. Cho ΔABC có AB < AC, các đường phân giác BD và CE. Kẻ tia Bx sao cho $\widehat{DBx} = \widehat{DCE}$ (tia Bx và A nằm cùng phía đối với BD), Bx cắt DA ở F, cắt CE ở G. Chứng minh rằng:

a) CG < CE

b) BD < CE.

Giải



a) Ta có: $AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow \widehat{DBA} > \widehat{C_2} = \widehat{DBF}$

Gọi I là giao điểm của BD và CE thì G nằm giữa I và E

Suy ra CG < CE (1)

b) Do $\widehat{B_1} > \widehat{C_1}$ và $\widehat{DBF} = \widehat{C_2}$

Suy ra CF > BF (2)

Ta chứng minh được hai ΔFBD và ΔFCG đồng dạng (g.g)

Suy ra $\dfrac{BD}{CG} = \dfrac{BF}{CF}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra BD < CG (4)

Từ (1) và (4) suy ra BD < CE

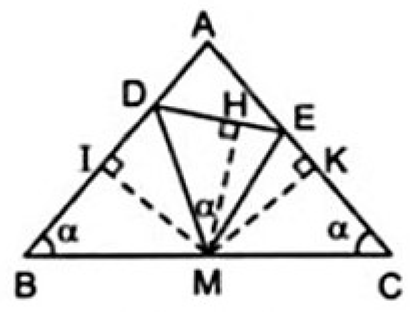
Bài 24. Cho ΔABC cân tại A có BC = 2a, M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \hat{B}$.

a) Chứng minh rằng tích BD.CE không đổi.

b) Chứng minh rằng DM là tia phân giác của góc BDE.

c) Tính chu vi ΔAED nếu ΔABC là tam giác đều.

Giải



a) Ta có: $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME}$

Mặt khác $\widehat{DMC} = \hat{B} + \widehat{BDM}$

Mà $\widehat{DME} = \hat{B}$ nên $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$

Do đó: ΔBDM ~ ΔCME (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{CM} = \dfrac{BM}{CE} \Rightarrow$ BD.CE = CM. BM = a^2

b) ΔBDM ~ ΔCME suy ra: $\dfrac{DM}{ME} = \dfrac{BD}{CM}$

$\Rightarrow \dfrac{DM}{ME} = \dfrac{BD}{BM}$ (Vì CM = BM)

Do đó: ΔDME ~ ΔDBM (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{BDM}$

Vậy DM là tia phân giác của góc BDE.

b) Từ câu b suy ra DM là tia phân giác của góc BDE

EM là tia phân giác của góc CED

Kẻ MH $\perp$ DE, MI $\perp$ AB, MK $\perp$ AC

Ta có: DH = DI, EH = EK

Do đó chu vi ADE = AI + AK = 2AK

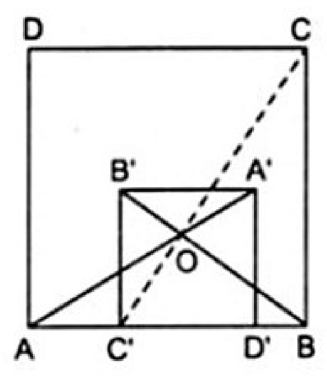
Ta lại có $CK = \dfrac{MC}{2} = \dfrac{a}{2}$

AC = 2a nên AK = 1,5a

Vậy chu vi tam giác ADE = 3a

Bài 25. Cho bốn điểm A, C', D', B thẳng hàng theo thứ tự ấy. Vẽ về một phíc của AB các hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy.

Giải



Gọi O là giao điểm của AA' và BB'A

Ta có: $\dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}$

Do đó: ΔOB'C' ~ ΔOBC (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B'OC'} = \widehat{BOC}$

Từ đó: C, O, C' thẳng hàng.

Tương tự D, O, D' thẳng hàng

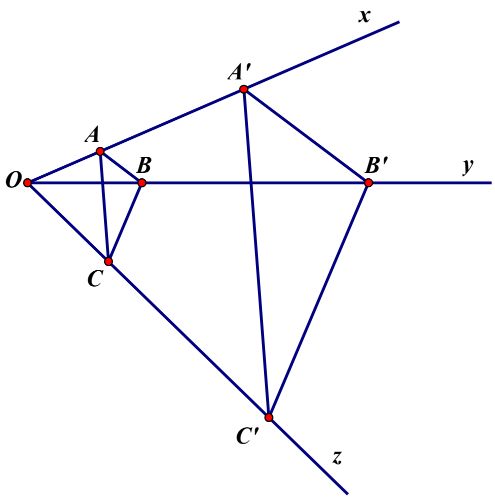
Vậy đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy

Bài 26. Cho tia Oy nằm giữa hai tia Ox, Oz. Trên tia Ox lấy điểm A và A' sao cho $OA = \frac{1}{3}OA'$. Trên tia Oy lấy điểm B và B' sao cho $OB = 2cm$, $BB' = 4cm$. Trên tia Oz lấy điểm C và C' sao cho $\frac{CC'}{OC} = \frac{2}{3}$ (ba điểm A, B, C không thẳng hàng)

a) Tính $\frac{AB}{A'B'}$

b) Chứng minh: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

Giải



a) Ta có: $\frac{OA}{OA'} = \frac{1}{3}$; $\frac{OB}{OB'} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ $\Rightarrow AB \,//\, A'B'$ (Định lý Talet đảo)

$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{1}{3}$

b) Chứng minh tương tự: $BC \,//\, B'C'$ $\Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{1}{3}$

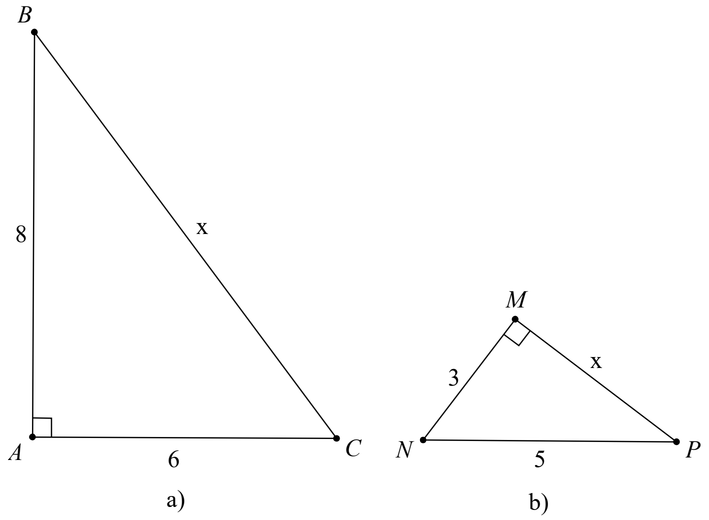
Và $AC \,//\, A'C'$ $\Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

BÀI 35. ĐỊNH LÍ PYTHAGORE VÀ ỨNG DỤNG

VD 1.1. Tìm x trong mỗi hình vẽ sau:



Giải

a) Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow 8^2 + 6^2 = x^2$

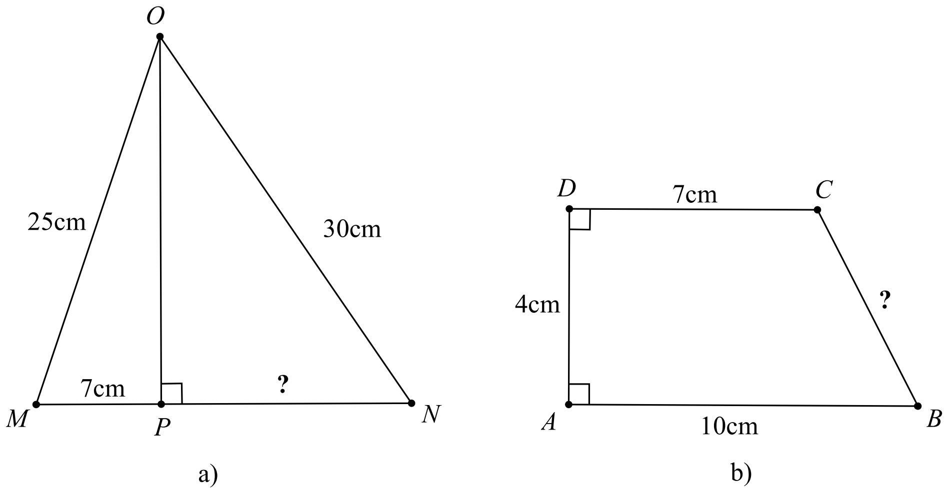
$\Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

b) Xét tam giác MNP vuông tại M, ta có: $MN^2 + MP^2 = NP^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow 3^2 + x^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow x = 4$

VD 1.2. Tìm các độ dài PN và BC trong hình vẽ sau:



Giải

a) Xét tam giác OMP vuông tại P, ta có: $OP^2 + MP^2 = OM^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow OP^2 + 7^2 = 25^2$

$\Rightarrow OP^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49$

$\Rightarrow OP^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576 \Rightarrow OP = 24\,\text{cm}$

Xét tam giác OPN vuông tại P, ta có: $OP^2 + PN^2 = ON^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow 24^2 + PN^2 = 30^2$

$\Rightarrow PN^2 = 30^2 - 24^2 = 900 - 576 = 324 \Rightarrow PN = 18\text{ cm}$

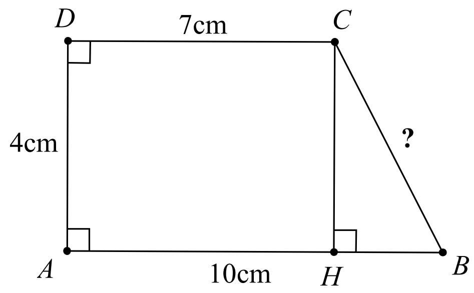
Vậy PN = 18cm

b) Kẻ $CH \perp AB$ tại H suy ra tứ giác AHCD là hình chữ nhật

$\Rightarrow CH = DA = 4\text{ cm};\ DC = AH = 7\text{ cm}$

Ta có $AH + HB = AB$

$\Rightarrow 7 + HB = 10 \Rightarrow HB = 3\text{ cm}$



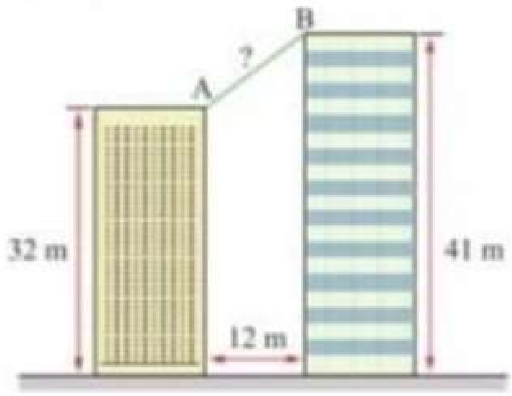
Xét tam giác CHB vuông tại H, ta có: $CH^2 + HB^2 = CB^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow 4^2 + 3^2 = CB^2$

$\Rightarrow CB^2 = 16 + 9 = 25$

$\Rightarrow CB^2 = 5^2 \Rightarrow CB = 5\text{ cm}$

VD 1.3. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B trong hình vẽ.



Giải

Ta có: AD = 32m, BC = 41m

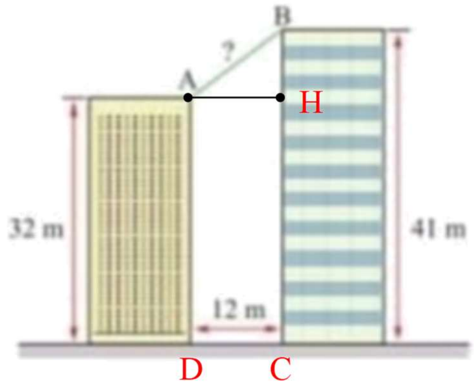
Kẻ AH vuông góc với BC suy ra AH = DC = 12m

Và BH = 41 − 32 = 9 (m)

Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có:

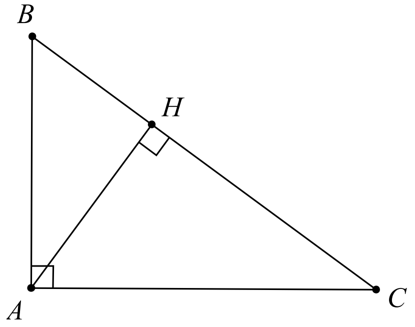
$AH^2 + BH^2 = AB^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow AB^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow AB = 15\text{ m}$



VD 1.4. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 6cm, AC = 8cm. Tính độ dài cạnh BC, đường cao AH và các đoạn thẳng BH, CH.

Giải



+ Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow BC = 10\,\text{cm}$

+ Ta có $AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH.10 = 6.8 \Rightarrow AH = 48 : 10 = 4,8\,\text{cm}$

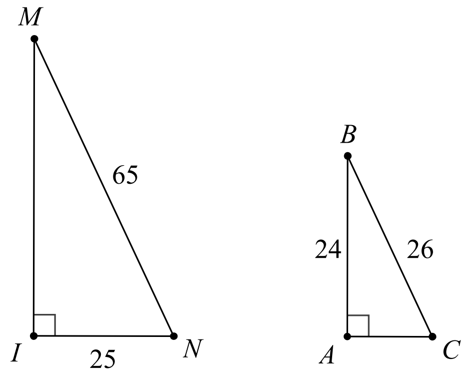
+ Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có $AH^2 + HB^2 = AB^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow HB^2 = AB^2 - AH^2 = 6^2 - 4,8^2 = 12,96 \Rightarrow HB = 3,6\,\text{cm}$

+ Ta có $BH + HC = BC \Rightarrow HC = BC - BH = 10 - 3,6 = 6,4\,\text{cm}$

VD 1.5. Cho ΔABC vuông tại A, AB = 24cm, BC = 26cm và ΔIMN vuông tại I, $IN = 25\,\text{cm}$, $MN = 65\,\text{cm}$. Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta IMN$.

Giải



Xét ΔABC vuông tại A ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lý Pytago)

$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 26^2 - 25^2 = 100 \Rightarrow AC = 10\,\text{cm}$

Xét IMN vuông tại I ta có $IM^2 + IN^2 = MN^2$ (định lý Pytago)

$\Rightarrow IM^2 = MN^2 - IN^2 = 65^2 - 25^2 = 3600 \Rightarrow IM = 60\,\text{cm}$

Ta có $\dfrac{AC}{IN} = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5}; \dfrac{AB}{\text{IM}} = \dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5}; \dfrac{BC}{MN} = \dfrac{26}{65} = \dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{IN} = \dfrac{AB}{\text{IM}} = \dfrac{BC}{MN}$

Xét hai ΔABC và ΔIMN có $\dfrac{AC}{IN} = \dfrac{AB}{\text{IM}} = \dfrac{BC}{MN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta IMN$ (c.c.c)

VD 2.1. Chứng minh ΔABC là tam giác vuông (chỉ ra vuông tại đỉnh nào) trong các trường hợp sau:

a) AB = 9cm, AC = 15cm, BC = 12cm;

b) AB = 13cm, AC = 12cm, BC = 5cm.

Giải

a) Xét tam giác ABC có $AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$

Mà $AC^2 = 15^2 = 225$

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B (theo Pytago đảo)

b) Xét tam giác ABC có $AC^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$

Mà $AB^2 = 13^2 = 169$

$\Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C (theo Pytago đảo)

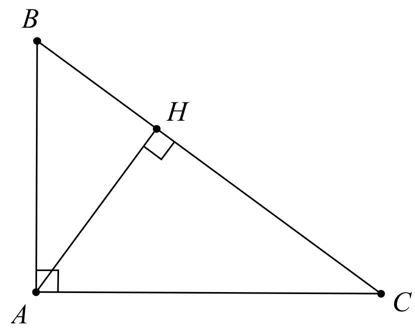
VD 2.2. Cho ΔABC có AB = 6cm; AC = 8cm; BC = 10cm. Kẻ AH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A;

b) Tính diện tích tam giác ABC;

c) Tính độ dài đoạn AH.

Giải



a) Xét tam giác ABC, ta có: $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Mà $BC^2 = 10^2 = 100$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A (theo Pytago đảo)

b) Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC = \dfrac{1}{2}.6.8 = 24$ (cm²)

c) Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AH.BC \Rightarrow \dfrac{1}{2}.AH.10 = 24 \Rightarrow AH = 24.2 : 10 = 4,8\,\text{cm}$

VD 2.3. Cho tam giác ABC có AB = 24cm, AC = 32cm, BC = 40cm. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AM = 7cm. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABC vuông.

b) $\widehat{AMB} = 2\widehat{C}$

Giải

a) Xét tam giác ABC, ta có: $AB^2 + AC^2 = 24^2 + 32^2 = 576 + 1024 = 1600$

Mà $BC^2 = 40^2 = 1600$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A (theo Pytago đảo)

b) Xét tam giác ABM vuông tại A, ta có: $AB^2 + AM^2 = BM^2$ (định lý Pytago)

$\Rightarrow BM^2 = 24^2 + 7^2 = 625 = 25^2 \Rightarrow BM = 25\,\text{cm}$

Mà $MC = AC - AM = 32 - 7 = 25\,\text{cm}$

$\Rightarrow BM = MC$

Xét tam giác BMC có $BM = MC$ (cmt) suy ra tam giác BMC cân tại M

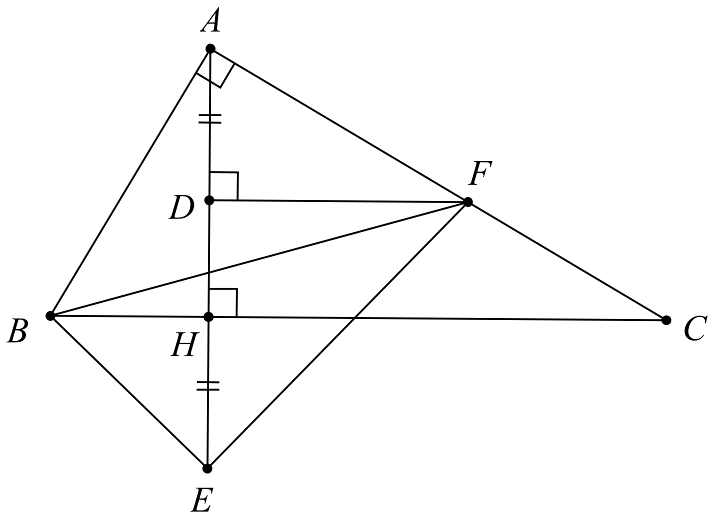
$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{C}$ (tính chất)

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{MBC} + \widehat{C}$ (tính chất góc ngoài của tam giác BMC)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 2\widehat{C}$ (đpcm)

VD 3.1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trên đó lấy điểm D. Trên tia đối của tia HA lấy một điểm E sao cho HE = AD. Đường vuông góc với AH tại D cắt AC tại F. Chứng minh rằng $EB \perp EF$.

Giải



Xét tam giác DEF vuông tại D, ta có: $DE^2 + DF^2 = EF^2$ (định lí Pytago)

Xét tam giác BHE vuông tại H, ta có: $BH^2 + HE^2 = BE^2$ (định lí Pytago)

Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có: $AH^2 + BH^2 = AB^2$ (định lí Pytago)

Xét tam giác ADF vuông tại D, ta có: $AD^2 + DF^2 = AF^2$ (định lí Pytago)

Xét tam giác ABF vuông tại A, ta có: $AB^2 + AF^2 = BF^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow BF^2 = AH^2 + BH^2 + AD^2 + DF^2$

$\Rightarrow BF^2 = \left(AD + DH\right)^2 + \left(BH^2 + AD^2\right) + DF^2$

$\Rightarrow BF^2 = \left(HE + DH\right)^2 + \left(BH^2 + HE^2\right) + DF^2$

$\Rightarrow BF^2 = DE^2 + BE^2 + DF^2$

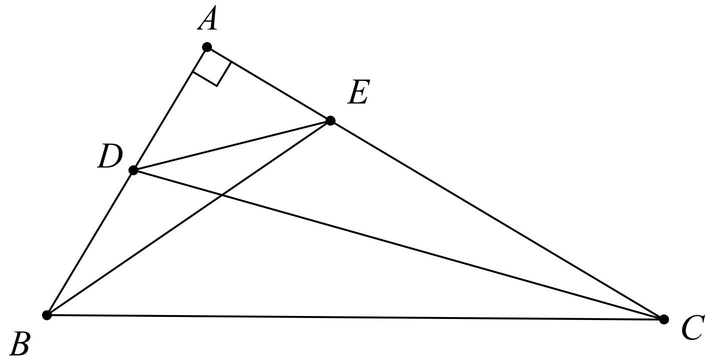
$\Rightarrow BF^2 = \left(DE^2 + DF^2\right) + BE^2 = EF^2 + BE^2$

Xét tam giác BEF có $BF^2 = EF^2 + BE^2$

$\Rightarrow$ tam giác BEF vuông tại E (theo định lí Pytago đảo) $\Rightarrow EB \perp EF$

VD 3.2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D và E lần lượt là các điểm trên hai cạnh AB và AC (D, E không trùng với các đỉnh của tam giác). Chứng minh rằng $BE^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

Giải



Áp dụng định lí Pytago cho các tam giác ADC, ABE, ADE, ABC ta lần lượt có:

$CD^2 = AD^2 + AC^2$ (1)

$BE^2 = AE^2 + AB^2$ (2)

$DE^2 = AD^2 + AE^2$ (3)

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (4)

Từ (1) và (2) suy ra $CD^2 + BE^2 = AD^2 + AC^2 + AE^2 + AB^2$ (5)

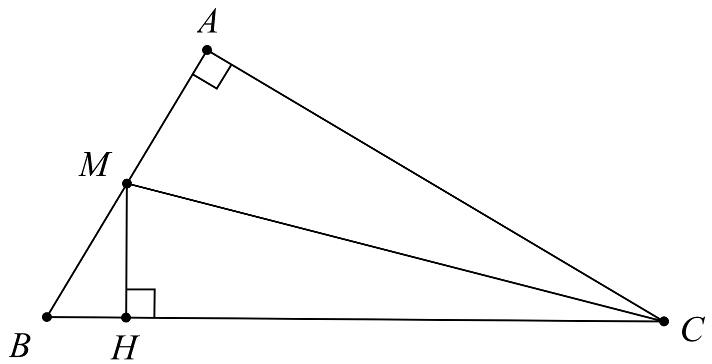
Từ (3) và (4) suy ra $DE^2 + BC^2 = AD^2 + AE^2 + AB^2 + AC^2$ (6)

Từ (5) và (6) ta được $CD^2 + BE^2 = DE^2 + BC^2$

VD 3.3. Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của AB, kẻ MH vuông góc với BC tại H.

Chứng minh rằng $CH^2 - BH^2 = AC^2$.

Giải



Nối CM

Xét tam giác CMH vuông tại H, ta có: $MH^2 + HC^2 = MC^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow HC^2 = MC^2 - MH^2$

$\Rightarrow HC^2 - BH^2 = MC^2 - MH^2 - BH^2$

$\Rightarrow HC^2 - BH^2 = MC^2 - \left(MH^2 + BH^2\right)$ (1)

Xét tam giác MBH vuông tại H, ta có: $MH^2 + BH^2 = MB^2$ (định lí Pytago) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow HC^2 - BH^2 = MC^2 - MB^2$

Mà MA = MB (M là trung điểm của AB)

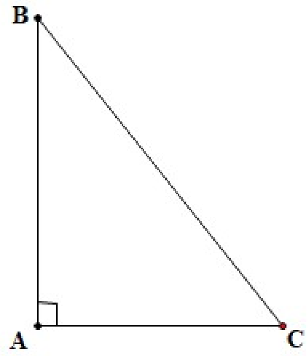
$\Rightarrow HC^2 - BH^2 = MC^2 - MA^2 = AC^2$ (do tam giác ACM vuông tại A)

Vậy $HC^2 - BH^2 = AC^2$

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. **Cho** $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 90^\circ$. Biết $AB + AC = 49\,cm$, $AB - AC = 7\,cm$. Tính độ dài đoạn BC.

Giải



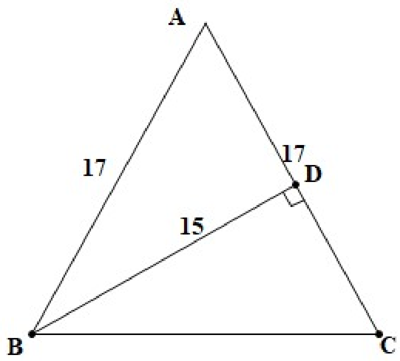
Theo giả thiết ta có $\begin{cases} AB + AC = 49 \\ AB - AC = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 28(cm) \\ AC = 21(cm) \end{cases}$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC ta được:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{28^2 + 21^2} = 35(cm)$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, $AB = AC = 17\,cm$. Kẻ $BD \perp AC$. Tính độ dài đoạn BC biết $BD = 15\,cm$.

Giải



Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABD ta được:

$AD^2 + BD^2 = AB^2 \Leftrightarrow AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8(cm)$.

Ta có: $DC = AC - AD = 17 - 8 = 9(cm)$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông BDC ta được:

$BD^2 + DC^2 = BC^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{15^2 + 9^2} = \sqrt{306}\,(cm)$.

Bài 3. Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 26cm và có độ dài các cạnh góc vuông tỉ lệ với 5 và 12. Tính độ dài các cạnh góc vuông.

Giải

Gọi hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đó lần lượt là a và b (a, b > 0)

Do các cạnh góc vuông tỉ lệ với 5 và 12 nên ta có: $\frac{a}{5}=\frac{b}{12}$

Đặt $\frac{a}{5}=\frac{b}{12}=k\Rightarrow\begin{cases}a=5k\\b=12k\end{cases}$

Áp dụng định lí Pytago cho tam giác vuông đó, ta được: $(5k)^2+(12k)^2=26^2$

$\Rightarrow 25k^2+144k^2=676$

$\Rightarrow 169k^2=676$

$\Rightarrow k^2=4$

$\Rightarrow k=2$

Suy ra $a=5.2=10; b=12.2=24$

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông đó lần lượt là 10 và 24.

Bài 4. Cho ΔABC cân tại, $\widehat{A}=90°$. Biết $AB=AC=4\,\text{cm}$.

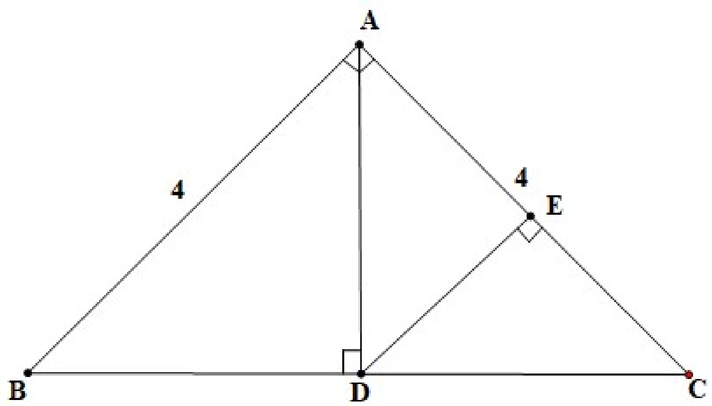
a) Tính BC.

b) Từ A kẻ $AD\perp BC$. Chứng minh rằng D là trung điểm của BC.

c) Từ D kẻ $DE\perp AC$. Chứng minh rằng ΔADE vuông cân.

d) Tính AD.

Giải



a) Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC ta được:

$AB^2+AC^2=BC^2\Leftrightarrow BC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}\,(\text{cm})$

b) Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ADB ta được:

$AD^2+BD^2=AB^2\Leftrightarrow BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{4^2-AD^2}$. (1)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ADC ta được:

$AD^2+DC^2=AC^2\Leftrightarrow DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{4^2-AD^2}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BD=DC$. Vậy D là trung điểm của BC.

c) Ta có $\begin{cases} DE \perp AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow DE \parallel AB \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CDE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = 45^\circ$.

Mặt khác, ΔADE vuông tại E. Vậy ΔADE vuông cân tại E.

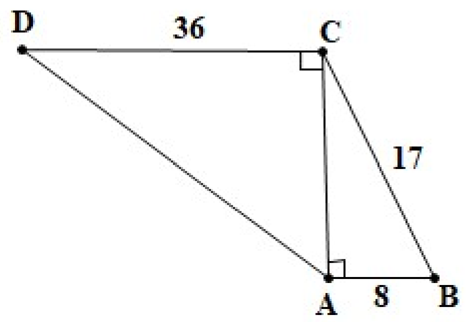
d) Theo câu c ta có ΔADE vuông cân nên $ED = AE = \frac{1}{2}AC = 2\text{cm}$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông AED ta được:

$AE^2 + ED^2 = AD^2 \Leftrightarrow AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Bài 5. Cho ΔABC, $\widehat{A} = 90^\circ$; $AB=8\text{cm}$, $BC = 17\,\text{cm}$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ tia $CD \perp AC$ và $CD = 36\,\text{cm}$. Tính tổng độ dài các đoạn thẳng $AB + BC + CD + DA$.

Giải



Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC ta được:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15(\text{cm})$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ACD ta được:

$AC^2 + CD^2 = AD^2 \Leftrightarrow AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{36^2 + 15^2} = 39(\text{cm})$.

Vậy $AB + BC + CD + DA = 8 + 17 + 36 + 39 = 100(\text{cm})$

Bài 6. Một tam giác vuông có tỉ số hai cạnh góc vuông là 3 : 4 và chu vi tam giác đó là 36 cm. Tính cạnh huyền của tam giác đó.

Giải

Gọi độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác lần lượt là a và b. Gọi c là độ dài cạnh huyền (a, b, c > 0)

Khi đó theo định lý Pytago ta có: $a^2 + b^2 = c^2$ (1)

Theo bài ra ta cũng có: $\begin{cases} a : b = 3 : 4 & (2) \\ a + b + c = 36 & (3) \end{cases}$

Từ (2) suy ra $a = \frac{3}{4}b$, thay vào (1) ta được $\left(\frac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = c^2$

$\Rightarrow c^2 = \frac{25}{16}b^2 = \left(\frac{5}{4}b\right)^2 \Rightarrow c = \frac{5}{4}b$ (do b, c > 0)

Với $a=\frac{3}{4}b;\ c=\frac{5}{4}b$ thay vào (3) ta được: $\frac{3}{4}b+b+\frac{5}{4}b=36$

$\Rightarrow\left(\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}\right)b=36\Rightarrow 3b=36\Rightarrow b=36:3=12\Rightarrow c=\frac{5}{4}.12=15$

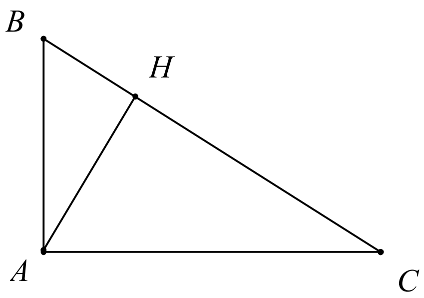
Vậy độ dài cạnh huyền của tam giác đó bằng 15cm.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=15cm; AC=20cm$. Kẻ đường cao AH.

a) Chứng minh : $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ từ đó suy ra: $AB^2=BC.BH$

b) Tính BH và CH.

Giải



a) Xét ΔABC và ΔHBA, ta có:

$\widehat{A}=\widehat{H}=90^0$

$\widehat{B}$ chung

Do đó: $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{HB}=\frac{BC}{BA}$

$\Rightarrow AB.BA=HB.BC$ hay $AB^2=BC.BH$

b) Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông ABC, ta có: $AB^2+AC^2=BC^2$

$\Rightarrow 15^2+20^2=BC^2 \Rightarrow BC=25cm$.

Theo a, ta có: $\frac{AB}{HB}=\frac{BC}{BA}$ hay $\frac{15}{HB}=\frac{25}{15}$

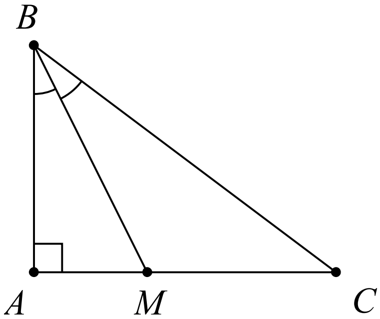
$\Rightarrow HB=\frac{15.15}{25}=9cm.$

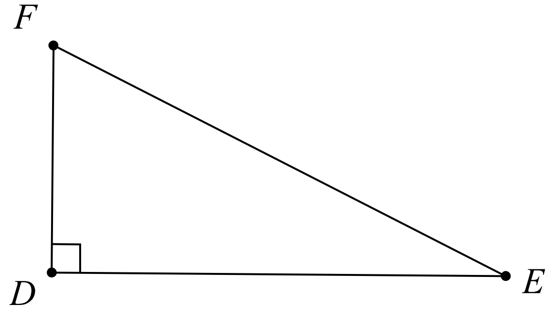
$CH=BC-HB=25-9=16cm.$

Vậy $HB=9cm, CH=16cm.$

Bài 8. Cho ΔABC có $\widehat{A}=90^0$; AB = 3cm; AC = 4cm, BC = 5cm và ΔDEF có $\widehat{D}=90^0$, DF = 3cm, DE = 6cm. Vẽ phân giác BM của ΔABC. Chứng minh $\Delta ABM \backsim \Delta DEF$.

Giải





Xét tam giác ABC có BM là đường phân giác (gt)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{MA}{3} = \dfrac{MC}{5}$

Ta có $\dfrac{MA}{3} = \dfrac{MC}{5} = \dfrac{MA+MC}{3+5} = \dfrac{AC}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $\dfrac{MA}{3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MA = \dfrac{3}{2}$

Xét tam giác ABM vuông tại A, ta có $BM^2 = AB^2 + AM^2$ (định lí Pytago)

Hay $BM^2 = 3^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{45}{4}$ (1)

Xét tam giác DEF vuông tại D, ta có $EF^2 = DF^2 + DE^2$ (định lí Pytago)

Hay $EF^2 = 3^2 + 6^2 = 45$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{BM^2}{EF^2} = \dfrac{45}{4} : 45 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{BM}{EF} = \dfrac{1}{2}$

Ta có $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{AM}{DF} = \dfrac{\frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{2}$

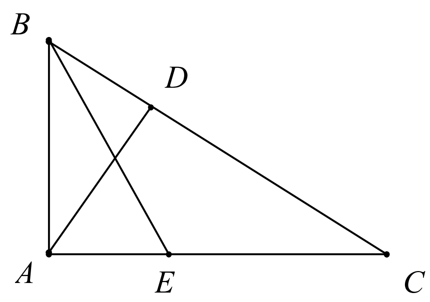
Xét ΔABM và ΔDEF có: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AM}{DF} = \dfrac{BM}{EF}$ (cmt) nên $\Delta ABM \backsim \Delta DEF$.

Bài 9. Cho tam giác vuông $ABC\left(\widehat{A} = 90^0\right)$ có $AB = 9cm,\ AC = 12cm$. Dựng AD vuông góc với $BC\left(D \in BC\right)$. Tia phân giác góc B cắt AC tại E.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AD, DB và DC.

b) Tính diện tích các tam giác ABD và ACD.

Giải



a) Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông ABC: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Rightarrow 9^2 + 12^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 15cm$.

Xét ΔABC và ΔDAC có:

$\widehat{ABC} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$)

$\widehat{C}$ góc chung

Do đó: $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{BC}{AC}$

Hay $\dfrac{9}{AD}=\dfrac{12}{DC}=\dfrac{15}{12}$ hay $\dfrac{9}{AD}=\dfrac{12}{DC}=\dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow AD=7,2cm; DC=9,6cm; DB=5,4cm.$

b) Tính diện tích các tam giác ABD là: $\dfrac{1}{2}.BD.AD=\dfrac{1}{2}.5,4.7,2=19,44cm^2$

Tính diện tích các tam giác ACD là: $\dfrac{1}{2}.DC.AD=\dfrac{1}{2}.9,6.7,2=34,56cm^2$

Bài 10. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Từ H kẻ HM $\perp$ AB, HN $\perp$ AC. Cho biết AB = 21cm, AC = 28 cm.

a) Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$

b) Tính độ dài đoạn thẳng AH.

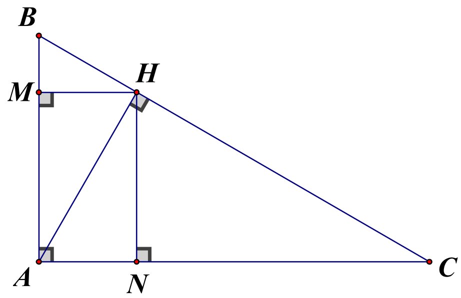
c) Tính tỉ số $\dfrac{S_{\Delta HBA}}{S_{\Delta HAC}}$.

d) Chứng minh rằng: $\dfrac{AM}{AB}+\dfrac{AN}{AC}=1$.

Giải

a) Xét ΔABC và ΔHBA có $\hat{H}=\hat{B}=90°$, $\hat{B}$ chung $\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta HBA$ (g.g)

b) Áp dụng đinh lý Pytago tính được BC = 35 cm.



Vì $\Delta ABC \backsim \Delta HBA \Rightarrow \dfrac{AC}{HA}=\dfrac{BC}{BA}$

Thay số ta tính được $HA=16,8\,cm$

c) Ta chứng minh được $\Delta HBA \backsim \Delta HAC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta HBA}}{S_{\Delta HAC}}=\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2=\left(\dfrac{21}{28}\right)^2=\dfrac{9}{16}$

d) Ta chứng minh $HN \,//\, AB; HM \,//\, AC$

Áp dụng định lý Talet vào tam giác ABC ta có: $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{HC}{BC}; \dfrac{AN}{AC}=\dfrac{HB}{BC}$

Do đó $\dfrac{AM}{AB}+\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{HC}{BC}+\dfrac{HB}{BC}=\dfrac{BC}{BC}=1$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AB = 6cm và AC = 8cm.

a) Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$

b) Tính BC, AH.

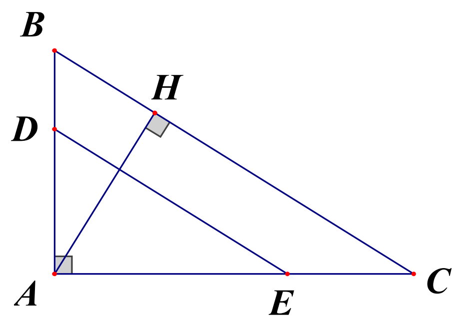
c) Trên AC lấy E, từ E kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại D. Tìm vị trí điểm E để CE + BD = DE.

Giải

a) $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ (g.g)

b) Theo Pytago, ta tính được BC = 10cm

Vì $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ (cmt) $\Rightarrow AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = 4,8\,\text{cm}$



c) Đặt $AE = x \Rightarrow CE = 8 - x$

Do ED // BC $\Rightarrow \dfrac{CE}{CA} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{CE+BD}{CA+BA} = \dfrac{DE}{CA+AB}$

Hay $\dfrac{8-x}{8} = \dfrac{DE}{14}$ (1)

Mà $\dfrac{AE}{CA} = \dfrac{ED}{EC} \Rightarrow \dfrac{x}{8} = \dfrac{DE}{10} \Rightarrow DE = \dfrac{5}{4}x$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{8-x}{8} = \dfrac{5x}{56} \Rightarrow x = \dfrac{14}{3} \Rightarrow AE = \dfrac{14}{3}\text{cm}$

Bài 12. Cho ΔABC vuông tai A, có AB = 9cm, AC = 12cm. Tia phân giác góc A cắt BC tại D, từ D kẻ DE ⊥ AC (E ∈ AC).

a) Tính độ dài đoạn BC

b) Tính độ dài đoạn BD, CD.

c) Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta EDC$

d) Tính độ dài đoạn DE

e) Tính tỉ số $\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}$

Giải

a) Áp dụng định lí Pytago ta tính được BC = 15cm

b) Vì AD là phân giác của góc A $\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$

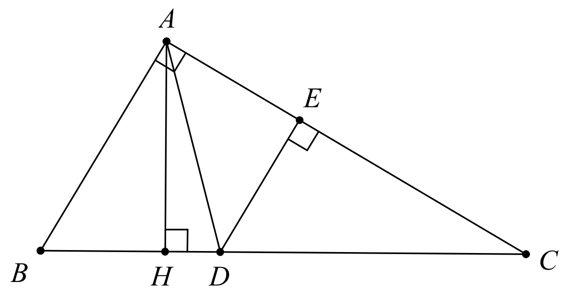
Ta có $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{BD}{DC+BD} = \dfrac{AB}{AC+AB}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AB}{AC+AB} \Rightarrow \dfrac{BD}{15} = \dfrac{9}{21} \Rightarrow BD = \dfrac{9.15}{21} = 6,4\,\text{cm}$

Suy ra DC = BC − BD = 15 − 6,4 = 8,6 (cm)

c) Xét ΔABC và ΔEDC có $\widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ$, $\widehat{C}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta EDC$ (g.g)



d) Vì $\Delta ABC \backsim \Delta EDC$ $\Rightarrow \dfrac{AB}{ED} = \dfrac{BC}{DC} \Rightarrow ED = \dfrac{AB.DC}{BC} = \dfrac{9.8,6}{15} = 5,16\,\text{cm}$

e) Ta có $S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}.AH.BD;\ S_{\Delta ADC} = \dfrac{1}{2}.AH.DC$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{\frac{1}{2}.AH.BD}{\frac{1}{2}.AH.DC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$$

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 12 cm, AC = 16 cm. Vẽ đường cao AH.

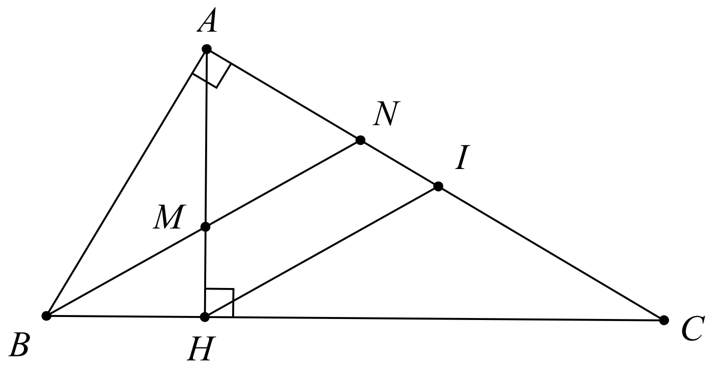
a) Chứng minh $\Delta HBA \backsim \Delta ABC$

b) Tính BC, AH, BH.

c) Tia phân giác của góc B cắt AC và AH theo thứ tự ở M và N.

Kẻ HI song song với BN (I thuộc AC). Chứng minh $AN^2 = NI.NC$.

Giải



a) $\Delta HBA \backsim \Delta ABC$ (g.g)

b) Áp dụng định lí Pytago cho tam giác ABC ta tính được BC = 10cm

Áp dụng đẳng thức $AH.BC = AB.AC$ ta tính được AH = 9,6cm

Do $\Delta HBA \backsim \Delta ABC$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow HB = \frac{AB^2}{BC} = \frac{144}{20} = 7,2 \text{ (cm)}$$

c) Xét tam giác AHI có HI // MN (HI // BN)

$\Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{NI}{NA}$ (định lí Talet)

Do BM là phân giác của tam giác ABH, ta có: $\frac{MH}{MA} = \frac{HB}{AB}$

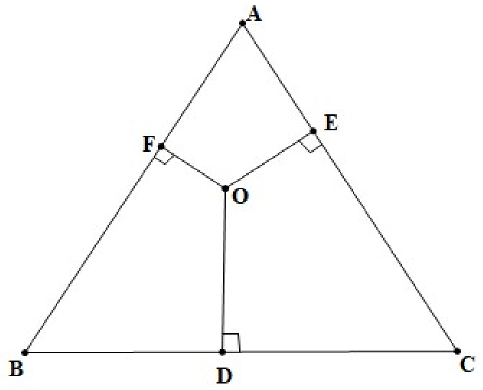
Do BN là phân giác cúa tam giác ABC, ta có: $\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC}$

Lại có $\frac{HB}{AB} = \frac{BA}{BC}$

Suy ra $\frac{NI}{NA} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow AN^2 = NI.NC$

Bài 14. Từ điểm O trong tam giác ABC, kẻ OD, OE, OF lần lượt vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng $AE^2 + BF^2 + CD^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$.

Giải



Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông AEO ta có: $AE^2 + EO^2 = AO^2$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông AFO ta có: $AF^2 + FO^2 = AO^2$.

Từ đó ta được $AE^2 + EO^2 = AF^2 + FO^2$. (1)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông BFO ta có: $BF^2 + FO^2 = OB^2$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông BDO ta có: $BD^2 + DO^2 = OB^2$.

Từ đó ta được $BF^2 + FO^2 = BD^2 + DO^2 = OB^2$. (2)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông CDO ta có: $CD^2 + DO^2 = CO^2$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông CEO ta có: $CE^2 + EO^2 = CO^2$.

Từ đó ta được $CD^2 + DO^2 = CE^2 + EO^2 = CO^2$. (3)

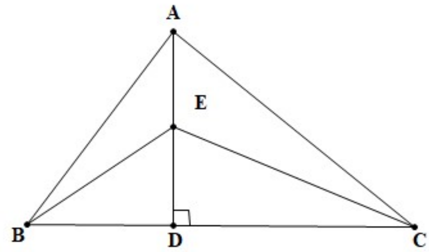
Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

$AE^2 + OE^2 + BF^2 + OF^2 + CD^2 + OD^2 = AF^2 + OF^2 + BD^2 + OD^2 + CE^2 + OE^2$

$\Leftrightarrow AE^2 + BF^2 + CD^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$.

Bài 15. Cho ΔABC vẽ $AD \perp BC$, E là điểm tùy ý thuộc đoạn AD. Chứng minh rằng $AB^2 - AC^2 = EB^2 - EC^2$.

Giải



Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABD ta có: $AB^2 - BD^2 = AD^2$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ACD ta có: $AC^2 - CD^2 = AD^2$.

Từ đó ta được $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2 \Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$. (1)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông BED ta có: $EB^2 - BD^2 = ED^2$.

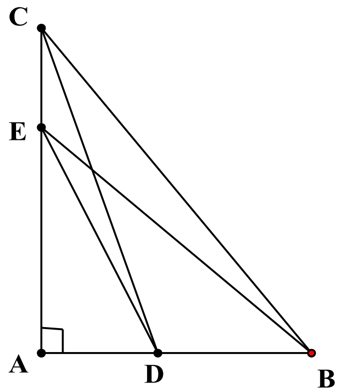
Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông CED ta có: $EC^2 - CD^2 = ED^2$.

Từ đó ta được $EB^2 - BD^2 = EC^2 - CD^2 \Leftrightarrow EB^2 - EC^2 = BD^2 - CD^2$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $AB^2 - AC^2 = EB^2 - EC^2$.

Bài 16. Cho ΔABC, $\widehat{A} = 90°$; D và E là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng $CD^2 + BE^2 = BC^2 + DE^2$.

Giải



Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ADE ta được: $AD^2 + AE^2 = ED^2$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC ta được: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Từ đó ta có $BC^2 + ED^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2$. (1)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ADC ta được: $AD^2 + AC^2 = CD^2$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABE ta được: $AB^2 + AE^2 = BE^2$.

Từ đó ta có $CD^2 + BE^2 = AD^2 + AC^2 + AB^2 + AE^2$. (2)

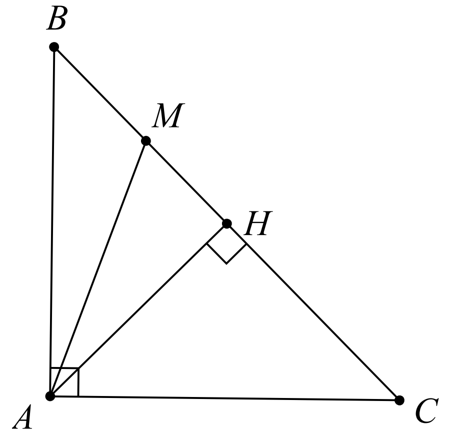
Từ (1) và (2) ta chứng minh được $CD^2 + BE^2 = BC^2 + DE^2$.

Bài 17. Cho tam giác ABC vuông cân ở A. M là điểm tùy ý nằm giữa B và C. Vẽ đường cao AH của tam giác ABC.

a) Chứng minh $AH = \frac{BC}{2}$

b) Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Giải



a) Xét tam giác ABC vuông cân tại A có AH là đường cao

$\Rightarrow AH$ là đường trung tuyến của tam giác ABC

$\Rightarrow H$ là trung điểm của đoạn BC

$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC$ (trong tam giác vuông trung tuyến ứng với cạnh huyền thì bằng một nửa cạnh huyền)

b) Đặt AB = AC = a

$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$ (theo Pytago)

Mà H là trung điểm của đoạn BC $\Rightarrow AH = BH = HC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Đặt $MH = x \;\; 0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $MB^2 = \left(BH - MH\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - x\right)^2$

$MC^2 = \left(MH + HC\right)^2 = \left(x + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

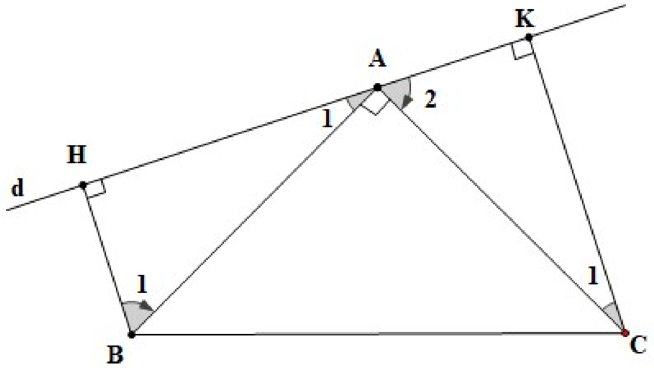
Suy ra $MB^2 + MC^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - x\right)^2 + \left(x + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2.\left(\frac{a^2}{2} + x^2\right)$

$\Rightarrow MB^2 + MC^2 = 2.\left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x^2\right] = 2.\left(AH^2 + MH^2\right) = AM^2$ (áp dụng Pytago cho tam giác AHM vuông tại H)

Vậy $MB^2 + MC^2 = 2AM^2$ (đpcm)

Bài 18. Cho ΔABC vuông cân tại A. Qua A kẻ đường thẳng d tùy ý. Từ B và C kẻ $BH \perp d$, $CK \perp d$. Chứng minh rằng $BH^2 + CK^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

Giải



Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC ta được: $AB^2 + AC^2 = BC^2$. (1)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABH ta được: $AH^2 + BH^2 = AB^2$. (2)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ACK ta được: $AK^2 + CK^2 = AC^2$. (3)

Mặt khác, Xét ΔAHK và ΔCKA có:

$AB = AC$;

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (Vì cùng phụ với $\widehat{A_2}$);

$\widehat{B_1} = \widehat{A_2}$ (Vì cùng phụ với $\widehat{A_1}$);

$\Delta AHB = \Delta CKA\left(g-c-g\right)$ nên $AH = CK; AK = BH$ (t/ứng) (4)

Từ (1), (2), (3), (4) ta được

$$BH^2 + CK^2 + CK^2 + BH^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2\left(BH^2 + CK^2\right) = BC^2 \Leftrightarrow BH^2 + CK^2 = \frac{BC^2}{2}.$$

Vậy $BH^2 + CH^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

Bài 19. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 90^\circ$, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC.

a) Chứng minh : $AH = DE$.

b) Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của HB, HC. Chứng minh $DIKE$ là hình thang vuông.

c) Tính độ dài đường trung bình của hình thang $DIKE$ nếu $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm.

Giải

a) Xét tứ giác $ADHE$ có :

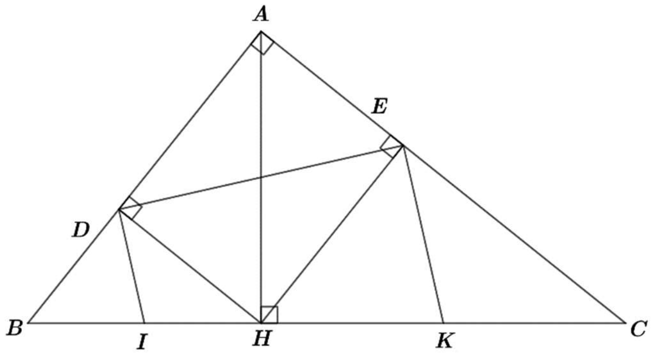
$\widehat{DAE} = \widehat{ADH} = \widehat{HEA} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

Nên $AH = DE$ (tính chất)

b) Xét ΔBDH vuông tại D có DI là trung tuyến.

$\Rightarrow DI = IB = IH = \dfrac{BH}{2}$



$\Rightarrow \Delta IDH$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IHD}$

Xét ΔAHD và ΔEDH có :

DH cạnh chung

$AD = HE$ (do $ADHE$ là hình chữ nhật)

$AH = DE$ (cmt)

Suy ra : $\Delta AHD = \Delta EDH$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{EDH}$ (hai góc tương ứng)

Ta có : $\widehat{IHD} + \widehat{AHD} = 90^\circ$

Mà : $\widehat{IDH} = \widehat{IHD}$ và $\widehat{AHD} = \widehat{EDH}$ (chứng minh trên)

Nên $\widehat{IDH} + \widehat{EDH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IDE} = 90^\circ$

$\Rightarrow ID \perp DE$

Tương tự ta có : $EK \perp DE$

Suy ra ID // EK (từ vuông góc đến song song)

Suy ra tứ giác $DIKE$ là hình thang (định nghĩa)

Mà $\widehat{IDE} = 90^\circ$

Suy ra hình thang $DIKE$ là hình thang vuông.

c) Xét tam giác ABC vuông tại A. Theo định lý Pytago ta có :

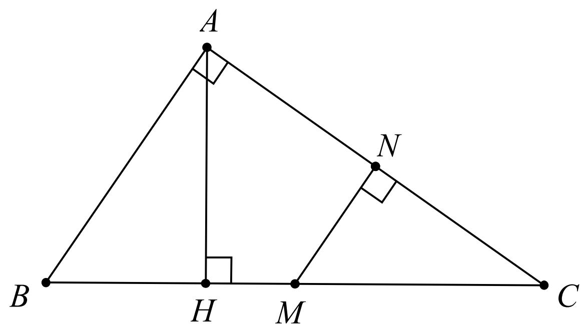
$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10$ (cm)

Gọi x là độ dài đường trung bình của hình thang $DIKE$, ta có :

$x = \dfrac{1}{2}\left(DI + EK\right) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{BH + HC}{2} = \dfrac{1}{4}BC = \dfrac{1}{4}.10 = 2,5$ (cm)

BÀI 36. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC VUÔNG

VD 1.1. Hãy chỉ ra các cặp tam giác đồng dạng. Viết các cặp tam giác đồng dạng theo thứ tự các đỉnh tương ứng và giải thích vì sao chúng đồng dạng.

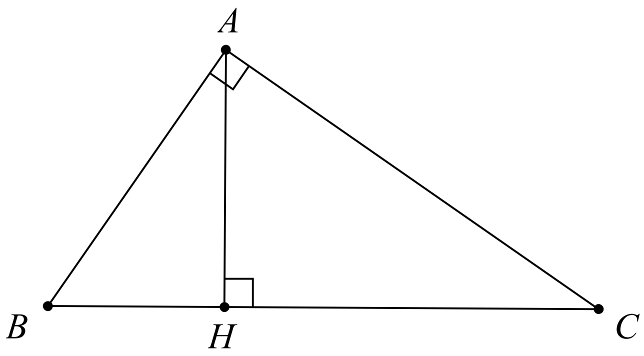


Giải

Trên hình có 4 tam giác vuông đồng dạng với nhau từng đôi một, vì chúng có các cặp góc nhọn tương ứng bằng nhau. Đó là: $\Delta ABC, \Delta NMC, \Delta HBA, \Delta HAC$.

VD 1.2. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Chứng minh rằng: $AH^2 = BH.CH$.

Giải



Xét tam giác vuông HBA và HAC có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BAH} + \widehat{HAC} = 90^0 \\ \widehat{HCA} + \widehat{HAC} = 90^0\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{HCA}$$

Suy ra $\Delta HBA \backsim \Delta HAC$

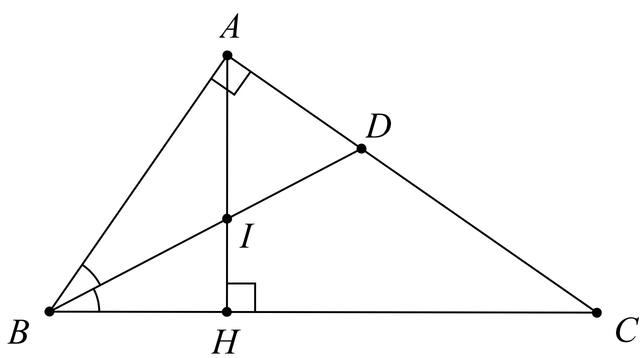
Từ đó: $\dfrac{BH}{AH} = \dfrac{AH}{CH} \Rightarrow AH^2 = BH.CH$

VD 1.3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác của góc B cắt AC tại D. Đường cao AH cắt BD tại I. Chứng minh rằng:

a) $AB.BI = BH.\text{DB}$.

b) Tam giác AID cân.

Giải



a) BD là đừng phân giác nên $\widehat{ABD}=\widehat{HBI}$ mà $\widehat{DAB}=\widehat{IHB}=90^0$

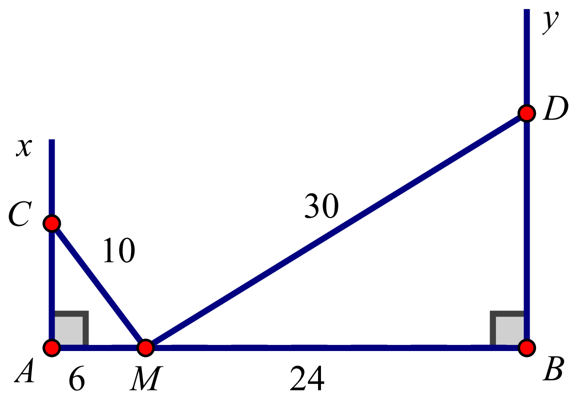
Suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta HBI(g-g)$ $\Rightarrow \dfrac{AB}{HB}=\dfrac{DB}{IB} \Rightarrow AB.BI=BH.\text{DB}$

b) Do $\Delta ABD \backsim \Delta HBI(g-g)$ nên $\widehat{BDA}=\widehat{BIH}$ mà $\widehat{BIH}=\widehat{DIA}$ (đối đỉnh)

Suy ra : $\widehat{BDA}=\widehat{DIA}$ Do đó: Tam giác AID cân tại A.

VD 2.1. Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB, $MA=6cm, MB=24cm.$ Vẽ về một phía của AB các tia Ax, By vuông góc với AB. Lấy điểm C thuộc tia Ax, điểm D thuộc tia By sao cho $MC=10\,\text{cm}, MD=30\,\text{cm}$. Chứng minh rằng: $\angle CMD=90^0$.

Giải



Giải

Ta tính được BD = 18 cm.

Xét tam giác AMC và BDM: $\left.\begin{matrix}\hat{A}=\hat{B}=90^0 \\ \dfrac{CM}{MD}=\dfrac{AM}{BD}\left(vì\ \dfrac{10}{30}=\dfrac{6}{18}\right)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta BDM$ (ch.cgv)

Suy ra: $\widehat{AMC}=\widehat{BDM}$ mà $\widehat{BDM}+\widehat{BMD}=90^0$

Nên $\widehat{BMD}+\widehat{AMC}=90^0$ và $\widehat{BMD}+\widehat{AMC}+\widehat{CMD}=180^0$

Vậy $\widehat{CMD}=90^0$.

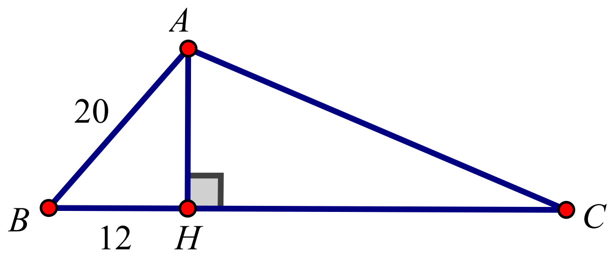
VD 2.2. Tam giác ABH vuông tại H có $AB=20cm, BH=12cm.$ Trên tia đối của tia HB lấy điểm C sao cho $AC=\dfrac{5}{3}AH.$

a) Chứng minh rằng các tam giác ABH và CAH đồng dạng.

b) Tính $\widehat{BAC}.$

Giải

a) Ta có: $\dfrac{AB}{BH} = \dfrac{5}{3} = \dfrac{AC}{AH}$



Có: $\left.\begin{matrix} \widehat{AHB} = \widehat{CHA} = 90^0 \\ \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BH}{AH}(cmt) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \backsim \Delta CAH$

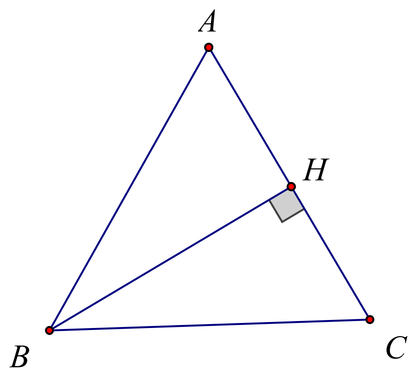
(ch.cgv)

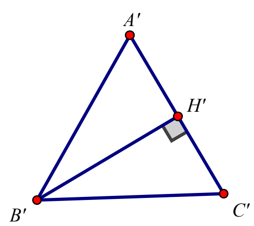
b) Từ câu a suy ra: $\widehat{CAH} = \widehat{ABH}$ mà $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^0$

Nên $\widehat{BAH} + \widehat{CAH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$.

VD 2.3. Cho hai tam giác cân ABC và A'B'C' (AB = AC, A'B' = A'C'), các đường cao BH và B'H'. Cho biết $\dfrac{BH}{B'H'} = \dfrac{BC}{B'C'}$. Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$.

Giải





Do $\Delta BHC \backsim \Delta B'H'C'$ (ch.cgv)

nên: $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Do đó: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

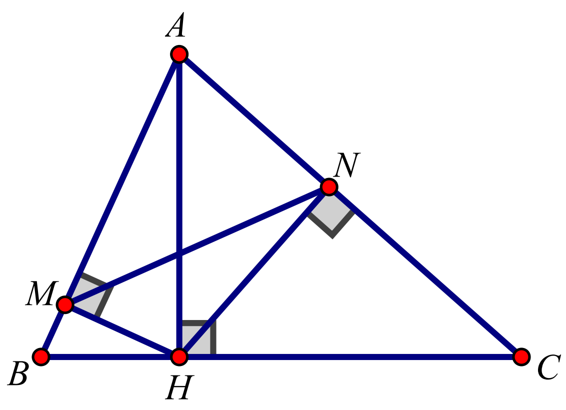
Bài 13. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, biết $AB = 15cm$, $AC = 13\,cm$ và đường cao $AH = 12cm$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H xuống AB và AC.

a) Chứng minh rằng: $\Delta AHN \backsim \Delta ACH$

b) Tính độ dài BC

c) Chứng minh: $AM.AB = AN.AC$, từ đó suy ra $\Delta AM \backsim \Delta ACB$.

Giải



a) Ta có: $\left.\begin{matrix} \widehat{A} - chung \\ \widehat{ANH} = \widehat{AHC} = 90^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta AHN \backsim \Delta ACH(g-g)$

b) Xét tam giác vuông ABH có: $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9\left(cm\right)$

Xét tam giác vuông ACH có: $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\left(cm\right)$

Khi đó: $BC = BH + CH = 9 + 5 = 14\left(cm\right)$

c) Do $\Delta AHN \backsim \Delta ACH \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AN}{AH} \Rightarrow AH^2 = AC.AN\left(1\right)$

Xét tam giác AMH và ABH có:

$$\left.\begin{matrix} \widehat{A} - chung \\ \widehat{AMH} = \widehat{AHB} = 90^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta AMH \backsim \Delta AHB\left(g - g\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AH} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH^2 = AM.AB\left(2\right)$

Từ (1),(2) ta có : $AM.AB = AN.AC$

Suy ra: $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$ và $\widehat{MAN} - chung$

Nên $\Delta AMN \backsim \Delta ACB(c - g - c)$

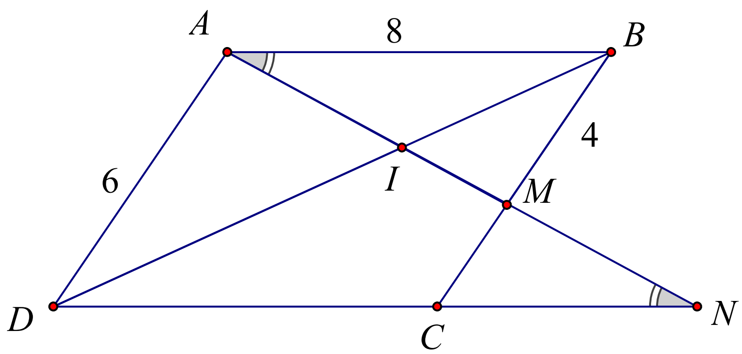
Bài 14. Cho hình bình hành ABCD có $AB = 8cm, AD = 6cm$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 4cm.$ Đường thẳng AM cắt đường chéo BD tại I, cắt đường DC tại N.

a) Tính tỉ số $\dfrac{IB}{ID}$.

b) Chứng minh: $\Delta MAB \backsim \Delta AND$.

c) Tính độ dài DN và CN.

Giải



a) Ta có: $BM \,//\, AD \Rightarrow \dfrac{BM}{AD} = \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{IM}{IA}$ (Theo định lý Ta Let mở rộng)

Mà $\dfrac{BM}{AD} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{2}{3}$

b) Ta có: $\left.\begin{matrix} \widehat{MAB} = \widehat{AND}\left(slt\right) \\ \widehat{ABM} = \widehat{NDA}\left(hbh\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta AND\left(g - g\right)$

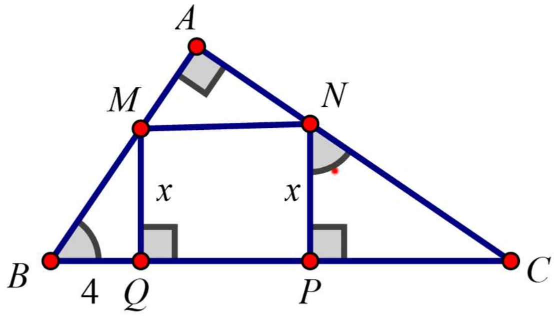
c) Do $\Delta MAB \backsim \Delta AND$ nên $\frac{MB}{AD} = \frac{AB}{ND} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{8}{ND} \Rightarrow ND = \frac{6.8}{4} = 12(cm)$

Mà $AB = DC = 8(cm)(hbh)$

Nên $CN = DN - DC = 12 - 8 = 4(cm)$

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A, Hình vuông MNPQ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC. Biết $BQ = 4cm, CP = 9cm.$ Tính cạnh của hình vuông.

Giải

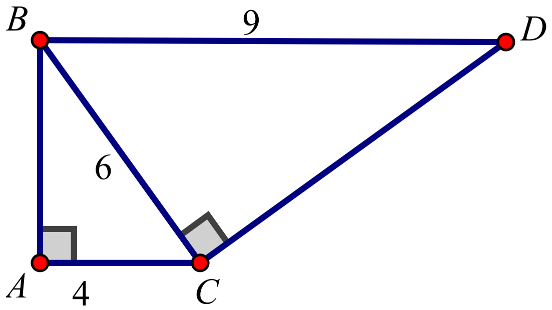


Đặt $MP = NQ = x$. Từ $\Delta BMQ \backsim \Delta NCP$ ta tính được x = 6 cm.

Cạnh của hình vuông bằng 6 cm.

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = 4cm, BC = 6cm.$ Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác BCD vuông tại C có BD = 9cm. Chứng minh rằng $BD // AC$.

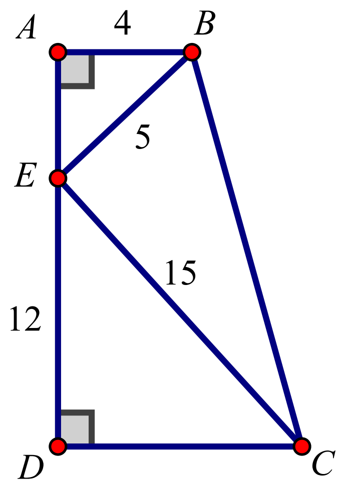
Giải



$\Delta ACB \backsim \Delta CBD$ (ch.cgv) nên: $\widehat{ACB} = \widehat{CBD} \Rightarrow AC // BD$.

Bài 17. Cho hình thang ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$, điểm E thuộc cạnh bên AD. Tính $\widehat{BEC}$ biết rằng $AB = 4cm, BE = 5cm, DE = 12cm, CE = 15cm.$

Giải



$\Delta ABE \backsim \Delta DEC$ (ch.cgv) nên: $\widehat{AEB} = \widehat{DCE}$.

Ta lại có: $\widehat{DCE} + \widehat{DEC} = 90^0$ nên: $\widehat{AEB} + \widehat{DEC} = 90^0$

Suy ra: $\widehat{BEC} = 90^0$.

Bài 18. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Chứng minh rằng:

a) Chứng minh ΔABH đồng dạng với ΔCBA . Từ đó suy ra:

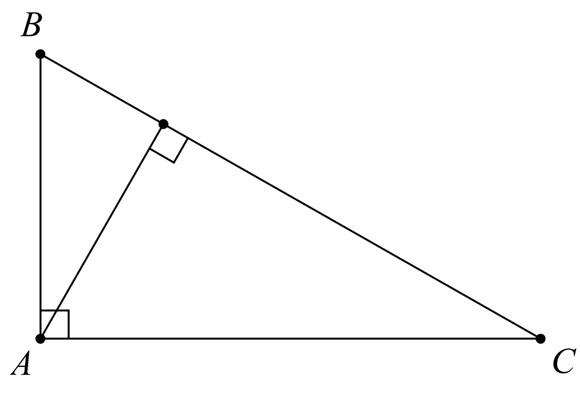
i) $AB.AC = AH.BC$

ii) $AB^2 = BH.BC$

iii) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

b) $AH^2 = HB.HC$

Giải



a) Xét ΔABH và ΔCBA, có

$\widehat{BAC} = \widehat{AHB} = 90°$

$\widehat{ABC}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABH \backsim \Delta CBA$(g−g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AC = AH.BC$ (1)

Vì $\Delta ABH \backsim \Delta CBA$ (cmt) nên

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AB^2 = BC.AH$ (2)

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{AC^2 + AB^2}{AB^2.AC^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{BC^2}{AB^2.AC^2}$ (Do ΔABC vuông ở A nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$)

$\Leftrightarrow AB^2.AC^2 = AH^2.BC^2$

$\Rightarrow AB.AC = AH.BC$

Vậy ta có (đpcm) (3)

b)

Ta có:

$\left.\begin{matrix}\Delta ABH \backsim \Delta CBA \\ \Delta CBA \backsim \Delta CAH\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \backsim \Delta CAH$

$\Rightarrow \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{BH}{AH}$

$\Rightarrow AH^2 = CH.BH$ (đpcm)

Bài 19. Cho ΔABC có ba góc nhọn, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) ΔAHF đồng dạng với ΔABD

b) ΔACF đồng dạng với ΔABE

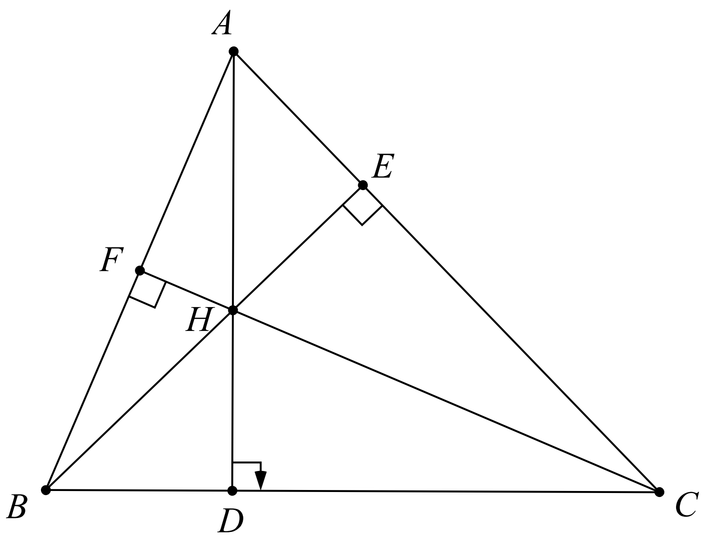
c) $AF.AB = AE.AC$

d) ΔAEF đồng dạng với ΔABC

e) ΔADB đồng dạng với ΔCDH

f) $BH.BE + CH.CF = BC^2$.

Giải



a) ΔAHF đồng dạng ΔABD do $\begin{cases}\widehat{BAD} - chung \\ \widehat{AFH} = \widehat{ADB} = (90^0)\end{cases}$

b) ΔACF đồng dạng ΔABE do $\begin{cases}\widehat{BAC} - chung \\ \widehat{BEA} = \widehat{CFA} = (90^0)\end{cases}$

c) Vì ΔACF đồng dạng ΔABE (cmt) nên $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AF}{AE} \Rightarrow AC.AE = AB.AF$ (đpcm)

d) Ta có $AC.AE = AB.AF$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC} \\ \widehat{BAC}\ chung \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC \text{ (c-g-c)}$$

e) Ta có: $\widehat{BAD}+\widehat{ABD}=90^0$ (do ΔABD vuông tại D)

$\widehat{DCH}+\widehat{ABD}=90^0$ (do ΔBCF vuông tại F)

$\Rightarrow \widehat{BAD}=\widehat{DCH}$

Xét ΔADB và ΔCDH có :

$\widehat{BAD}=\widehat{HDC}$

$\widehat{ADB}=\widehat{HDC}(=90^0)$

$\Rightarrow \Delta ADB$ đồng dạng ΔCDH (đpcm)

f) Xét ΔCHD và ΔCBF , ta có :

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{BCF} chung \\ \widehat{CDH}=\widehat{CFB}(=90^0) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CHD = \Delta CBF \text{ (g-g)}$$

$\Rightarrow \dfrac{CH}{CB}=\dfrac{CD}{CF}$ (t/c hai tam giác đồng dạng)

$\Rightarrow CH.CF = CB.CD$ (1)

*Xét ΔBHD và ΔBEC , có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{EBC} chung \\ \widehat{BDH}=\widehat{BEC}(=90^0) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BDH \text{ đồng dạng } \Delta BEC \text{ (g-g)}$$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BE}=\dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BD.BC = BE.BH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CH.CF + BE.BH = CB.CD + BC.BD$

$\Rightarrow CH.CF + BE.BH = BC.\left(CD+BD\right)$

$\Rightarrow CH.CF + BE.BH = BC^2$ (đpcm)

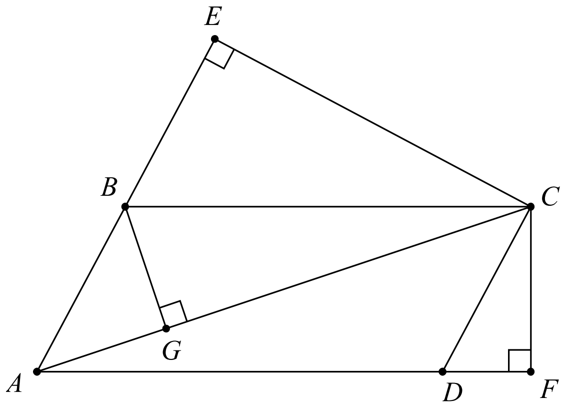
Bài 20. Cho hình bình hành ABCD với đường chéo $AC > BD$. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD. Gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC. Chứng minh rằng:

a) $\Delta BCG \backsim \Delta CAF$

b) $AB.AE + AD.AF = AC^2$

Giải

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành (gt) nên $BC\ //\ AD$ (t/c hbh)



$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{CAD}$ (hai góc so le trong)

Xét ΔBCG và ΔCAF, có:

$\widehat{BCA} = \widehat{CAD}$

$\widehat{BGC} = \widehat{CFA} (= 90^0)$

$\Rightarrow \Delta BCG \backsim \Delta CAF$ (g.g)

b) Xét ΔABG và ΔACE, có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{BAC} chung \\ \widehat{AEC} = \widehat{AGB} (= 90^0) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABG \backsim \Delta ACE \text{ (g-g)}$$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AG}{AE}$ (t/ c)

$\Rightarrow AB.AE = AC.AG$ (1)

Ta có: $\Delta BCG \backsim \Delta CAF$ (cmt)

nên $\dfrac{CG}{AF} = \dfrac{BC}{CA} \Rightarrow CG.CA = AF.BC$ Vì $BC = AD$ (t/c hình bình hành) nên

$CG.CA = AF.AD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB.AE + AF.AD = AC.AG + AC.CG$

$\Rightarrow AB.AE + AF.AD = AC.(AG + CG) \Rightarrow AB.AE + AF.AD = AC^2$ (đpcm)

Bài 21. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AD. Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Từ B kẻ tia phân giác BE của góc $\widehat{ABC}$ cắt AC tại E và cắt AD tại F.

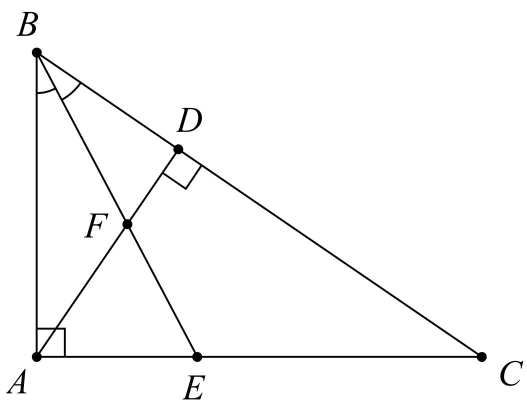
a) Tính độ dài đoạn thẳng BC, AD.

b) Chứng minh $AD^2 = BD.DC$.

c) Chứng minh $\dfrac{DF}{FA} = \dfrac{AE}{EC}$.

Giải

a) Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC, ta có:



$BC^2 = AB^2 + AC^2$

thay số: $BC^2 = 6^2 + 8^2$

$BC^2 = 100$

$BC = 10cm$

Ta chứng minh được

$\Delta ABD \backsim \Delta CBA$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow AD = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{6.8}{10} = 4,8cm$

b) Xét ΔBDF và ΔBAE, có:

$\widehat{ABE} = \widehat{EBC}$ (t/c phân giác)

$\widehat{BAE} = BDF = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta BDF \backsim \Delta BAE$ (g– g) (1)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BF}{BE} = \dfrac{DF}{AE}$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{BEA}$ vì $\widehat{BFA}$ là góc ngoài của ΔBFD nên $\widehat{BFA} = \widehat{BDF} + \widehat{FBD}$

Vì $\widehat{BEC}$ là góc ngoài của ΔBAE nên $\widehat{BEC} = \widehat{EBA} + \widehat{BAE}$

Vì $\widehat{BFD} = \widehat{BEA}$(cmt); $\widehat{BDF} = \widehat{BEA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BFA} = \widehat{BEC}$

Xét ΔBAF và ΔBCE, có:

$\widehat{ABE} = \widehat{CBE}$ (t/c phân giác)

$\widehat{BFA} = \widehat{BEC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BAF \backsim \Delta BCE$(g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AF}{CE} = \dfrac{BF}{BE}$(3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{DF}{AE} = \dfrac{AF}{CE} \Rightarrow \dfrac{DF}{AF} = \dfrac{AE}{CE}$ (đpcm)

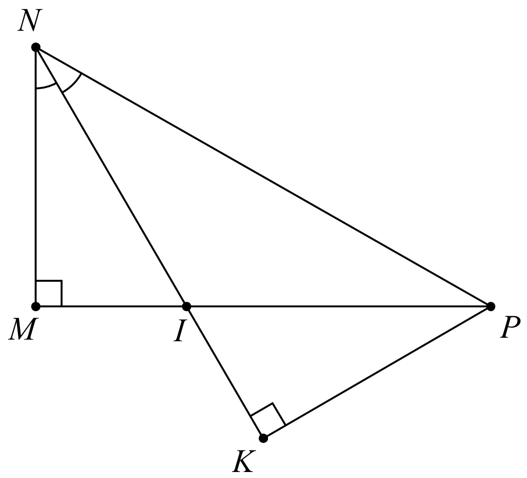
Bài 22. Cho tam giác MNP vuông tại M $(MP > MN)$. Kẻ tia phân giác của góc N cắt PM tại I. Từ P hạ đoạn thẳng PK vuông góc với tia phân giác NI (K thuộc NI).

a) Chứng minh: ΔMNI đồng dạng với ΔKPI

b) Chứng minh $\widehat{INP} = \widehat{IPK}$.

c) Cho MN = 6cm, MP = 8cm. Tính IM.

Giải



a) Xét ΔMNI và ΔKPI, có: $\widehat{NMI} = \widehat{IKP} = 90^\circ$

$\widehat{NIM} = \widehat{KIP}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta MNI \backsim \Delta KPI$ (g-g) (1)

b) Từ (1) $\Rightarrow \widehat{MNI} = \widehat{IPK}$ (2 góc tương ứng)

mà $\widehat{MNI} = \widehat{PNI}$ (t/c phân giác)

$\Rightarrow \widehat{IPK} = \widehat{PNI}$ (đpcm)

c) Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông MNP ta có: $NP^2 = MN^2 + MP^2$

thay số: $NP^2 = 6^2 + 8^2$

$NP^2 = 100$

$\Rightarrow NP = 10cm$

Vì NI là phân giác của $\widehat{MNP}$ nên ta có:

$\frac{MI}{MN}=\frac{IP}{NP}=\frac{MI+IP}{MN+NP}=\frac{MP}{MN+NP}=\frac{8}{6+10}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

$MI=MN.\frac{1}{2}=6.\frac{1}{2}=3cm$

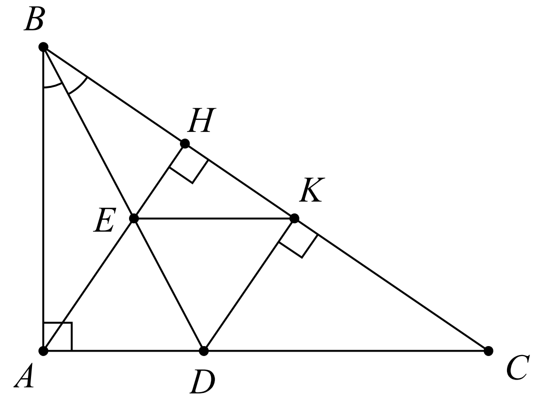
Bài 23. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, phân giác BD cắt AH tại E.

a) Chứng minh tam giác ADE cân

b) Chứng minh $AE.BD=BE.DC$

c) Từ D kẻ $DK\perp BC$ tại K. Tứ giác ADKE là hình gì?

Giải



a) Ta chứng minh được:

$\Delta BEH \backsim \Delta BDA$(g – g)

$\Rightarrow \widehat{BEH}=\widehat{ADE}$ (2 góc tương ứng)

mà $\widehat{BEH}=\widehat{ADE}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta AED$ là tam giác cân.

b) Tạ chứng minh được:

$\Delta AEB \backsim \Delta CDB (1)$ do $\begin{cases}\widehat{ABD}=\widehat{DBC}\\ \widehat{AEB}=\widehat{BDC}\end{cases}$

$\Rightarrow \frac{AE}{CD}=\frac{BE}{BD}$

$\Rightarrow AE.BD=CD.BE$ (đpcm)

c) Ta có: $\left.\begin{matrix}DK\perp BC\\ AH\perp BC\end{matrix}\right\}\Rightarrow AH\,//\,DK (4)$

từ (1) $\Rightarrow \frac{AE}{CD}=\frac{AB}{BC} (2)$

ta chứng minh được $\Delta CDK \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{DK}{AB}=\frac{CD}{BC}\Rightarrow \frac{DK}{CD}=\frac{AB}{BC} (3)$

từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{AE}{CD}=\frac{DK}{CD}\Rightarrow AE=DK (5)$

từ (4) và (5) $\Rightarrow AEKD$ là hình bình hành.

Bài 24. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I và K lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC.

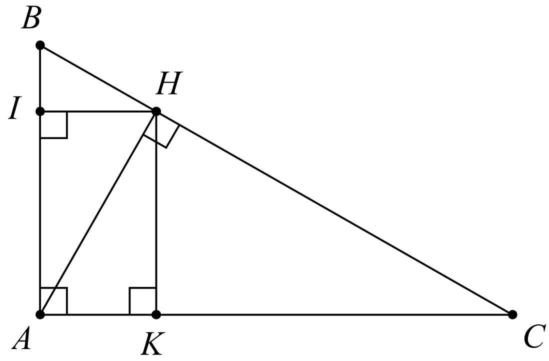
a) Tứ giác AIHK là hình gì?

b) Chứng minh ΔAIK đồng dạng với ΔACB.

c) Tính S_{AIK} biết BC = 10cm, AH = 4cm.

Giải

a) Ta có:



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{HIA}=90^\circ\\ \widehat{IAK}=90^\circ\\ \widehat{HKA}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow AIHK \text{ là hình bình hành}$$

b) Ta chứng minh được

$\Delta AIH \backsim \Delta AHB \Rightarrow \dfrac{AI}{AH}=\dfrac{AH}{AB}\Rightarrow AI.AB=AH^2$ (1)

tương tự:

$\Delta AKH \backsim \Delta AHC \Rightarrow \dfrac{AK}{AH}=\dfrac{AH}{AC}\Rightarrow AK.AC=AH^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AI.AB=AK.AC\Rightarrow \dfrac{AI}{AC}=\dfrac{AK}{AB}$

Xét ΔAIK và ΔACB, có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{CAB}\ chung\\ \dfrac{AI}{AC}=\dfrac{AK}{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta AIK\backsim\Delta ACB(c-g-c)$$

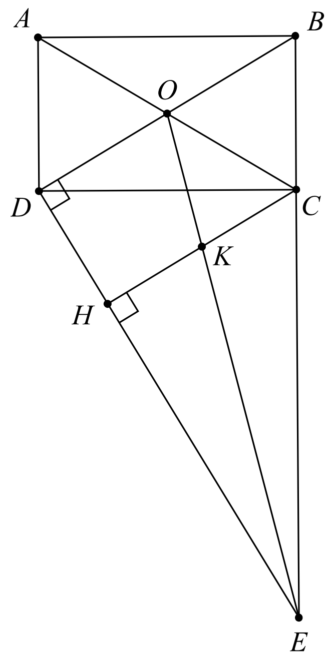
c) Ta có:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}.4.10=20cm^2$$

$$\frac{S_{\Delta AIK}}{S_{\Delta ACB}}=\left(\frac{IK}{BC}\right)^2=\left(\frac{AH}{BC}\right)^2=\left(\frac{4}{10}\right)^2=\frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AIK}=\frac{4}{25}.20=\frac{16}{5}(cm^2)$$

Bài 25. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 8cm, AD = 6cm, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Qua D kẻ đường thẳng d $\perp$ BD, d cắt BC tại E.



a) Chứng minh: $\Delta BDE \backsim \Delta DCE$

b) Kẻ $CH\perp DE$ tại H. Chứng minh: $DC^2=CH.DB$

c) Gọi K là giao điểm của OE và CH. Chứng minh K là trung điểm của CH và tính $\dfrac{S_{\Delta EHC}}{S_{\Delta EDB}}$.

Giải

a) b) HS tự chứng minh

c) Do $BD \parallel CH$ (cùng vuông góc với DE)

Mà $O\in BD;\ K\in CH$

$$\Rightarrow \frac{HK}{OD}=\frac{CK}{OB}\left(=\frac{EK}{EO}\right)\Rightarrow KH=CK$$

Ta có $\Delta CHE \backsim \Delta BDE$ (vì CH // BD) $\Rightarrow \frac{S_{\Delta EHC}}{S_{\Delta EDB}} = \left(\frac{CH}{BD}\right)^2 = \frac{256}{625}$

Bài 26. Cho ΔABC vuông tại A có AC = 6cm, AB = 8cm. D là trung điểm của cạnh BC. Kẻ tia Dx vuông góc với BC tại D cắt cạnh AB tại H, cắt cạnh AC kéo dài.

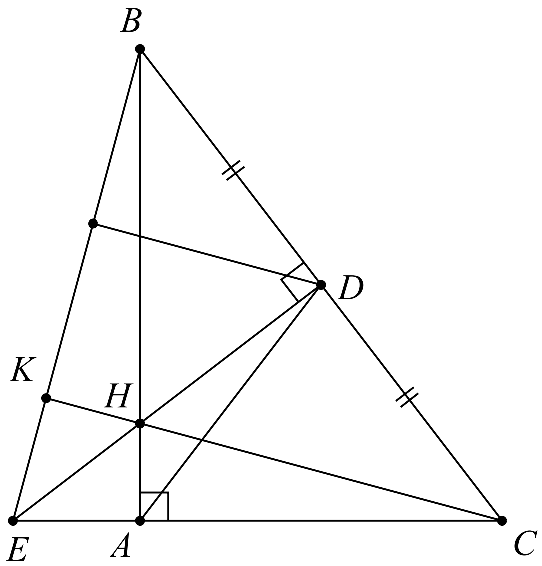
a) Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta DEC$

b) Tính chu vi ΔABC và chu vi ΔDEC

c) Chứng minh $BH.BA = BD.BC$

d) Gọi giao điểm của CH và BE là K. Tính diện tích ΔBDK.

Giải



a) Ta chứng minh được $\Delta ABC \backsim \Delta DEC$ (g.g)

b) Áp dụng Pytago cho ΔABC **vuông tại A, ta tính được BC = 10cm**

$\Rightarrow C_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = 24$ **cm**

Vì $\Delta ABC \backsim \Delta DEC$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{C_{\Delta ABC}}{C_{\Delta DEC}} = \frac{AD}{DC}$$

Ta có $DC = \frac{1}{2}BC = 5\,\text{cm}$

$$\Rightarrow \frac{24}{C_{\Delta DEC}} = \frac{6}{5} \Rightarrow C_{\Delta DEC} = 20\,\text{cm}$$

c) Ta chứng minh được $\Delta BDH \backsim \Delta BAC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BD}{BA}$ (các cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow BH.BA = BD.BC$

d) Xét ΔHBC có HD là đường cao đồng thời HD là đường trung tuyến

$\Rightarrow \Delta HBC$ cân tại H $\Rightarrow \widehat{HBC} = \widehat{HCB}$ (tính chất)

Hay $\widehat{ABC} = \widehat{KCB}$

Chứng minh được H là trực tâm của $\Delta BEC \Rightarrow CH \perp BE$ tại K

Chứng minh được $\Delta KBC = \Delta ACB$ (ch.gn)

$\Rightarrow \begin{cases} KB = AC = 6cm \\ KC = AB = 8cm \end{cases}$ (các cặp cạnh tương ứng)

Gọi F là trung điểm của BK ta có FB = FK

Xét ΔKBC có FD là đường trung bình của ΔKBC

$\Rightarrow FD \parallel KC$ và $FD = \frac{1}{2}KC = 4$ cm

Ta có $FD \parallel KC$ mà $KC \perp BK$ $\Rightarrow FD \perp BK$

$\Rightarrow S_{\Delta BKD} = \frac{FD.BK}{2} = \frac{4.6}{2} = 12\,cm^2$

Bài 27. Cho hình bình hành ABCD $(AB < AD)$, $\widehat{A}$ tù. Từ C kẻ CH vuông góc với AB $(H \in AB)$, BE vuông góc với AC $(E \in AC)$.

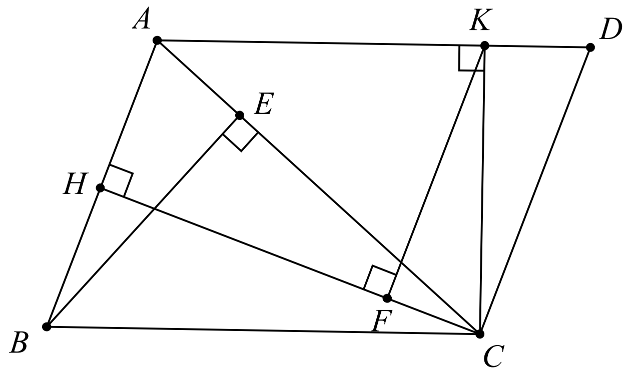
a) Chứng minh $\Delta ABE \backsim \Delta ACH$ và $AH.AB = AC.AE$.

b) Chứng minh $\widehat{AHE} = \widehat{ACB}$

c) Kẻ CK vuông góc với AD. Chứng minh $CH.CD = CK.CB$.

d) Cho $\widehat{BAD} = 120°$. Tính $\frac{S_{\Delta KCH}}{S_{\Delta ABC}}$.

Giải



a) Chứng minh được $\Delta ABE \backsim \Delta ACH$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AH}$ (cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AB.AH = AC.AE$

b) Vì $AB.AH = AC.AE$ (cmt) $\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB}$

Từ đó cm được $\Delta AHE \backsim \Delta ACB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ACB}$ (cặp góc tương ứng)

c) Ta cm được $\Delta BHC \backsim \Delta DKC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{CH}{CK} = \frac{CB}{CD}$ (Cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow CH.CD = CK.CB$

d) Kẻ KF vuông góc với HC; F thuộc HC

Ta có $S_{\Delta KCH} = \frac{KF.HC}{2}$ và $S_{\Delta ABC} = \frac{AB.HC}{2}$

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta KCH}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{KF.HC}{2} : \frac{AB.HC}{2} = \frac{KF}{AB}$

Đặt AB = 2x. Vì ABCD là hình bình hành

$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 180° \Rightarrow \widehat{D} = 60°$

Xét tam giác CDK vuông tại K có $\widehat{D}=60^\circ \Rightarrow \widehat{C}=30^\circ$

$\Rightarrow KD=\dfrac{1}{2}CD=x$

Xét tam giác CDK vuông tại K, theo Pytago ta tính được $KC=x\sqrt{3}$

Ta có $AB \,//\, CD$ mà $CH\perp AB \Rightarrow CD\perp CH$. Lại có $KF\perp CH$

Xét tam giác KFC vuông tại F có $\widehat{FKC}=30^\circ \Rightarrow FC=\dfrac{1}{2}KC=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

Theo Pytago ta có $KF^2+FC^2=CK^2 \Rightarrow KF^2+\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(x\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow KF=\dfrac{3x}{2}$

Do đó $\dfrac{S_{\Delta KCH}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{\frac{3x}{2}}{2x}=\dfrac{3}{4}$

Bài 28. Cho ΔABC vuông tại A $(AB<AC)$, đường cao AH. Từ H kẻ HE vuông góc với AB $(E\in AB)$, kẻ HF vuông góc với AC $(F\in AC)$.

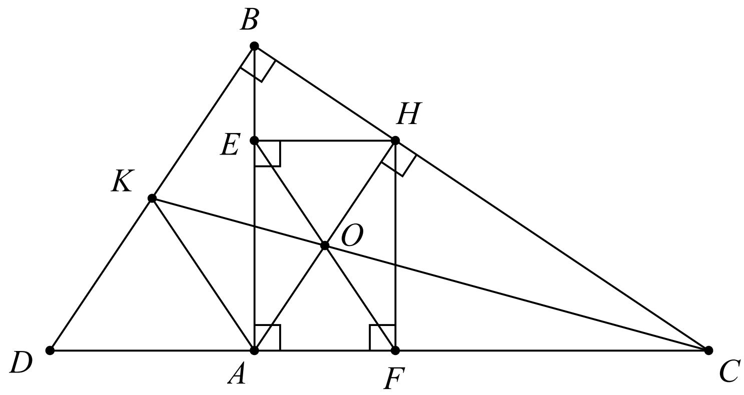
a) Chứng minh $\Delta AHB \backsim \Delta CAB$.

b) Chứng minh $AC^2=CH.BC$.

c) Biết BH = 4cm, CH = 5cm. Tính chu vi ΔABC.

d) Qua A kẻ $Ax \,//\, EF$, từ B kẻ By vuông góc với BC. Tia Ax cắt By tại K, gọi O là giao điểm của EF và AH. Chứng minh ba điểm C, O, K thẳng hàng.

Giải



Câu a và b học sinh tự chứng minh

c) Ta có: BC = BH + HC = 9cm

Lại có $AC^2=CH.BC$ (cmt) $\Rightarrow AC=3\sqrt{5}$ cm

Vì $\Delta AHB \backsim \Delta CAB$ (cmt) $\Rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BH}{AB}$ (các cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AB^2=BH.BC \Rightarrow AB=6$ cm

$\Rightarrow C_{\Delta ABC}=6+9+3\sqrt{5}=15+3\sqrt{5}$ cm

d) Cm được tứ giác AEHF là hình chữ nhật. Từ đó chứng minh được ΔOAE cân tại O

Ta có $AK \,//\, EF \Rightarrow \widehat{KAE}=\widehat{AEF}$ (so le trong)

Lại có $KB \perp BC$; $AH \perp BC \Rightarrow KB \mathbin{/\mkern-6mu/} AH \Rightarrow \widehat{KBA} = \widehat{BAH}$ (so le trong)

Do đó $\widehat{KBA} = \widehat{KAB} \Rightarrow \Delta KAB$ cân tại K $\Rightarrow KA = KB$

Kéo dài BK cắt tia CA tại D. Ta có $\widehat{BDA} + \widehat{DBA} = 90^\circ$ và $\widehat{DAK} + \widehat{KAB} = 90^\circ$

Mà $\widehat{DBA} = \widehat{KAB}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{DAK}$

$\Rightarrow \Delta KDA$ cân tại K $\Rightarrow KD = KA$ mà KB = KA $\Rightarrow$ KB = KD

$\Rightarrow$ K là trung điểm của BD

Gọi I là giao điểm của CK và AH. Ta có $BK \mathbin{/\mkern-6mu/} AH$ mà D thuộc BK, I thuộc AH

$\Rightarrow HI \mathbin{/\mkern-6mu/} BK; AI \mathbin{/\mkern-6mu/} DK$

Xét ΔBKC có $HI \mathbin{/\mkern-6mu/} BK \Rightarrow \frac{HI}{KB} = \frac{CI}{CK}$ (1)

Xét ΔDKC có $AI \mathbin{/\mkern-6mu/} DK \Rightarrow \frac{AI}{DK} = \frac{CI}{CK}$ (2)

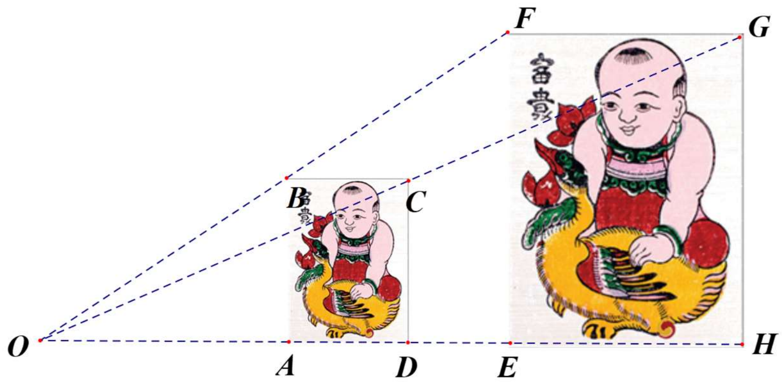
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{HI}{KB} = \frac{AI}{DK}$ mà DK = BK $\Rightarrow$ AI = HI

Hay I là trung điểm của AH mà O là trung điểm của AH $\Rightarrow$ I trùng với O

$\Rightarrow$ Ba điểm K, O, C thẳng hàng

BÀI 37. HÌNH ĐỒNG DẠNG

VD 1.1. Hình ảnh bên dưới là bức tranh Đông Hồ nhưng có kích thước khác nhau. Cho biết hai hình chữ nhật *ABCD*, *EFGH* có đồng dạng phối cảnh không? Nếu có, hãy chỉ ra tâm đồng dạng phối cảnh.



Giải

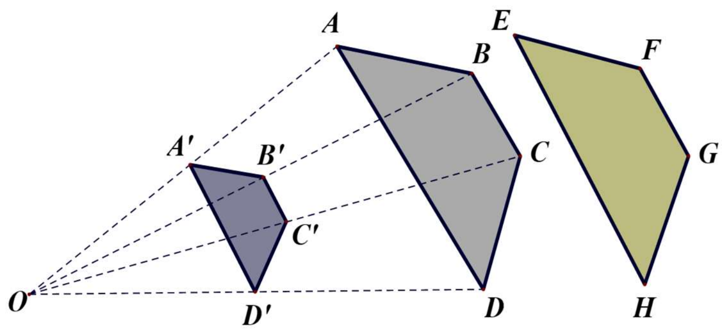
Hai hình chữ nhật ABCD, EFGH có là hình đồng dạng phối cảnh.

Điểm O là tâm đồng dạng phối cảnh.

VD 1.2. Trong hình vẽ bên dưới, các điểm A′, B′, C′, D′ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD. Quan sát hình vẽ và cho biết:

a) Hai hình thang A′B′C′D′, ABCD có đồng dạng phối cảnh hay không?

b) Hai hình thang EFGH, ABCD có bằng nhau không?



Giải

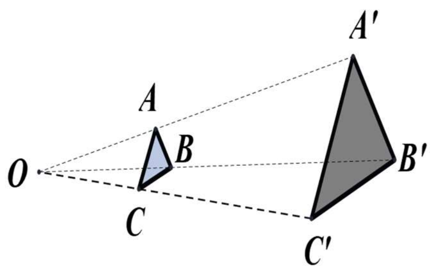
a) Hai hình thang A′B′C′D′, ABCD có là đồng dạng phối cảnh.

b) Hình thang EFGH bằng hình thang ABCD.

VD 2.1. Cho tam giác ABC có AB = 4cm, BC = 7cm, CA = 6cm.

Cho O là điểm phân biệt.

Giả sử tam giác A′B′C′ là hình đồng dạng phối cảnh của tam giác ABC với O là tâm đồng dạng phối cảnh, tỉ số $\frac{A'B'}{AB} = 3$.



Tính độ dài các cạnh của tam giác A′B′C′.

Giải

Vì hai tam giác ABC và A'B'C' là hai hình đồng dạng phối cảnh nên

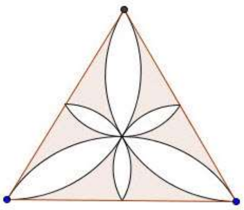
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=3$$

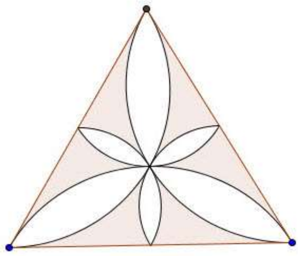
$$\Rightarrow\begin{cases}A'B'=3AB\\A'C'=3AC\\B'C'=3BC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A'B'=3.4=12\,(cm)\\A'C'=3.6=18\,(cm)\\B'C'=3.7=21\,(cm)\end{cases}$$

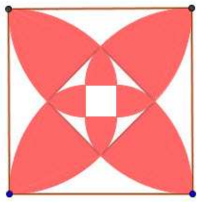
Vậy A'B' = 12cm; A'C' = 18cm; B'C' = 21cm

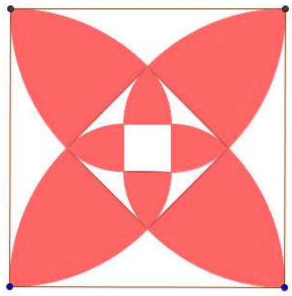
Dạng 3. Một số hình đồng dạng trong thực tiễn

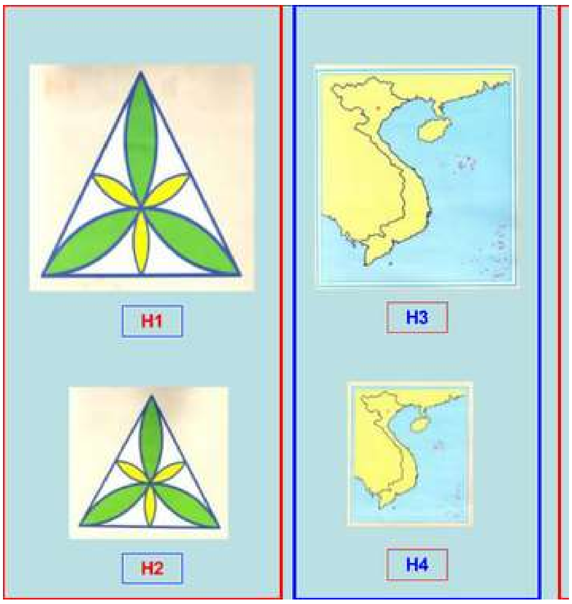
VD 3.1. Tìm một số hình ảnh về những hình đồng dạng trong thực tiễn.

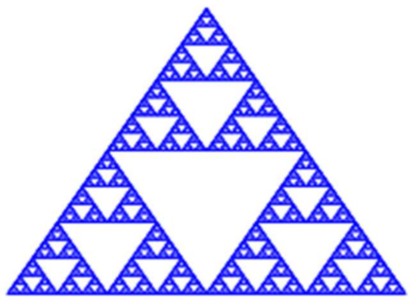






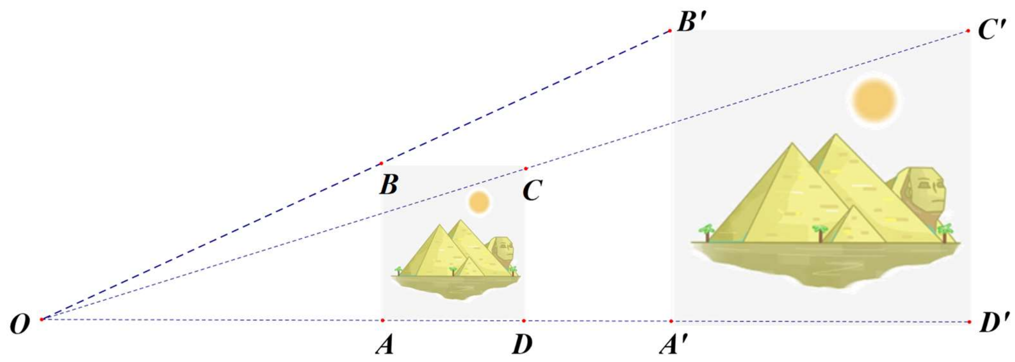






IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

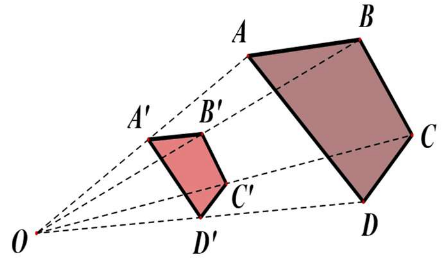
Bài 1. Hình bên dưới mô tả hai bức tranh kim tử tháp nhứng có kích thước khác nhau. Cho biết hai hình vuông A'B'C'D' và ABCD có đồng dạng phối cảnh không? Nếu có, nếu có hãy chỉ ra tâm đồng dạng phối cảnh.



Giải

Hai hình vuông A'B'C'D' và ABCD là hình đồng dạng phối cảnh. Tâm đồng dạng phổi cảnh là O.

Bài 2. Cho hai tứ giác A'B'C'D' và ABCD đồng dạng phối cảnh với nhau. O là tâm đồng dạng phối cảnh, tỉ số là k = $\frac{1}{2}$. Biết AB = 3cm; BC = 1,5cm; CD = 2cm; AD = 4cm. Tính độ dài các cạnh của tứ giác A'B'C'D'.



Giải

Vì hai tứ giác A'B'C'D' và ABCD đồng dạng phối cảnh với nhau. O là tâm đồng dạng phối cảnh, tỉ số là $k=\frac{1}{2}$ nên ta có: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{A'D'}{AD}=k$

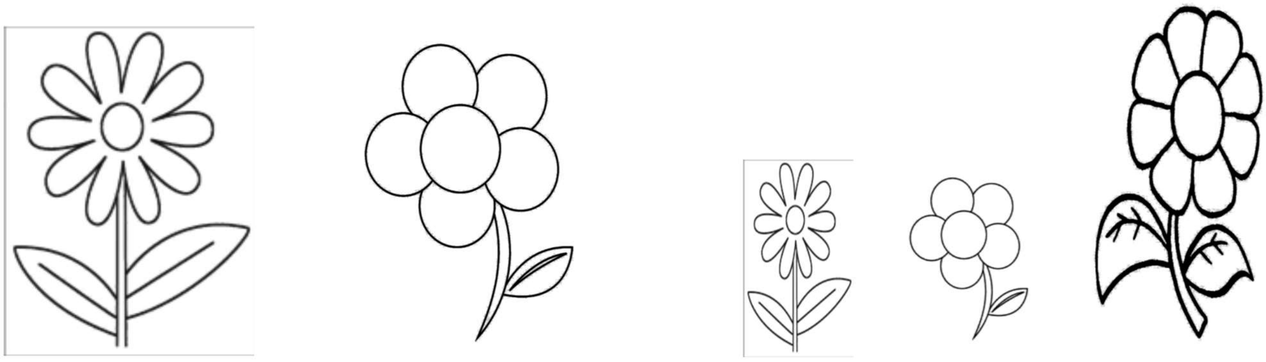
$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{A'D'}{AD}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow A'B'=\frac{1}{2}AB;\ B'C'=\frac{1}{2}BC;\ C'D'=\frac{1}{2}CD;\ A'D'=\frac{1}{2}AD$

$$\Rightarrow \begin{cases} A'B'=\frac{1}{2}.3=1,5\left(cm\right) \\ B'C'=\frac{1}{2}.1,5=0,75\left(cm\right) \\ C'D'=\frac{1}{2}.2=1\left(cm\right) \\ A'D'=\frac{1}{2}.4=2\left(cm\right) \end{cases}$$

Vậy các cạnh của tứ giác A'B'C'D' là: A'B' = 1,5cm; B'C = 0,75cm; C'D = 1cm; A'D' = 2cm

Bài 3. Biết mỗi hình dưới đây đồng dạng với một hình khác, hãy tìm các cặp hình đồng dạng đó.



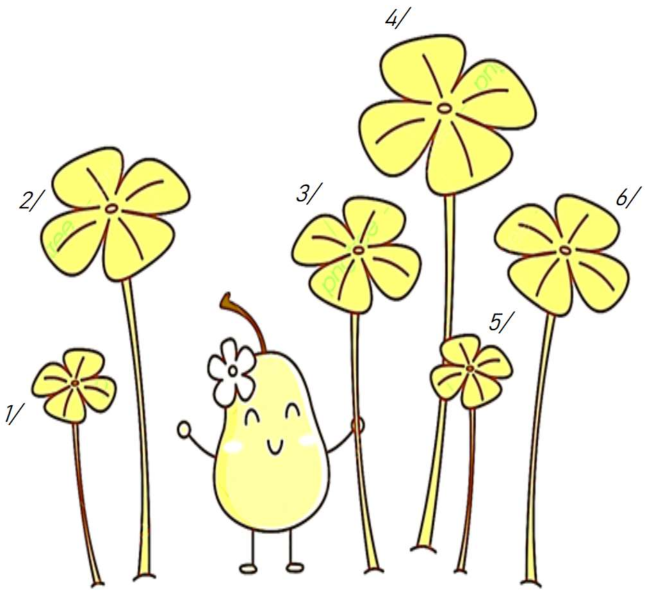
Hình a Hình b Hình c Hình d Hình e

Giải

Hình a đồng dạng với hình c

Hình b đồng dạng với hình d

Bài 4. Hình ảnh bên dưới là hình ảnh chiếc cỏ bốn lá gợi lên những hình ảnh đồng dạng. Hãy viết tên các cặp chiếc cỏ bốn lá gợi lên những hình đồng dạng.



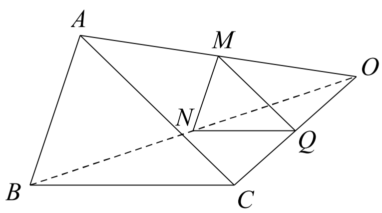
Giải

Có (1); (3) và (6) là các chiếc lá đồng dạng.

Có (2); (4) và (5) là các chiếc là đồng dạng.

Bài 5. Cho ΔMNQ đồng dạng phối cảnh với ΔABC theo tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$. Hãy cho biết các tỉ số sau:

a) $\dfrac{MN}{AB}$ b) $\dfrac{CO}{CQ}$ c) $\dfrac{ON}{NB}$



Giải

a) Vì $k=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{1}{2}$

b) Vì $k=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{OQ}{OC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow OC=2.OQ\Rightarrow CQ=OQ=\dfrac{1}{2}OC$

Khi đó $\dfrac{CO}{CQ}=2$

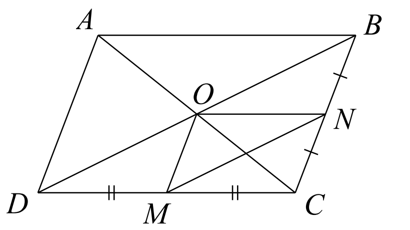
c) Vì $k=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{ON}{OB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow OB=2.ON\Rightarrow ON=NB=\dfrac{1}{2}OB$

Khi đó $\dfrac{ON}{NB}=1$

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao hai đường chéo. Lấy M,N lần lượt là trung điểm trên DC,BC.

a) Chỉ ra những tam giác đồng dạng trong hình.

b) ΔABD đồng dạng phối cảnh với tam giác nào, xác định tâm phối cảnh và tỉ số.



Giải

a) Các hình tam giác đồng dạng là:

$\Delta COM\backsim\Delta CAD$, $\Delta CON\backsim\Delta CAB$

$\Delta OCB\backsim\Delta OAD$, $\Delta OAB\backsim\Delta OCD$

$\Delta CMN\backsim\Delta CDB$, $\Delta CMN\backsim\Delta ABD$

$\Delta OMN\backsim\Delta ADB$,

……

b) ΔABD đồng dạng phối cảnh với ΔONM. Tâm đồng dạng là C

Tỉ số đồng dạng là $\dfrac{AC}{OC}$

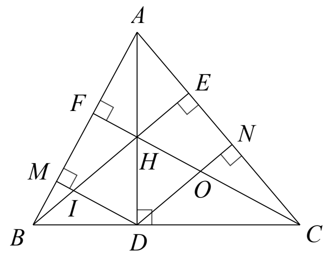
Bài 7. Cho ΔABC nhọn có ba đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Từ D hạ DM,DN lần lượt vuông góc vuống AB,AC cắt BE,CF lần lượt tại I và O

a) Chỉ ra các tam giác đồng dạng phối cảnh và tâm phối cảnh

b) ΔABC đồng dạng với những tam giác nào?

c) ΔAEF có đồng dạng với ΔAMN không?

Giải



a) ΔAFH đồng dạng phối cảnh với ΔAMD tâm phối cảnh là A

.

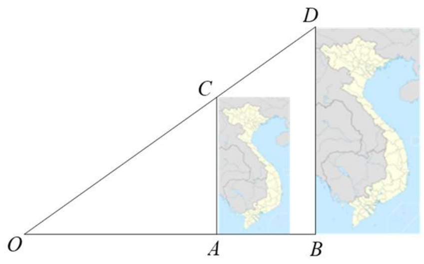
ΔBMI đồng dạng phối cảnh với ΔBFH tâm phối cảnh là B.

…..

b) ΔABC đồng dạng với ΔAEF, ΔANM

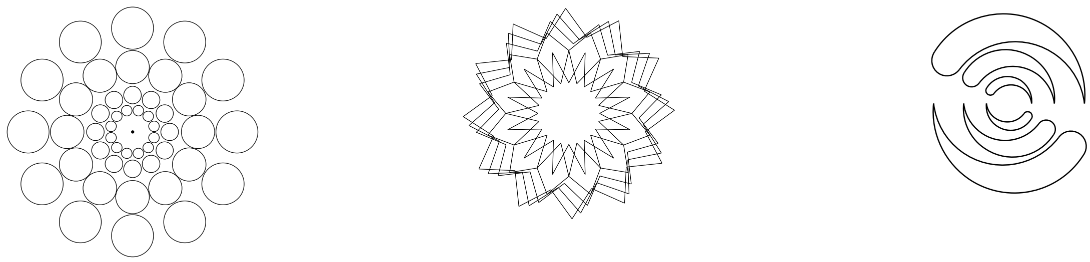
c) ΔAEF có đồng dạng với ΔAMN

Bài 8. Một số hình đồng dạng phối cảnh trong tự nhiên:



Bản đồ Việt Nam

Máy xúc và máy xúc đồ chơi trẻ em

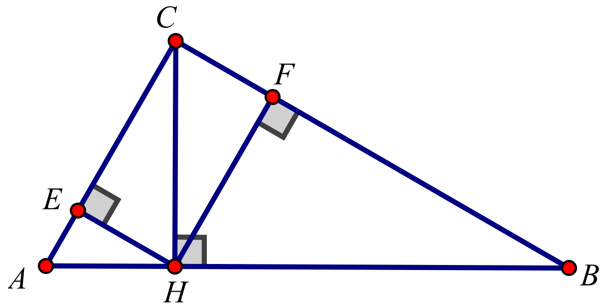


Một số hình trong thiết kế trang trí

ÔN TẬP CHƯƠNG IX

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại C, đường cao CH, $AC = 75cm$, $BC = 100cm$, gọi E là hình chiếu của H trên AC, F là hình chiếu của H trên BC. Tính độ dài HE, HF.

Giải



Ta tính được AB = 125cm, CH = 60cm.

$\Delta CEH \backsim \Delta BCA \Rightarrow \dfrac{HE}{AC} = \dfrac{CE}{BC} = \dfrac{CH}{BA}$

$\Rightarrow \dfrac{HE}{75} = \dfrac{CE}{100} = \dfrac{60}{125} = \dfrac{12}{25}$

Từ đó: HE = 36cm, CE = 48cm, HF = 48cm.

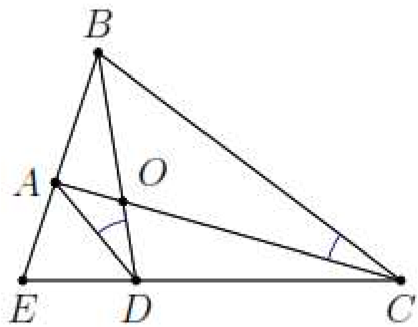
Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O.

a) Chứng minh $\Delta AOD \backsim \Delta BOC$.

b) Chứng minh $\Delta AOB \backsim \Delta DOC$.

c) Gọi E là giao điểm của các đường thẳng AB và CD. Chứng minh $EA \cdot EB = ED \cdot EC$.

Giải



a) Ta có $\Delta AOD \backsim \Delta BOC$ (g.g)

b) Từ câu a) ta có $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OD}{OC} \Rightarrow \Delta AOB \backsim \Delta DOC$ (c.g.c)

c) Từ câu b), ta có $\widehat{ECA} = \widehat{EBD} \Rightarrow \Delta EAC \backsim \Delta EDB$ (g.g)

Suy ra $EA \cdot EB = ED \cdot EC$.

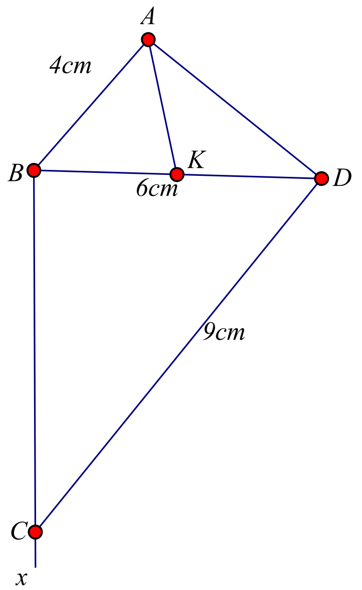
Bài 3. Cho ΔABC có $AB = 4cm$, $DB = 6cm$, $AD = \sqrt{20}cm$.

Kẻ tia Bx vuông góc với DB (tia Bx và điểm A nằm khác phía so với đường thẳng BD). Trên tia Bx lấy điểm C sao cho $DC = 9cm$.

a) Gọi K là trung điểm của DB. Tính độ dài AK.

b) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông.

Giải



a) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 + AD^2 = 4^2 + \sqrt{20}^2 = 16 + 20 = 36 \\ BD^2 = 6^2 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$\Rightarrow \Delta BAD$ vuông tại A (Đ/lý Pitago đảo)

Vì K là trung điểm của $BD \Rightarrow$ $BK = KD = \dfrac{6}{2} = 3cm$

$\Rightarrow AK = BK = KD = 3cm$ (t/c đường trung tuyến trong tam giác vuông)

b) Xét ΔCBD vuông có:

$CD^2 = BC^2 + BD^2 \rightarrow BC^2 = CD^2 - BD^2$ (Đ/lý Pitago)

$\Rightarrow BC^2 = 9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$

$\Leftrightarrow BC = 3\sqrt{5}cm$

Lại có:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{6}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AB}{AD}$$

Xét ΔBAD và ΔDBC có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{BAD} = \widehat{DBC} = 90^\circ \\ \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BD}{BC} (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BAD \backsim \Delta DBC (c-g-c)$$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$

Mà $\widehat{ABD}$, $\widehat{BDC}$ ở vị trí so le trong $AB//DC \rightarrow ABCD$ là hình thang

Lại có: $AB \perp AD \Rightarrow ABCD$ là hình thang vuông

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 15cm$, $AC = 20cm$, đường phân giác BD.

a) Tính độ dài AD.

b) Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Tính độ dài AH, HB.

c) Chứng minh rằng tam giác AID là tam giác cân.

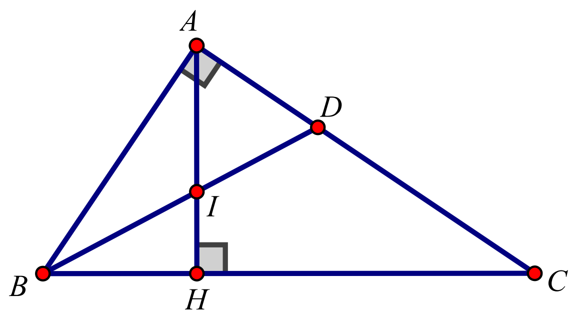
Giải

a) Ta tính được BC = 25cm.

$\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{DA}{DA + DC} = \dfrac{3}{3+5}$

$\Rightarrow \dfrac{DA}{20} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow DA = 7,5cm.$



b)

$AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{15.20}{25} = 12cm$

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 15^2 - 12^2 = 81$

$\Rightarrow BH = 9cm.$

c) Do BD là đường phân giác góc B nên $\widehat{HBD} = \widehat{ABD}$

$\Rightarrow \quad \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$

Xét ΔHBI và ΔABD có:

$\left.\begin{array}{l} \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \\ \widehat{H} = \widehat{A} = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta HBI \backsim \Delta ABD$ (g-g)

$\Rightarrow \widehat{HIB} = \widehat{ADB}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{HIB} = \widehat{AID}$ (2 góc đối đỉnh)

Do đó: $\widehat{AID} = \widehat{ADI}$ Nên tam giác AID cân tai A.

Bài 5. Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Một đường thẳng đi qua A cắt các tia CD, CB lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh $\Delta ADM \backsim \Delta NBA$.

b) Chứng minh $AD^2 = DM \cdot BN$, rồi suy ra $\Delta MDB \backsim \Delta DBN$.

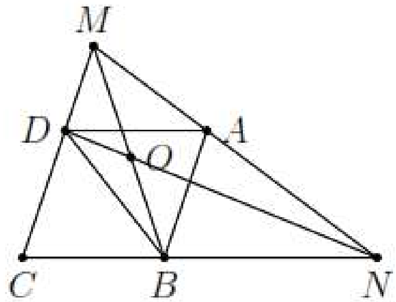
c) Gọi O là giao điểm của BM và DN. Tính $\widehat{MON}$.

Lời giải

a) Ta có $DA \parallel CN$ và $BA \parallel CM$ nên

$\widehat{DMA} = \widehat{BAN}$, $\widehat{MAD} = \widehat{ANB}$

$\Rightarrow \Delta ADM \backsim \Delta NBA$ (g.g).



b) Từ câu a), ta có $MD \cdot BN = AD \cdot AB = BD^2$ (do ΔABD đều) $\Rightarrow \dfrac{DM}{BD} = \dfrac{BD}{BN}$ mà $\widehat{MDB} = \widehat{NBD} = 120^\circ$.

Vậy $\Delta MDB \backsim \Delta DBN$.

c) Từ kết quả câu b), ta có $\widehat{BDN} = \widehat{DMB}$, từ đó ta nhận được $\widehat{MON} = \widehat{DMB} + \widehat{MDN} = \widehat{BDM} = 120^\circ$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi O là giao điểm của ba đường cao AH, BK, CI.

a) Chứng minh OK.OB = OI.OC

b) Chứng minh ΔOKI ∽ ΔOCB

c) Chứng minh ΔBOH ∽ ΔBCK

d) Chứng minh BO.BK + CO.CI $= BC^2$

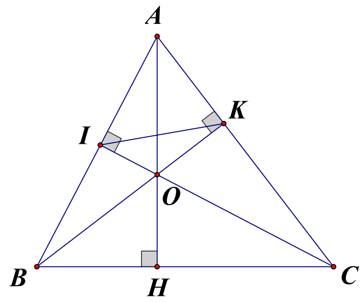
Giải

a) ΔOKC và ΔOIB có

$\widehat{KOC} = \widehat{IOB}$

$\widehat{OKC} = \widehat{OIB} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta OKC \backsim \Delta OIB(gg) \Rightarrow \dfrac{OK}{OI} = \dfrac{OC}{OB}$ (1) $\Rightarrow OK.OB = OI.OC$



b) Từ $(1) \Rightarrow \dfrac{OK}{OC} = \dfrac{OI}{OB}$

ΔOKI và ΔOCB có:

$\dfrac{OK}{OC} = \dfrac{OI}{OB}$

$\widehat{IOK} = \widehat{BOC}$

$\Rightarrow \Delta OKI \backsim \Delta OCB(c-g-c)$

c) Xét ΔBOH và ΔBCK có

$\widehat{KBC}$ chung

$\widehat{BHO} = \widehat{BKC} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta BOH \backsim \Delta BCK(gg)$ (2)

d) Ta có:

$(2) \Rightarrow \dfrac{BO}{BC} = \dfrac{BH}{BK} \Rightarrow BO.BK = BC.BH$

Chứng minh tương tự:

$\Delta COH \backsim \Delta CBI(gg) \Rightarrow \dfrac{CO}{CB} = \dfrac{CH}{CI} \Rightarrow CO.CI = BC.HC$

Vậy $BO.BK + CO.CI = BC.BH + BC.HC = BC(BH + HC) = BC.BC = BC^2$

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh

a) $\Delta HBF \backsim \Delta HCE$.

b) $HB \cdot HE = HF \cdot HC = HA \cdot HD$.

c) EH là tia phân giác của góc DEF.

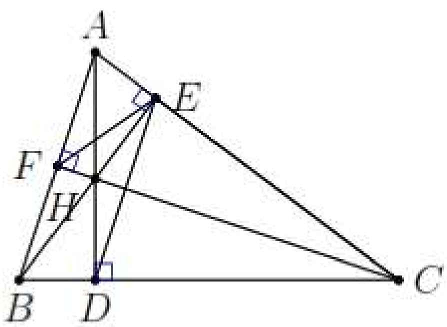
Lời giải

a) $\Delta HBF \backsim \Delta HCE$ (g.g).

b) Từ kết quả câu a) ta có $HB \cdot HE = HF \cdot HC$.

Làm tương tự ta thu được $HF \cdot HC = HA \cdot HD$. Suy ra

$HB \cdot HE = HF \cdot HC = HA \cdot HD$.



c) Từ câu b), chứng minh được

$\Delta EHF \backsim \Delta CHB$ (c.g.c) và $\Delta DHE \backsim \Delta BHA$ (c.g.c), do đó

$\widehat{HEF} = \widehat{HCB}$ và $\widehat{HED} = \widehat{HAB}$.

Ta có $\widehat{HAB} = \widehat{HCB}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$).

Do đó $\widehat{HED} = \widehat{HEF} \Rightarrow$

EH là tia phân giác của góc DEF.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông ở A, AB = 5,4cm, AC = 7,2cm.

a) Tính BC.

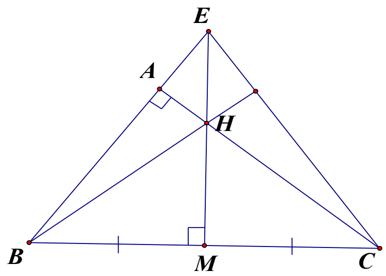
b) Từ trung điểm M của BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt đường thẳng AC tại H và cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh ΔEMB $\backsim$ ΔCAB.

c) Tính EB và EM.

d) Chứng minh BH vuông góc với EC.

e) Chứng minh HA.HC = HM.HE.

Giải



a) Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5,4^2 + 7,2^2 = 81 \Rightarrow BC = 9(cm).$

b) Xét Δ EMB và Δ CAB có:

$\widehat{BAC} = \widehat{EMD} = 90^0 (gt)$

$\widehat{ABC}$ chung

Do đó ΔEMB $\backsim$ ΔCAB (g.g).

c) Theo câu (b) ΔEMB $\backsim$ ΔCAB $\Rightarrow \dfrac{EM}{AC} = \dfrac{EB}{BC} = \dfrac{BM}{AB}$ (cạnh tương ứng)

Thay số ta được: $EM = \dfrac{AC.BM}{AB} = 6(cm)$; $EB = \dfrac{BM.BC}{AB} = 7,5(cm).$

d) Xét tam giác BEC có: $EM \perp BC(gt)$ và $CA \perp BE$ (vì $\widehat{BAC} = 90^0$)

Mà $AC \cap EM = \{H\}$ nên H là trực tâm của tam giác BEC và $BH \perp EC$ (tính chất ba đường cao tron tam giác).

e) Xét ΔAHE và ΔMHC có:

$\widehat{BAC} = \widehat{HMC} = 90^0 (gt)$

$\widehat{AHE} = \widehat{CHM}$ (đối đỉnh)

Do đó ΔAHE $\backsim$ ΔMHC (g.g). Suy ra $\dfrac{AH}{HM} = \dfrac{HE}{HC}$ (cạnh tương ứng) $\Rightarrow AH.HC = HM.HE$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có trực tâm H.Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác.

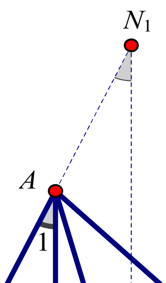
a) Chứng minh $\Delta OMN \backsim \Delta HAB$. Tìm tỉ số đồng dạng.

b) So sánh độ dài AH và OM

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\Delta HAG \backsim \Delta OMG$.

d) Chứng minh ba điểm H, G, O thẳng hàng và GH = 2GO.

Giải



a) Ta có: MN//AB, OM//AD nên $\widehat{M_1} = \widehat{A_1}$. (Cùng bằng $\hat{E}$)

Tương tự $\widehat{N_1} = \widehat{B_1}$

Do đó: $\Delta OMN \backsim \Delta HAB$. Tỉ số đồng dạng

$\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{1}{2}$

b) Suy ra từ câu a. AH = 2. OM

c) $\Delta HAG \backsim \Delta OMG$

d) Từ câu c, suy ra $\widehat{AGH} = \widehat{MGO}$ Từ đó suy ra:

$\widehat{MGO}$ bù $\widehat{MGH}$ nên H, G, O thẳng hàng.

Ta có $\dfrac{GH}{GO} = \dfrac{GA}{GM} = 2$ nên $GH = 2.GO$.

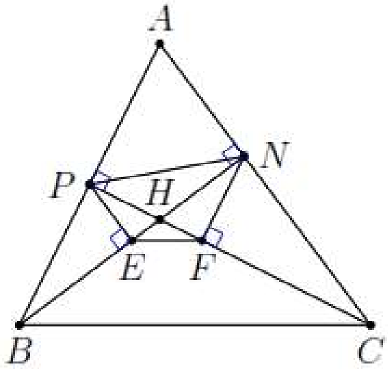
Bài 10. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$. Các đường cao BN, CP cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $AN \cdot AC = AP \cdot AB$.

b) Chứng minh $\Delta ANP \backsim \Delta ABC$.

c) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của P, N trên BN, CP. Chứng minh $EF \parallel BC$.

Giải



a) Ta có $\Delta ANB \backsim \Delta APC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AP} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AN \cdot AC = AP \cdot AB$.

b) Từ kết quả câu a) ta có $\Delta ANP \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)

c) Ta có $EP \parallel NC$, $FN \parallel BP$ nên theo định lý Ta-lét ta có

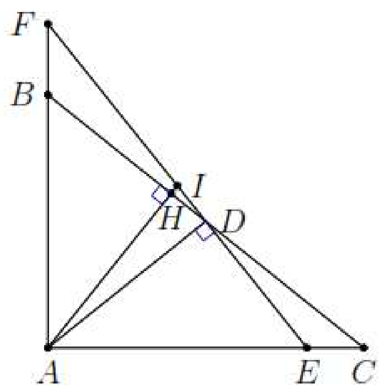
$\dfrac{HE}{HN} = \dfrac{HP}{HC}$, $\dfrac{HF}{HP} = \dfrac{HN}{HB}$ $\Rightarrow \dfrac{HE}{HB} = \dfrac{HF}{HC}$. Do đó $EF \parallel BC$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ và trung tuyến AD. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt AC và AB lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta AEF$.

b) Chứng minh $BC^2 = 4DE \cdot DF$.

Giải



a) Ta có ΔDAC cân tại D nên

$\widehat{ACB} = \widehat{DAC} = 90^\circ - \widehat{DAF} = \widehat{AFE}$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta AEF$ (g.g).

b) Theo câu a) ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ $\Rightarrow \Delta DEC \backsim \Delta DBF$ (g.g)

$\Rightarrow BC^2 = 4DE \cdot DF$.

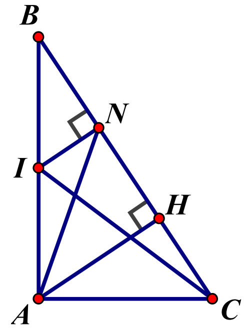
Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC). Gọi I là trung điểm của AB. Kẻ IN vuông góc với BC tại N (N thuộc BC).

a) Chứng minh ΔACB đồng dạng với ΔNIB. Từ đó suy ra BA.BI = BC.BN

b) Giả sử AC = 6cm; BC = 10cm. Tính BN.

c) Chứng minh $\widehat{IAN} = \widehat{ICN}$

d) Chứng minh $AC^2 = NC^2 - NB^2$



Giải

a) Chứng minh: ΔACB đồng dạng với ΔNIB (g,g)

Từ tỉ số suy ra BA.BI = CB.BN

b) Tính được BN = 3,2cm

c) Từ tỉ số $\frac{BI}{BN} = \frac{BC}{BA}$ Chứng minh ΔBIC đồng dạng với ΔBNA

Từ đó suy ra $\widehat{IAN} = \widehat{ICN}$

d) Kẻ AH $\perp$BC tại H. Chứng minh được $AC^2 = CH.CB$

Chứng minh N là trung điểm HB $\Rightarrow$ NB = NH

$\Rightarrow CH.CB = (CN-NB)(CN+NB) = NC^2 - NB^2$

$\Rightarrow AC^2 = NC^2 - NB^2$

Bài 13. Cho ΔABC vuông tại A (AC > AB). Đường cao AH.

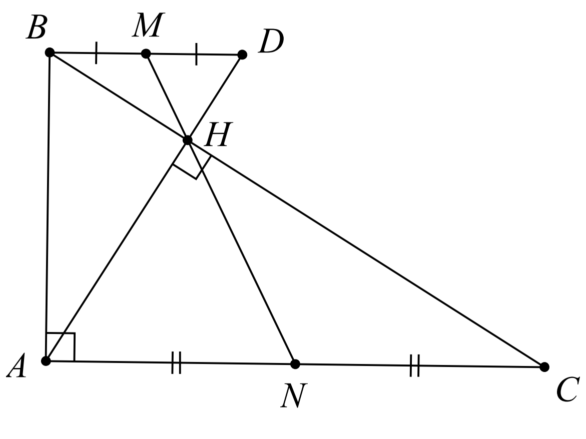
a) Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ và $AB^2 = BH.BC$.

b) Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt AH tại D. Chứng minh rằng: HA.HB = HC.HD.

c) Chứng minh $AB^2 = AC.BD$.

d) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC. Chứng minh M, H, N thẳng hàng.

Giải



a) $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB}$ (cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AB^2 = BH.BC$

b) Vì BD // AC $\Rightarrow \Delta BHD \backsim \Delta CHA$

$\Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{HD}{HA}$ (Cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow HA.HB = HC.HD$

c) Ta chứng minh được $\Delta ABC \backsim \Delta BDA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AC.BD$

d) Xét ΔBHD vuông tại H có HM là đường trung tuyến.

$\Rightarrow MH = MB$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \Delta MHB$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MHB}$ (tính chất)

Tương tự ta chứng minh được $\widehat{NHC} = \widehat{NCH}$

Mà $\widehat{MBH} = \widehat{NCH}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{MHB} = \widehat{NHC}$

Mà $\widehat{BHN} + \widehat{NHC} = 180^\circ$ (ba điểm B; H; C thẳng hàng)

$\Rightarrow \widehat{BHN} + \widehat{MHB} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Ba điểm M; H; N thẳng hàng.

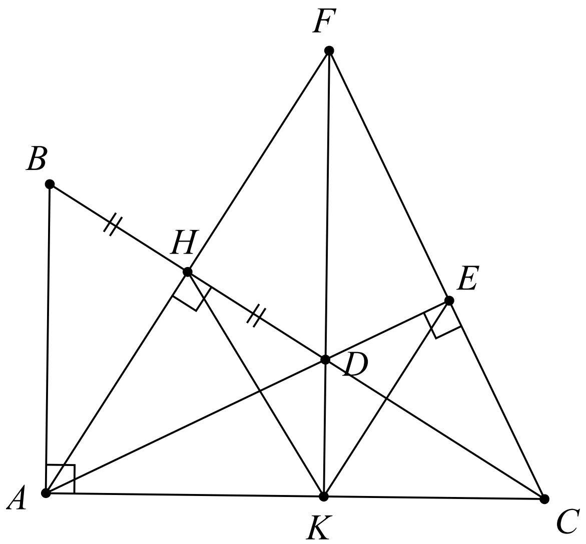
Bài 14. Cho ΔABC vuông tại A (AB < AC). Đường cao AH (H thuộc BC). Gọi D là điểm đối xứng với B qua H.

a) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với tia AD, cắt tia AD tại E. Chứng minh rằng AH.CD = CD.AD.

b) Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta EDC$ và tính diện tích tam giác ΔEDC biết AB = 6cm, AC = 8cm.

c) Biết AH cắt CE tại F. Tia FD cắt cạnh AC tại K. Chứng minh KD là tia phân giác của góc HKE.

Giải



a) Ta chứng minh được $\Delta AHD \backsim \Delta CED$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{CE} = \dfrac{AD}{CD}$ (cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow AH.CD = CE.AD$

b) Ta chứng minh được $\widehat{ABC} = \widehat{EDC}$

Từ đó $\Delta ABC \backsim \Delta EDC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta EDC}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{DC}{BC}\right)^2$

Áp dụng Pytago cho tam giác ABC vuông tại A, ta tính được BC = 10cm

Tính được HD = BH = 3,6cm; CD = 2,8cm

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC}{2} = 24$ (cm²)

$\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta EDC}}{24} = \left(\dfrac{2,8}{10}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta EDC} = 1,8816\,\text{cm}^2$

c) Ta có D là trực tâm của tam giác $\Delta AFC \Rightarrow FD \perp AC$ tại K

Chứng minh được $\Delta AEC \backsim \Delta FKC \Rightarrow \dfrac{EC}{KC} = \dfrac{AC}{CF} \Rightarrow \dfrac{EC}{AC} = \dfrac{KC}{CF}$.

Chứng minh được $\Delta CEK \backsim \Delta CAF \Rightarrow \widehat{CKE} = \widehat{CFA}$ (1)

Chứng minh được $\Delta AHC \backsim \Delta AKF \Rightarrow \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{AC}{AF}$

Chứng minh được $\Delta AHK \backsim \Delta ACF \Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{AFC}$

Mà $\widehat{AKH} + \widehat{HKF} = 90°$ và $\widehat{CKE} + \widehat{EKF} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{HKF} = \widehat{EKF} \Rightarrow$ KD là tia phân giác của góc HKE.

Bài 15. Cho ΔABC vuông tại A (AB > AC). Kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Gọi D là trung điểm của AB. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt CD và CB lần lượt tại E, F. Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên BC.

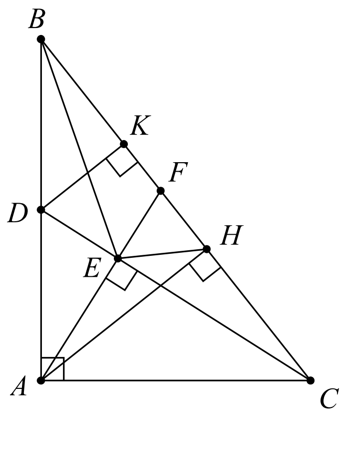
a) Chứng minh $\Delta ADE \backsim \Delta CDA$.

b) Chứng minh BD.BC = BE.CD.

c) Chứng minh $\widehat{HEF} = \widehat{BAH}$ và EF là phân giác của góc HEB.

d) Chứng minh $\dfrac{1}{BF} + \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{BK}$.

Giải



a) $\Delta ADE \backsim \Delta CDA$ (g.g)

b) $\Delta ADE \backsim \Delta CDA$ (cmt)$\Rightarrow \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{DE}{AD}$. Mà AD = BD $\Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{DE}{BD}$

Chứng minh được $\Delta DBE \backsim \Delta DCB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BE}{BC} \Rightarrow BD.BC = BE.CD$

c) Chứng minh được $\Delta AHF \backsim \Delta CEF$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{CF} = \dfrac{HF}{EF} \Rightarrow \dfrac{AF}{HF} = \dfrac{CF}{EF}$

Chứng minh được $\Delta AFC \backsim \Delta HFE$ (c.g.c)$\Rightarrow \widehat{HEF} = \widehat{ACF}$

Ta có $\widehat{ACF} + \widehat{HAC} = 90^\circ$; $\widehat{BAH} + \widehat{HAC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{ACF} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{HEF}$

Vì $\Delta DBE \backsim \Delta DCB$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{DEB} = \widehat{DBC}$

Mà $\widehat{DBC} + \widehat{BAH} = 90^\circ$; $\widehat{DEB} + \widehat{BEF} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{BEF}$ mà $\widehat{BAH} = \widehat{HEF} \Rightarrow \widehat{HEF} = \widehat{BEF} \Rightarrow$ EF là phân giác của góc HEB