

TỰ HỌC NÂNG CAO KIẾN THỨC

TOÁN 8

- TẬP 2 -

PHẦN ĐÁP ÁN

CHƯƠNG VI.

BÀI 21. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

VD 1.1.

a) $\frac{x+2}{x}$ Đkxđ: $x \neq 0$

b) $\frac{x+1}{3-x}$ Đkxđ: $3-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

c) $\frac{x+3}{-2x-10}$ Đkxđ: $-2x-10 \neq 0 \Leftrightarrow -2x \neq 10 \Leftrightarrow x \neq -5$

d) $\frac{9-x}{\frac{1}{2}x+4}$ Đkxđ: $\frac{1}{2}x+4 \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x \neq -4 \Leftrightarrow x \neq -8$

VD 1.2.

a) $\frac{x-4}{(x-3)(x+1)}$ Đkxđ: $(x-3)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -1 \end{cases}$

b) $\frac{7-5x}{x^2-25}$ Đkxđ: $x^2-25 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 25 \Leftrightarrow x \neq \pm 5$

c) $\frac{x^2}{x^2-2x+1}$ Đkxđ: $x^2-2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

d) $\frac{10}{x^2+3x+2}$ Đkxđ: $x^2+3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$

VD 1.3. Tìm điều kiện xác định của các phân thức sau:

a) $\frac{x^2+y^2}{(x-1)(y+1)}$ Đkxđ: $(x-1)(y+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ y+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases}$

b) $\frac{10}{x^2+y^2}$

Ta có $\begin{cases} x^2 \geq 0 (\forall x \in \mathbb{R}) \\ y^2 \geq 0 (\forall y \in \mathbb{R}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 0 (\forall x, y \in \mathbb{R})$

Nên điều kiện xác định là $\begin{cases} x^2 \neq 0 \\ y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

$$c) \frac{x+y}{(x+3)^2 + (y-2)^2}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x+3)^2 \geq 0 & (\forall x \in \mathbb{R}) \\ (y-2)^2 \geq 0 & (\forall y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 \geq 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$\text{Nên điều kiện xác định là } \begin{cases} (x+3)^2 \neq 0 \\ (y-2)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \neq 0 \\ y-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ y \neq 2 \end{cases}.$$

VD 2.1.

$$a) \frac{7}{x^2+5}$$

$$\text{Ta có } x^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 \geq 5 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x .

$$b) \frac{6-x}{(x+1)^2+4}$$

$$\text{Ta có } (x+1)^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + 4 \geq 4 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x .

$$c) \frac{8-x^2}{x^2-4x+7}$$

$$\text{Xét mẫu } x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + 4 + 3 = (x-2)^2 + 3$$

$$\text{Ta có } (x-2)^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 3 \geq 3 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x .

$$d) \frac{-2x+11}{-4x^2+4x-7}$$

$$\text{Xét mẫu } -4x^2 + 4x - 7 = -4x^2 + 4x - 1 - 6 = -(4x^2 - 4x + 1) - 6 = -(2x-1)^2 - 6$$

$$\text{Ta có } (2x-1)^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow -(2x-1)^2 \leq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow -(2x-1)^2 - 6 \leq -6 < 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x .

VD 2.2. Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa:

$$a) \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2y^2 + 1}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \\ y^2 \geq 0 \quad (\forall y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \\ 2y^2 \geq 0 \quad (\forall y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2y^2 \geq 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 1 \geq 1 > 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x, y .

$$b) \frac{34}{x^2 + y^2 - 2x + 2} = \frac{34}{x^2 - 2x + 1 + y^2 + 1} = \frac{34}{(x-1)^2 + y^2 + 1}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \\ y^2 \geq 0 \quad (\forall y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \geq 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + 1 \geq 1 > 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x, y .

VD 3.1.

$$a) \frac{3y}{4} = \frac{6xy}{8x}$$

$$\text{Ta có } 3y \cdot 8x = 24xy; \quad 6xy \cdot 4 = 24xy \Rightarrow 3y \cdot 8x = 6xy \cdot 4$$

$$\text{Vậy } \frac{3y}{4} = \frac{6xy}{8x}$$

$$b) \frac{7x}{13} = \frac{35xy^2}{65y^2}$$

$$\text{Ta có } 7x \cdot 65y^2 = 455xy^2; \quad 13 \cdot 35xy^2 = 455xy^2 \Rightarrow 7x \cdot 65y^2 = 13 \cdot 35xy^2$$

$$\text{Vậy } \frac{7x}{13} = \frac{35xy^2}{65y^2}$$

$$\text{c) } \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3}$$

$$\text{Ta có } (x-2)(x-3) = x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6; (x^2 - 5x + 6) \cdot 1 = x^2 - 5x + 6$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

$$\text{Vậy } \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3}$$

$$\text{d) } \frac{x}{x+2} = \frac{x^2}{x^2+2x}$$

$$\text{Ta có } x \cdot (x^2 + 2x) = x^3 + 2x^2; x^2 \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2 \Rightarrow x \cdot (x^2 + 2x) = x^2 \cdot (x + 2)$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{x+2} = \frac{x^2}{x^2+2x}$$

$$\text{VD 3.2. Chứng minh đẳng thức sau: } \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 1}{x^2 - y^2 + 2x + 1} = \frac{x + y - 1}{x - y + 1}.$$

Ta có

$$(x^2 + y^2 + 2xy - 1) \cdot (x - y + 1) = [(x + y)^2 - 1] \cdot (x - y + 1) = (x + y - 1)(x + y + 1)(x - y + 1)$$

$$(x^2 - y^2 + 2x + 1)(x + y - 1) = [(x^2 + 2x + 1) - y^2](x + y - 1) = [(x + 1)^2 - y^2](x + y - 1)$$

$$= (x + 1 - y)(x + 1 + y)(x + y - 1) = (x - y + 1)(x + y + 1)(x + y - 1)$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 + 2xy - 1) \cdot (x - y + 1) = (x^2 - y^2 + 2x + 1)(x + y - 1)$$

$$\text{Vậy } \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 1}{x^2 - y^2 + 2x + 1} = \frac{x + y - 1}{x - y + 1}$$

VD 3.3.

$$\text{Ta có } (x + 1) \cdot 5(x + 2) = 5(x + 1)(x + 2); 5 \cdot (x + 1)(x + 2) = 5(x + 1)(x + 2)$$

$$\Rightarrow (x + 1) \cdot 5(x + 2) = 5(x + 1)(x + 2)$$

Nên A = B

$$\text{Một khác } (x + 1)(x + 2) \cdot 5(3x - 2) = 5(x + 1)(x + 2)(3x - 2)$$

$$\text{Và } 5(x + 2) \cdot (x + 1)(3x - 2) = 5(x + 1)(x + 2)(3x - 2)$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+2).5(3x-2) = 5(x+2).(x+1)(3x-2)$$

Nên $B = C$

Vậy $A = B = C$.

VD 3.4. Tìm đa thức A trong các đẳng thức sau:

$$a) \frac{A}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$$

$$\text{Ta có } A.(x+2) = x(x^2-4) \Rightarrow A.(x+2) = x(x-2)(x+2) \Rightarrow A = x(x-2)$$

Vậy $A = x(x-2)$

$$b) \frac{A}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{x-y}$$

$$\text{Ta có } A.(x-y) = (x^2-y^2).(x+y) \Rightarrow A.(x-y) = (x-y)(x+y).(x+y)$$

$$\Rightarrow A.(x-y) = (x-y)(x+y)^2 \Rightarrow A = (x+y)^2$$

Vậy $A = (x+y)^2$

$$\text{VD 4.1. } A = \frac{x^2+2x+2}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào phân thức A, ta có } A = \frac{1^2+2.1+2}{1+1} = \frac{1+2+2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Thay } x = 2 \text{ vào phân thức A, ta có } A = \frac{2^2+2.2+2}{2+1} = \frac{4+4+2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\text{Thay } x = 3 \text{ vào phân thức A, ta có } A = \frac{3^2+2.3+2}{3+1} = \frac{9+6+2}{4} = \frac{17}{4}$$

Vậy, với $x = 1$ thì $A = \frac{5}{2}$

Với $x = 2$ thì $A = \frac{10}{3}$

Với $x = 3$ thì $A = \frac{17}{4}$

VD 4.2. Tính giá trị của phân thức $B = \frac{x+3}{x^2-4}$ ($x \neq \pm 2$) với $|x| = 3$.

Ta có $|x| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$$\text{Thay } x = 3 \text{ vào phân thức B, ta có } B = \frac{3+3}{3^2-4} = \frac{6}{9-4} = \frac{6}{5}$$

Thay $x = -3$ vào phân thức B, ta có $B = \frac{-3+3}{(-3)^2-4} = \frac{0}{9-4} = 0$

Vậy với $x = 3$ thì $B = \frac{6}{5}$, với $x = -3$ thì $B = 0$.

VD 4.3. Tính giá trị của phân thức $M = \frac{x^2-3x+2}{x+2}$ ($x \neq -2$) với $x^2 = 4$.

Ta có $x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & (TM) \\ x = -2 & (KTM) \end{cases}$

Thay $x = 2$ vào phân thức M, ta có $M = \frac{2^2-3.2+2}{2+2} = \frac{4-6+2}{4} = 0$.

Vậy với $x = 2$ thì $M = 0$.

VD 5.1. Tìm các giá trị của x để các phân thức sau bằng 0.

a) $\frac{2x-1}{5x-10}$

Xét $\frac{2x-1}{5x-10} = 0$ Đk: $5x-10 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$$\Leftrightarrow 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$

b) $\frac{x^2-x}{2x^2+2}$

Đkxđ: $2x^2+2 \neq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

Xét $\frac{x^2-x}{2x^2+2} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = 1$.

VD 5.2. Tìm các giá trị của x để các phân thức sau bằng 0.

$$a) \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{Xét } \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đkxd: } x^2 - 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & (KTM) \\ x=-1 & (TM) \end{cases}$$

Vậy $x = -1$

$$b) \frac{x^3 - 16x}{x^3 - 3x^2 - 4x}$$

$$\text{Xét } \frac{x^3 - 16x}{x^3 - 3x^2 - 4x} = 0 \quad (2)$$

Đkxd:

$$x^3 - 3x^2 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 4) \neq 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^3 - 16x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \\ x+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (KTM) \\ x=4 & (TM) \\ x=-4 & (TM) \end{cases}$$

Vậy $x = 4$ hoặc $x = -4$

VD 6.1. Tìm giá trị của x , biết:

$$a) \frac{2x-1}{3} = \frac{3x+1}{4} \quad \text{Đkxd: Với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) \cdot 4 = 3 \cdot (3x+1)$$

$$\Leftrightarrow 8x - 4 = 9x + 3$$

$$\Leftrightarrow x = -7 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x = -7$

$$\text{b) } \frac{3}{x+2} = \frac{5}{2x+1} \text{ Đkxđ: } x \neq \left\{ -2; -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (2x+1) = 5 \cdot (x+2)$$

$$\Leftrightarrow 6x + 3 = 5x + 10$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x = 7$

VD 6.2. Tìm giá trị của x , biết:

$$\text{a) } \frac{1}{x-3} = \frac{-2}{x^2-9} \text{ Đkxđ: } x \neq \pm 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = -2 \cdot (x-3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) + 2(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 & \text{(KTM)} \\ x=-5 & \text{(TM)} \end{cases}$$

Vậy $x = -5$

$$\text{b) } \frac{x-2}{x^2-2} = \frac{4}{x^2+2x+4} \quad (1)$$

Ta có $x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x+1)^2 + 3 \geq 3 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

Nên đkxđ là $x^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4) = 4(x^2-2)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8 = 4x^2 - 8$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = 4$

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

a) $\frac{x^2 - x}{2x}$ Đkxđ: $2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

b) $\frac{5}{9 - x}$ Đkxđ: $9 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 9$

c) $\frac{5x + 4}{6 - \frac{3}{2}x}$ Đkxđ: $6 - \frac{3}{2}x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x \neq 6 \Leftrightarrow x \neq 4$

d) $\frac{2}{(x+1)(x-3)}$ Đkxđ: $(x+1)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Bài 2.

a) $\frac{x^2 - 4}{9x^2 - 16}$ Đkxđ: $9x^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow (3x - 4)(3x + 4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 \neq 0 \\ 3x + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{4}{3}$

b) $\frac{x^2 + 2x + 7}{2x^2 - x}$ Đkxđ: $2x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(2x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $\frac{2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$ Đkxđ: $x^2 + 4x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

d) $\frac{5x + y}{x^2 + 6x + 10}$ Đkxđ: $x^2 + 7x + 10 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 5) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \neq 0 \\ x + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -5 \end{cases}$

Bài 3. Tìm điều kiện của x để các phân thức sau có nghĩa:

a) $\frac{11 + 2y}{(2x + 1)(y - 2)}$ Đkxđ: $(2x + 1)(y - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \neq 0 \\ y - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ y \neq 2 \end{cases}$

$$b) \frac{x+2y+11}{(x+1)^2+2y^2}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 & (\forall x \in \mathbb{R}) \\ y^2 \geq 0 & (\forall y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 & (\forall x \in \mathbb{R}) \\ 2y^2 \geq 0 & (\forall y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + 2y^2 \geq 0 \quad (\forall x; y \in \mathbb{R})$$

$$\text{Nên đkxđ } \begin{cases} (x+1)^2 \neq 0 \\ 2y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$c) \frac{-1-2x}{4x^2+y^2-4x+2y+2}$$

$$\text{Xét mẫu } 4x^2+y^2-4x+2y+2 = 4x^2-4x+1+y^2+2y+1 = (2x-1)^2 + (y+1)^2$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (2x-1)^2 \geq 0 & (\forall x \in \mathbb{R}) \\ (y+1)^2 \geq 0 & (\forall y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + (y+1)^2 \geq 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$\text{Nên đkxđ là } \begin{cases} (2x-1)^2 \neq 0 \\ (y+1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \neq 0 \\ y+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ y \neq -1 \end{cases}$$

Bài 4. Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa:

$$a) \frac{3}{x^2+1}$$

$$\text{Ta có } x^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 \geq 1 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x .

$$b) \frac{3x-5}{(x-1)^2+2}$$

$$\text{Ta có } (x-1)^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+2 \geq 2 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x .

$$c) \frac{x^2 - 4}{-x^2 + 4x - 5}$$

$$\text{Xét mẫu } -x^2 + 4x - 5 = -x^2 + 4x - 4 - 1 = -(x-2)^2 - 1$$

$$\text{Ta có } (x-2)^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow -(x-2)^2 \leq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow -(x-2)^2 - 1 \leq -1 < 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x .

$$d) \frac{x+5}{x^2+x+7}$$

$$\text{Xét mẫu } x^2 + x + 7 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 7 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$$

$$\text{Ta có } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \geq \frac{27}{4} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x .

Bài 5. Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa:

$$a) \frac{2xy + x^2y}{(3x+1)^2 + y^2 + 10}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (3x+1)^2 \geq 0 & (\forall x \in \mathbb{R}) \\ y^2 \geq 0 & (\forall y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)^2 + y^2 \geq 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)^2 + y^2 + 10 \geq 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x .

$$b) \frac{x^2 + 25}{5y^2 + 5x^2 + 2y - 2x + 8xy + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{Xét mẫu } 5y^2 + 5x^2 + 2y - 2x + 8xy + 3 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + 4x^2 + 8xy + 4y^2 + 1 \\ &= (x-1)^2 + (y+1)^2 + 4(x+y)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x-1)^2 & (\forall x \in \mathbb{R}) \\ (y+1)^2 & (\forall y \in \mathbb{R}) \\ (x+y)^2 & (\forall x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + 4(x+y)^2 \geq 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + 4(x+y)^2 + 1 \geq 1 > 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

Vậy phân thức luôn có nghĩa với mọi x .

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a) } \frac{-3x^2}{2y} = \frac{3x^2}{-2y}$$

$$\text{Ta có } -3x^2 \cdot (-2y) = 6x^2y; \quad 2y \cdot 3x^2 = 6x^2y$$

$$\Rightarrow -3x^2 \cdot (-2y) = 2y \cdot 3x^2$$

$$\text{Vậy } \frac{-3x^2}{2y} = \frac{3x^2}{-2y}$$

$$\text{b) } \frac{2xy}{3a} = \frac{8xy^2}{12ay}$$

$$\text{Ta có } 2xy \cdot 12ay = 24axy^2; \quad 3a \cdot 8xy^2 = 24axy^2$$

$$\Rightarrow 2xy \cdot 12ay = 3a \cdot 8xy^2$$

$$\text{Vậy } \frac{2xy}{3a} = \frac{8xy^2}{12ay}$$

$$\text{c) } \frac{2(x-y)}{3(y-x)} = \frac{-2}{3}$$

$$\text{Ta có } 2(x-y) \cdot 3 = 6(x-y); \quad -2 \cdot 3(y-x) = -6(y-x) = 6(x-y)$$

$$\Rightarrow 2(x-y) \cdot 3 = -2 \cdot 3(y-x)$$

$$\text{Vậy } \frac{2(x-y)}{3(y-x)} = \frac{-2}{3}$$

$$\text{d) } \frac{1-x}{2-y} = \frac{x-1}{y-2}$$

$$\text{Ta có } (1-x) \cdot (y-2) = -(x-1)(y-2); \quad (2-y) \cdot (x-1) = -(x-1)(y-2)$$

$$\Rightarrow (1-x) \cdot (y-2) = (2-y) \cdot (x-1)$$

$$\text{Vậy } \frac{1-x}{2-y} = \frac{x-1}{y-2}$$

Bài 7. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a) } \frac{x^2y^2}{7x^3y^4} = \frac{3}{21xy^2}$$

$$\text{Ta có } x^2y^2 \cdot 21xy^2 = 21x^3y^4; 7x^3y^4 \cdot 3 = 21x^3y^4$$

$$\Rightarrow x^2y^2 \cdot 21xy^2 = 7x^3y^4 \cdot 3$$

$$\text{Vậy } \frac{x^2y^2}{7x^3y^4} = \frac{3}{21xy^2}$$

$$\text{b) } \frac{x^3 - 9x}{18 - 6x} = \frac{-x^2 - 3x}{6}$$

$$\text{Ta có } (x^3 - 9x) \cdot 6 = 6x(x^2 - 9) = 6x(x - 3)(x + 3)$$

$$\text{Và } (18 - 6x)(-x^2 - 3x) = -x(x + 3) \cdot 6 \cdot (3 - x) = 6x(x + 3)(x - 3)$$

$$\Rightarrow (x^3 - 9x) \cdot 6 = (18 - 6x)(-x^2 - 3x)$$

$$\text{Vậy } \frac{x^3 - 9x}{18 - 6x} = \frac{-x^2 - 3x}{6}$$

$$\text{c) } \frac{3x(x+1)}{3} = \frac{x(x^2 + 2x + 1)}{x+1}$$

$$\text{Ta có } 3x(x+1) \cdot (x+1) = 3x(x+1)^2; 3 \cdot x(x^2 + 2x + 1) = 3x(x+1)^2$$

$$\Rightarrow 3x(x+1) \cdot (x+1) = 3 \cdot x(x^2 + 2x + 1)$$

$$\text{Vậy } \frac{3x(x+1)}{3} = \frac{x(x^2 + 2x + 1)}{x+1}$$

$$\text{d) } \frac{5+x}{5-x} = \frac{25-x^2}{x^2-10x+25}$$

$$\text{Ta có } (5+x)(x^2-10x+25) = (x+5)(x-5)^2$$

$$\text{Và } (5-x)(25-x^2) = (5-x)(5-x)(5+x) = (x+5)(5-x)^2 = (x+5)(x-5)^2$$

$$\Rightarrow (5+x)(x^2-10x+25) = (5-x)(25-x^2)$$

$$\text{Vậy } \frac{5+x}{5-x} = \frac{25-x^2}{x^2-10x+25}$$

$$e) \frac{2x^2(x^2+3)}{x(x^2+3)^2} = \frac{2x}{x^2+3}$$

$$\text{Ta có } 2x^2(x^2+3)(x^2+3) = 2x^2(x^2+3)^2; x(x^2+3)^2 \cdot 2x = 2x^2(x^2+3)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2(x^2+3)(x^2+3) = x(x^2+3)^2 \cdot 2x$$

$$\text{Vậy } \frac{2x^2(x^2+3)}{x(x^2+3)^2} = \frac{2x}{x^2+3}$$

$$f) \frac{x^3-27}{x^2+3x+9} = \frac{x^2-9}{x+3}$$

$$\text{Ta có } (x^3-27)(x+3) = (x-3)(x^2+3x+9)(x+3) = (x^2-9)(x^2+3x+9)$$

$$\text{Và } (x^2+3x+9) \cdot (x^2-9) = (x^2-9)(x^2+3x+9)$$

$$\Rightarrow (x^3-27)(x+3) = (x^2+3x+9) \cdot (x^2-9)$$

$$\text{Vậy } \frac{x^3-27}{x^2+3x+9} = \frac{x^2-9}{x+3}$$

Bài 8. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{2x^2+4x}{(x+2)^2} = \frac{2x}{x+2}$$

$$\text{Ta có } (2x^2+4x)(x+2) = 2x(x+2)(x+2) = 2x(x+2)^2; (x+2)^2 \cdot 2x = 2x(x+2)^2$$

$$\Rightarrow (2x^2+4x)(x+2) = (x+2)^2 \cdot 2x$$

$$\text{Vậy } \frac{2x^2+4x}{(x+2)^2} = \frac{2x}{x+2}$$

$$b) \frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+9}$$

$$\text{Ta có } (x+1)(x^2+6x+9) = (x+1)(x+3)^2$$

$$\text{Và } (x+3)(x^2+4x+3) = (x+3)(x+3)(x+1) = (x+3)^2(x+1)$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2+6x+9) = (x+3)(x^2+4x+3)$$

$$\text{Vậy } \frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+9}$$

$$c) \frac{x-2}{-x} = \frac{8-x^3}{x(x^2+2x+4)}$$

$$\text{Ta có } (x-2).x(x^2+2x+4) = x(x^3-8); -x(8-x^3) = x(x^3-8)$$

$$\Rightarrow (x-2).x(x^2+2x+4) = -x(8-x^3)$$

$$\text{Vậy } \frac{x-2}{-x} = \frac{8-x^3}{x(x^2+2x+4)}$$

$$d) \frac{x+y}{3x} = \frac{3x(x+y)^2}{9x^2(x+y)}$$

$$\text{Ta có } (x+y)9x^2(x+y) = 9x^2(x+y)^2; 3x.3x(x+y)^2 = 9x^2(x+y)^2$$

$$\Rightarrow (x+y)9x^2(x+y) = 3x.3x(x+y)^2$$

$$\text{Vậy } \frac{x+y}{3x} = \frac{3x(x+y)^2}{9x^2(x+y)}$$

Bài 9. Điền đa thức thích hợp vào chỗ chấm:

$$a) \frac{3x+15}{2x+10} = \frac{\dots}{2}$$

$$\text{Ta có } (3x+15).2 = 3.2.(x+5) = 3.(2x+10)$$

Vậy đa thức cần điền vào chỗ chấm là 3.

$$b) \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2-x}{\dots}$$

$$\text{Ta có } (x+1)(x^2-x) = (x+1).x.(x-1) = x(x-1)(x+1)$$

Vậy đa thức cần điền vào chỗ chấm là $x(x+1)$.

$$c) \frac{x}{x-4} = \frac{\dots}{x^2-16}$$

$$\text{Ta có } x(x^2-16) = x(x-4)(x+4)$$

Vậy đa thức cần điền vào chỗ chấm là $x(x+4)$.

$$d) \frac{x-1}{x-3} = \frac{\dots}{x^2-9}$$

$$\text{Ta có } (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x-3)(x+3)$$

Vậy đa thức cần điền vào chỗ chấm là $(x-1)(x+3)$.

Bài 10. Tìm đa thức A trong các đẳng thức sau:

$$a) \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{B}{x+2}$$

$$\text{Ta có } (x-2)(x+2) = (x^2-4).1$$

$$\text{Vậy } B = 1$$

$$b) \frac{x-3}{(x-1).B} = \frac{1}{x^2-4x+3}$$

$$\text{Ta có } (x-3)(x^2-4x+3) = (x-3)(x-3)(x-1) = (x-1)(x-3)^2$$

$$\text{Vậy } B = (x-3)^2$$

Bài 11.

$$\text{Ta có } (x^2+2x+1)x = x(x+1)^2; x(x+1)(x+1) = x(x+1)^2$$

$$\Rightarrow (x^2+2x+1)x = x(x+1)(x+1)$$

$$\text{Nên } \frac{x^2+2x+1}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } (x+1).2x = 2x(x+1); x(2x+2) = 2x(x+1)$$

$$\Rightarrow (x+1).2x = x(2x+2)$$

$$\text{Nên } \frac{x+1}{x} = \frac{2x+2}{2x} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{x^2+2x+1}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x} = \frac{2x+2}{2x}$$

Bài 12.

$$\text{Ta có } (2x+3)(15x-120) = 30x^2 - 240x + 45x - 360 = 30x^2 - 195x - 360$$

$$\text{Và } 15(2x^2 - 13x - 24) = 30x^2 - 195x - 360$$

$$\Rightarrow (2x+3)(15x-120) = 15(2x^2 - 13x - 24)$$

$$\text{Nên } \frac{2x+3}{15} = \frac{2x^2 - 13x - 24}{15x - 120} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } (2x+3)(75x-30) = 150x^2 - 60x + 225x - 90 = 150x^2 + 165x - 90$$

$$\text{Và } 15(10x^2 + 11x - 6) = 150x^2 + 165x - 90$$

Nên $\frac{2x+3}{15} = \frac{10x^2+11x-6}{75x-30}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{2x+3}{15} = \frac{2x^2-13x-24}{15x-120} = \frac{10x^2+11x-6}{75x-30}$

Bài 13.

Ta có $x(x-1)(x^2+x+1) = x(x^3-1)$

Nên $\frac{x^3-1}{x(x-1)} = \frac{x^2+x+1}{x}$ (1)

Lại có $x(x-1)(x^3+x^2+x) = x(x-1).x(x^2+x+1) = x^2(x^3-1)$

Nên $\frac{x^3-1}{x(x-1)} = \frac{x^3+x^2+x}{x^2}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\frac{x^3-1}{x(x-1)} = \frac{x^2+x+1}{x} = \frac{x^3+x^2+x}{x^2}$

Bài 14.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (2x^2+xy-y^2)(x-y) &= (2x^2+2xy-xy-y^2)(x-y) \\ &= [2x(x+y)-y(x+y)](x-y) \\ &= (x+y)(2x-y)(x-y) = (x^2-y^2)(2x-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Và } (2x^2-3xy+y^2)(x+y) &= (2x^2-2xy-xy+y^2)(x+y) \\ &= [2x(x-y)-y(x-y)](x+y) \\ &= (x-y)(2x-y)(x+y) = (x^2-y^2)(2x-y) \end{aligned}$$

Suy ra $(2x^2+xy-y^2)(x-y) = (2x^2-3xy+y^2)(x+y)$

Vậy $\frac{2x^2+xy-y^2}{2x^2-3xy+y^2} = \frac{x+y}{x-y}$

Bài 15. $A = \frac{x^2+1}{x+1}$ ($x \neq -1$)

Ta có $2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ (tmđk)

Thay $x=1$ vào phân thức A, ta có $A = \frac{1^2+1}{1+1} = 1$

Vậy với $x=1$ thì $A=1$

Bài 16. $B = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1} \quad (x \neq -1)$

Ta có $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (TM) \\ x = -1 & (KTM) \end{cases}$

Thay $x = 1$ vào phân thức B, ta có $B = \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 6}{1 + 1} = 1$

Vậy với $x = 1$ thì $B = 1$.

Bài 17. $C = \frac{x + 3}{x^2 - 1} \quad (x \neq \pm 1)$ với $|x + 1| = 3$.

Ta có $|x + 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 3 \\ x + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$

+ Với $x = 2$, thay vào C ta được $C = \frac{2 + 3}{2^2 - 1} = \frac{5}{3}$

+ Với $x = -4$, thay vào C ta được $C = \frac{-4 + 3}{(-4)^2 - 1} = \frac{-1}{15}$

Vậy với $x = 2$ thì $C = \frac{5}{3}$, với $x = -4$ thì $C = \frac{-1}{15}$.

Bài 18.

a) $\frac{x + 3}{x - 3} \cdot \frac{x + 3}{x - 3}$

Xét $\frac{x + 3}{x - 3} = 0$ Đkxd: $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ (thỏa mãn)

Vậy $x = -3$

b) $\frac{3x - 6}{x^2 + 2}$

Đkxd: $x^2 + 2 \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

Xét $\frac{3x - 6}{x^2 + 2} = 0 \Leftrightarrow 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 2$

c) $\frac{5x^2 - 125}{x^2 + 1}$

Đkxd: $x^2 + 1 \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

Xét $\frac{5x^2 - 125}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 125 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$ (thỏa mãn)

Vậy $x = \pm 5$

d) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 5}$

Ta có $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \neq 0 (\forall x \in \mathbb{R})$

Xét $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 5} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 2$

Bài 19.

a) $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x^2 - 4x + 3}$

Xét $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x^2 - 4x + 3} = 0$. Đkxđ: $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (KTM) \\ x = -2 & (TM) \end{cases}$

Vậy $x = -2$

b) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$

Xét $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = 0$. Đkxđ: $x^2 + 3x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & (KTM) \\ x = -2 & (TM) \end{cases}$

Vậy $x = -2$

c) $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x - 3}$

Xét $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x - 3} = 0$ (1)

Đkxđ: $x^3 + 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x^2 - x + 3x - 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 1) + x(x - 1) + 3(x - 1) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

(1) $\Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 1) - (x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 & (TM) \\ x=1 & (KTM) \end{cases}$$

Vậy $x = -1$

Bài 20.

$$a) \frac{4}{x+2} = \frac{7}{3x+1} \quad \text{Đkxd: } \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ 3x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4(3x+1) = 7(x+2) \Leftrightarrow 12x+4 = 7x+14 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy $x = 2$

$$b) \frac{1}{1-2x} = \frac{x+2}{4x^2-1} \quad \text{Đkxd: } \begin{cases} 4x^2-1 \neq 0 \\ 1-2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 1 = (1-2x)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 1 - (1-2x)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) + (2x-1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1+x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(3x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 3x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} & (KTM) \\ x = -1 & (TM) \end{cases}$$

Vậy $x = -1$

$$c) \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{Đkxd: } \begin{cases} (x-2)^2 \neq 0 \\ (x+1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$4(x+1)^2 = (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+2x+1) = x^2-4x+4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+8x+4 = x^2-4x+4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+12=0 \Leftrightarrow 3x(x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = -4$

$$d) \frac{x+2}{x-3} = \frac{x+1}{x+2} \text{ Đkxđ: } \begin{cases} x-3 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = (x+1)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 - 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow 6x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{6} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-7}{6}$$

Bài 21.

$$\text{Ta có } (ac + bx + bc + ax)(2x + y) = [c(a+b) + x(a+b)](2x + y) = (a+b)(c+x)(2x+y)$$

$$\text{Và } (ay + 2bx + by + 2ax)(x+c) = [y(a+b) + 2x(a+b)](x+c) = (a+b)(2x+y)(x+c)$$

$$(ac + bx + bc + ax)(2x + y) = (ay + 2bx + by + 2ax)(x + c)$$

$$\text{Vậy } \frac{ac + bx + bc + ax}{ay + 2bx + by + 2ax} = \frac{x+c}{2x+y}$$

Bài 22. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\text{Ta có } (a^3 - 4a^2 - a + 4)(a-2) = [a^2(a-4) - (a-4)](a-2) = (a^2-1)(a-4)(a-2)$$

$$\text{Và } (a^3 - 7a^2 + 14a - 8)(a+1) = (a^3 - a^2 - 6a^2 + 6a + 8a - 8)(a+1)$$

$$= [a^2(a-1) - 6a(a-1) + 8(a-1)](a+1) = (a-1)(a^2 - 6a + 8)(a+1)$$

$$= (a^2-1)(a-2)(a-4)$$

$$\Rightarrow (a^3 - 4a^2 - a + 4)(a-2) = (a^3 - 7a^2 + 14a - 8)(a+1)$$

$$\text{Vậy } \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a+1}{a-2}$$

BÀI 22. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

VD 1.1. Rút gọn các phân thức sau:

$$a) \frac{-3x^2y^3}{6x^3y^3} = \frac{-1}{2x}$$

$$b) \frac{12xy^3z^4}{34x^3y^2z} = \frac{6yz^3}{17x^2}$$

$$c) \frac{xy+3y}{xy} = \frac{y(x+3)}{xy} = \frac{x+3}{x}$$

VD 1.2. Rút gọn các phân thức sau:

$$a) \frac{-3x+3y}{x-y} = \frac{-3(x-y)}{x-y} = -3$$

$$b) \frac{x^2-4x+4}{x^2-7x+10} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-2}{x-5}$$

$$c) \frac{x^2+3x-y^2-3y}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)(x+y)+3(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{(x-y)(x+y+3)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y+3}{x+y}$$

VD 1.3.

Với $x < 0$ thì $x-1 < 0$, do đó $|x| = -x$ và $|x-1| = 1-x$.

Ta có

$$A = \frac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1} = \frac{1-x-x+x}{3x^2-3x-x+1} = \frac{1-x}{(3x-1)(x-1)} = \frac{-(x-1)}{(3x-1)(x-1)} = \frac{-1}{3x-1} = \frac{1}{1-3x}$$

VD 2.1.

$$a) A = \frac{2x+2}{x^2+2x+1} \text{ với } x=1$$

$$\text{Ta có } A = \frac{2x+2}{x^2+2x+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1}$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào } A, \text{ ta được } A = \frac{2}{1+1} = 1$$

Vậy với $x=1$ thì $A=1$.

$$b) B = \frac{3x^2+3x}{x^2-1} \text{ với } x=-2$$

$$\text{Ta có } B = \frac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1} = \frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{x-1}$$

$$\text{Thay } x = -2 \text{ vào A, ta được } B = \frac{3 \cdot (-2)}{-2-1} = 2$$

Vậy với $x = -2$ thì $B = 2$.

VD 2.2.

$$\text{a) } M = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^3 - 4x} \text{ với } x = 98$$

$$\text{Ta có } M = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^3 - 4x} = \frac{x(x^2 + x - 6)}{x(x^2 - 4)} = \frac{x(x+3)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

$$\text{Thay } x = 98 \text{ vào M, ta được } M = \frac{98+3}{98+2} = \frac{101}{100}$$

$$\text{Vậy với } x = 98 \text{ thì } M = \frac{101}{100}$$

$$\text{b) } M = \frac{x^4y - xy^4}{x^2 + xy + y^2} \text{ với } x = \frac{1}{3}; y = 3$$

$$\text{Ta có } M = \frac{x^4y - xy^4}{x^2 + xy + y^2} = \frac{xy(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = xy(x-y)$$

$$\text{Thay } x = \frac{1}{3}; y = 3 \text{ vào M, ta được } M = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{8}{9}.$$

$$\text{Vậy với } x = \frac{1}{3}; y = 3 \text{ thì } M = -\frac{8}{9}.$$

VD 3.1.

$$\text{Ta có } A = \frac{9x-6}{3x^2+3x-(2x+2)} = \frac{3(3x-2)}{3x(x+1)-2(x+1)} = \frac{3(3x-2)}{(x+1)(3x-2)} = \frac{3}{x+1}$$

$$B = \frac{3x^2-3x+3}{x^3+1} = \frac{3(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{3}{x+1}$$

Vậy $A = B$.

VD 3.2.

$$\text{Ta có } C = \frac{y^2+5y+6}{3y+6} = \frac{(y+2)(y+3)}{3(y+2)} = \frac{y+3}{3}$$

$$D = \frac{2y^2 + 5y - 3}{6y - 3} = \frac{2y^2 - y + 6y - 3}{3(2y - 1)} = \frac{y(2y - 1) + 3(2y - 1)}{3(2y - 1)} = \frac{(2y - 1)(y + 3)}{3(2y - 1)} = \frac{y + 3}{3}$$

Vậy $C = D$.

VD 3.3.

$$a) \frac{6b^2 - 9b}{4b^2 - 9} = \frac{3b}{A}$$

$$\text{Ta có } A = \frac{(4b^2 - 9) \cdot 3b}{6b^2 - 9b} = \frac{(2b - 3)(2b + 3)3b}{3b(2b - 3)} = 2b + 3$$

Vậy $A = 2b + 3$

$$b) \frac{-x^2 + 2xy - y^2}{x + y} = \frac{A}{y^2 - x^2}$$

$$\text{Ta có } A = \frac{(-x^2 + 2xy - y^2)(y^2 - x^2)}{x + y} = \frac{-(x - y)^2(y - x)(y + x)}{x + y} = (x - y)^3$$

Vậy $A = (x - y)^3$

VD 3.4.

$$\text{Do } A = 12x^2 + 9x = 3x(4x + 3)$$

$$\text{Nên ta có } B = \frac{4x + 3}{x^2 - 5} = \frac{(4x + 3) \cdot 3x}{(x^2 - 5) \cdot 3x} = \frac{12x^2 + 9x}{3x^3 - 15x}$$

VD 4.1.

$$a) A = \frac{x^2 - y^2}{(x + y)(ay - ax)}$$

$$\text{Ta có } A = \frac{x^2 - y^2}{(x + y)(ay - ax)} = \frac{(x - y)(x + y)}{(x + y) \cdot a \cdot (y - x)} = \frac{-(x - y)}{a(x - y)} = \frac{-1}{a}$$

Vậy giá trị biểu thức A không phụ thuộc vào biến x, y .

$$b) B = \frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay}$$

$$\text{Ta có } B = \frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay} = \frac{2x(a - 1) - 3y(1 - a)}{2a(2x + 3y) + 3(2x + 3y)} = \frac{(a - 1)(2x + 3y)}{(2x + 3y)(2a + 3)} = \frac{a - 1}{2a + 3}$$

Vậy giá trị biểu thức B không phụ thuộc vào biến x, y .

VD 4.2.

$$\text{Ta có } D = \frac{9x^2 - 1}{1 - 3x} + \frac{3xy - 3x + 2y - 2}{y - 1}$$

$$D = -\frac{(3x - 1)(3x + 1)}{3x - 1} + \frac{y(3x + 2y) - (3x + 2y)}{y - 1}$$

$$D = -(3x + 1) + \frac{(3x + 2y)(y - 1)}{y - 1}$$

$$D = -3x - 1 + 3x + 2y = 2y - 1$$

Vậy giá trị biểu thức D không phụ thuộc vào biến x.

VD 5.1.

$$\text{a) } \frac{2}{3xy^4} \text{ và } \frac{5}{6x^2y^3}$$

$$\text{MTC: } 6x^2y^4$$

$$\text{Ta có } \frac{2}{3xy^4} = \frac{2 \cdot 2x}{3xy^4 \cdot 2x} = \frac{4x}{6x^2y^4}; \frac{5}{6x^2y^3} = \frac{5y}{6x^2y^3 \cdot y} = \frac{5y}{6x^2y^4}$$

$$\text{b) } \frac{4}{x^2 - 25} \text{ và } \frac{3}{4x - 20}$$

$$\text{Ta có } \frac{4}{x^2 - 25} = \frac{4}{(x - 5)(x + 5)}; \frac{3}{4x - 20} = \frac{3}{4(x - 5)}$$

$$\text{MTC: } 4(x - 5)(x + 5)$$

$$\frac{4}{x^2 - 25} = \frac{4}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{4 \cdot 4}{(x - 5)(x + 5) \cdot 4} = \frac{16}{4(x - 5)(x + 5)}$$

$$\frac{3}{4x - 20} = \frac{3}{4(x - 5)} = \frac{3(x + 5)}{4(x - 5)(x + 5)}$$

$$\text{c) } \frac{5x}{x^2 - 4} \text{ và } \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\text{Ta có } \frac{5x}{x^2 - 4} = \frac{5x}{(x - 2)(x + 2)}; \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{x + 1}{(x - 2)^2}$$

$$\text{MTC: } (x - 2)^2(x + 2)$$

$$\frac{5x}{x^2-4} = \frac{5x}{(x-2)(x+2)} = \frac{5x(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-2)} = \frac{5x}{(x-2)^2(x+2)}$$

$$\frac{x+1}{x^2-4x+4} = \frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}$$

VD 5.2. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a) $\frac{x}{x+3}$; $\frac{1}{3-x}$ và $\frac{1}{x^2-9}$

Ta có $\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$

MTC: $(x-3)(x+3)$

$$\frac{x}{x+3} = \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}; \frac{1}{3-x} = \frac{-1}{x-3} = \frac{-x-3}{(x-3)(x+3)}$$

b) $\frac{1}{3x-12}$; $\frac{2}{3x+12}$ và $\frac{3}{16-x^2}$

Ta có $\frac{1}{3x-12} = \frac{1}{3(x-4)}$; $\frac{2}{3x+12} = \frac{2}{3(x+4)}$ và $\frac{3}{16-x^2} = \frac{-3}{x^2-16} = \frac{-3}{(x-4)(x+4)}$

MTC: $3(x-4)(x+4)$

$$\frac{1}{3x-12} = \frac{1}{3(x-4)} = \frac{x+4}{3(x-4)(x+4)};$$

$$\frac{2}{3x+12} = \frac{2}{3(x+4)} = \frac{2(x-4)}{3(x-4)(x+4)};$$

$$\frac{3}{16-x^2} = \frac{-3}{x^2-16} = \frac{-3}{(x-4)(x+4)} = \frac{-9}{3(x-4)(x+4)}.$$

c) $\frac{1}{x^3+1}$; $\frac{2}{x+1}$ và $\frac{3}{x^2-x+1}$

MTC: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}; \frac{2}{x+1} = \frac{2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}; \frac{3}{x^2-x+1} = \frac{3(x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)}$$

VD 5.3.

$$a) \frac{3x+6}{x^2-4}; \frac{5x}{x^2-2x} \text{ và } \frac{1-x}{x^2-3x+2}$$

$$\text{Ta có } \frac{3x+6}{x^2-4} = \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{x-2}; \frac{5x}{x^2-2x} = \frac{5x}{x(x-2)};$$

$$\frac{1-x}{x^2-3x+2} = \frac{-(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-2}$$

$$\text{MTC: } x(x-2)$$

$$\frac{3x+6}{x^2-4} = \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{x-2} = \frac{3x}{x(x-2)}$$

$$\frac{1-x}{x^2-3x+2} = \frac{-(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-2} = \frac{-x}{x(x-2)}$$

$$b) \frac{1}{x^2+xy}; \frac{1}{xy-y^2} \text{ và } \frac{2}{y^2-x^2}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{x^2+xy} = \frac{1}{x(x+y)}; \frac{1}{xy-y^2} = \frac{1}{y(x-y)} \text{ và } \frac{2}{y^2-x^2} = \frac{-2}{(x-y)(x+y)}$$

$$\text{MTC: } xy(x-y)(x+y)$$

$$\frac{1}{x^2+xy} = \frac{1}{x(x+y)} = \frac{y(x-y)}{xy(x-y)(x+y)}; \frac{1}{xy-y^2} = \frac{1}{y(x-y)} = \frac{x(x+y)}{xy(x-y)(x+y)}$$

$$\frac{2}{y^2-x^2} = \frac{-2}{(x-y)(x+y)} = \frac{-2xy}{xy(x-y)(x+y)}$$

VD 6.1.

$$A = \frac{3}{2x-1} \text{ Đkxd: } 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

Để A nguyên thì $\frac{3}{2x-1}$ nguyên, $\frac{3}{2x-1}$ nguyên khi $3 : (2x-1)$

Hay $2x-1 \in U(3)$ hay $2x-1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng sau:

$2x-1$	-3	-1	1	3
x	-1	0	1	2

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$

Vậy $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$ thì A nguyên.

VD 6.2.

$$B = \frac{x^2 + 2x + 6}{x + 2} \quad \text{Đkxđ: } x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

$$\text{Ta có } B = \frac{x^2 + 2x + 6}{x + 2} = \frac{x(x + 2) + 6}{x + 2} = x + \frac{6}{x + 2}$$

Để B nguyên thì $\frac{6}{x + 2}$ nguyên, $\frac{6}{x + 2}$ nguyên khi $6 : (x + 2)$ hay $x + 2 \in U(6)$

Hay $x + 2 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Ta có bảng sau:

$x + 2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
x	-8	-5	-4	-3	-1	0	1	4

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{-8; -5; -4; -3; -1; 0; 1; 4\}$

Vậy $x \in \{-8; -5; -4; -3; -1; 0; 1; 4\}$ thì B nguyên

VD 7.1.

$$\text{a) } A = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Đkxđ: $x^2 + 3 \neq 0$ (luôn đúng với mọi x)

Vì $x^2 \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 \geq 3 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{3} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow A \leq \frac{1}{3} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị lớn nhất của $A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 0$

$$\text{b) } B = \frac{12}{4x^2 + 12x + 11}$$

$$\text{Ta có } B = \frac{12}{4x^2 + 12x + 11} = \frac{12}{4x^2 + 12x + 9 + 2} = \frac{12}{(2x + 3)^2 + 2}$$

$$\text{Đkxd: } (2x+3)^2 + 2 \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Vi } (2x+3)^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)^2 + 2 \geq 2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(2x+3)^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{(2x+3)^2 + 2} \leq 6 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow B \leq 6 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } (2x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } A = 6 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

VD 7.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{3}{-x^2 - 4}$$

$$\text{Đkxd: } -x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 \neq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } x \text{)}$$

$$\text{Vi } x^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 4 \leq -4 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-x^2 - 4} \geq \frac{-1}{4} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{-x^2 - 4} \geq \frac{-3}{4} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow A \geq \frac{-3}{4} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } A = \frac{-3}{4} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{b) } B = \frac{2}{-x^2 + 2x - 4}$$

$$\text{Ta có } B = \frac{2}{-x^2 + 2x - 4} = \frac{2}{-x^2 + 2x - 1 - 3} = \frac{2}{-(x-1)^2 - 3}$$

Đkxđ: $-(x-1)^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 3 \neq 0$ (luôn đúng với mọi x)

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow -(x-1)^2 - 3 \leq -3$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{-(x-1)^2 - 3} \geq \frac{-1}{3}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \frac{2}{-(x-1)^2 - 3} \geq \frac{-2}{3}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow B \geq \frac{-2}{3}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow x=1$

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

a) $\frac{25x^2y(x+1)^3}{30xy(x+1)} = \frac{5x(x+1)^2}{6}$

b) $\frac{60xy(3x-2)^3}{45xy^2(2-3x)} = \frac{-4(3x-2)^2}{3y}$

c) $\frac{x^2-2x}{x^3-4x} = \frac{x(x-2)}{x(x^2-4)} = \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$

d) $\frac{12-3x}{x^2-8x+16} = \frac{3(4-x)}{(x-4)^2} = \frac{-3(x-4)}{(x-4)^2} = \frac{-3}{x-4}$

Bài 2.

a) $\frac{2x^2-2xy}{x^2+x-xy-y} = \frac{2x(x-y)}{x(x+1)-y(x+1)} = \frac{2x(x-y)}{(x-y)(x+1)} = \frac{2x}{x+1}$

b) $\frac{y(2x-x^2)(y+2)}{x(2y+y^2)(x-2)} = \frac{yx(2-x)(y+2)}{xy(2+y)(x-2)} = -1$

Bài 3.

$$a) \frac{x^2 - 4x}{16 - x^2} = \frac{-x(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{-x}{x+4}$$

$$b) \frac{2x - 6y}{x^2 - 9y^2} = \frac{2(x-3y)}{(x-3y)(x+3y)} = \frac{2}{x+3y}$$

$$c) \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 1}{x^2 + 2x + 1 - y^2} = \frac{(x+y)^2 - 1}{(x+1)^2 - y^2} = \frac{(x+y-1)(x+y+1)}{(x-y+1)(x+y+1)} = \frac{x+y-1}{x-y+1}$$

$$d) \frac{y^2 - x^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3} = \frac{-(x-y)(x+y)}{(x-y)^3} = \frac{-(x+y)}{(x-y)^2}$$

Bài 4. $A = \frac{3|x-1| + 5|x-3|}{x^2 - 12x + 36}$ với $1 < x < 3$

Do $1 < x < 3$ nên $x-1 > 0$ và $x-3 < 0$

$$\text{Ta có } A = \frac{3(x-1) + 5(3-x)}{x^2 - 12x + 36} = \frac{3x - 3 + 15 - 5x}{(x-6)^2} = \frac{12 - 2x}{(x-6)^2} = \frac{-2(x-6)}{(x-6)^2} = \frac{-2}{x-6}$$

Bài 5.

$$a) \frac{2}{2x-3} = \frac{3x+6}{2x^2+x-6}$$

Ta có

$$VP = \frac{3x+6}{2x^2+x-6} = \frac{3(x+2)}{2x^2+4x-3x-6} = \frac{3(x+2)}{2x(x+2)-3(x+2)} = \frac{3(x+2)}{(x+2)(2x-3)} = \frac{3}{2x-3} = VT$$

$\Rightarrow VP = VT$ (đpcm)

$$b) \frac{2}{x+4} = \frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x}$$

$$\text{Ta có } VP = \frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x} = \frac{2x(x+3)}{x(x^2+7x+12)} = \frac{2x(x+3)}{x(x+3)(x+4)} = \frac{2}{x+4} = VT$$

$\Rightarrow VP = VT$ (đpcm)

Bài 6.

$$a) \frac{x^2+2x+1}{3x^3+3x^2} = \frac{x+1}{3x^2}$$

$$\text{Ta có } VT = \frac{x^2+2x+1}{3x^3+3x^2} = \frac{(x+1)^2}{3x^2(x+1)} = \frac{x+1}{3x^2} = VP$$

$\Rightarrow VP = VT$ (đpcm)

$$b) \frac{(x+a)^2 - 4x^2}{a^2 + 9x^2 + 6ax} = \frac{a-x}{a+3x}$$

$$\text{Ta có } VT = \frac{(x+a)^2 - 4x^2}{a^2 + 9x^2 + 6ax} = \frac{(x+a-2x)(x+a+2x)}{(a+3x)^2} = \frac{(a-x)(a+3x)}{(a+3x)^2} = \frac{a-x}{a+3x} = VP$$

$\Rightarrow VP = VT$ (đpcm)

Bài 7.

$$a) \frac{A}{x-2} = \frac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4}$$

$$\text{Ta có } \frac{A}{x-2} = \frac{A}{x^2 - 4} \Rightarrow A = \frac{(x-2)(2x^3 + 4x^2)}{x^2 - 4} = \frac{(x-2) \cdot 2x^2 \cdot (x+2)}{(x-2)(x+2)} = 2x^2$$

Vậy $A = 2x^2$

$$b) \frac{x^2 + 8}{2x - 1} = \frac{2x^3 + 16x}{A}$$

$$A = \frac{(2x^3 + 16x)(2x - 1)}{x^2 + 8} = \frac{2x(x^2 + 8)(2x - 1)}{x^2 + 8} = 2x(2x - 1)$$

Vậy $A = 2x(2x - 1)$

Bài 8.

$$\text{Ta có } \frac{12x^2 - 12x + 3}{(6x - 3)(5 - x)} = \frac{3(4x^2 - 4x + 1)}{3(2x - 1)(5 - x)} = \frac{(2x - 1)^2}{(2x - 1)(5 - x)} = \frac{2x - 1}{5 - x} = \frac{-(1 - 2x)}{5 - x} = \frac{1 - 2x}{x - 5}$$

Vậy đa thức cần tìm là $\frac{1 - 2x}{x - 5}$

$$\text{Bài 9. } \frac{2x^2 + 3xy + y^2}{2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3} = \frac{1}{x - y}$$

$$\text{Ta có } VT = \frac{2x^2 + 3xy + y^2}{2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3} = \frac{2x^2 + 2xy + xy + y^2}{x^2(2x + y) - y^2(2x + y)} = \frac{2x(x + y) + y(x + y)}{(2x + y)(x^2 - y^2)}$$

$$VT = \frac{(x + y)(2x + y)}{(2x + y)(x^2 - y^2)} = \frac{x + y}{(x - y)(x + y)} = \frac{1}{x - y} = VP$$

$\Rightarrow VP = VT$ (đpcm)

Bài 10.

$$\text{a) } A = \frac{3x^2 - 2x}{9x^2 - 12x + 4} \text{ tại } x = -8$$

$$\text{Ta có } A = \frac{3x^2 - 2x}{9x^2 - 12x + 4} = \frac{x(3x - 2)}{(3x - 2)^2} = \frac{x}{3x - 2}$$

$$\text{Thay } x = -8 \text{ vào } A, \text{ ta được } A = \frac{-8}{3 \cdot (-8) - 2} = \frac{-8}{-26} = \frac{4}{13}$$

$$\text{Vậy với } x = -8 \text{ thì } A = \frac{4}{13}.$$

$$\text{b) } B = \frac{a^2 + 7a + 6}{a^3 + 6a^2 - a - 6} \text{ tại } a = 1001$$

$$\text{Ta có } B = \frac{a^2 + 7a + 6}{a^3 + 6a^2 - a - 6} = \frac{a^2 + a + 6a + 6}{a(a^2 - 1) + 6(a^2 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{a(a+1) + 6(a+1)}{(a^2 - 1)(a+6)} = \frac{(a+1)(a+6)}{(a-1)(a+1)(a+6)} = \frac{1}{a-1}$$

$$\text{Thay } a = 1001 \text{ vào } B, \text{ ta được } B = \frac{1}{1001 - 1} = \frac{1}{1000}$$

$$\text{Vậy với } a = 1001 \text{ thì } B = \frac{1}{1000}.$$

Bài 11. Tính giá trị của các phân thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1} \text{ tại } 3x - 1 = 0$$

$$\text{Ta có } A = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-3}{x+1} \text{ Đkxd: } x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

$$\text{Với } 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Thay } x = \frac{1}{3} \text{ vào } A, \text{ ta được } A = \frac{\frac{1}{3} - 3}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = -2$$

$$\text{Vậy với } x = \frac{1}{3} \text{ thì } A = -2$$

$$\text{b) } B = \frac{x-2}{x^2-5x+6} \text{ tại } x^2-4=0$$

Ta có $B = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)}$ Đkxđ: $x \neq \{2;3\}$

$$\Rightarrow B = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

Với $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & (KTM) \\ x = -2 & (TM) \end{cases}$

Thay $x = -2$ vào B, ta được $B = \frac{1}{-2-3} = \frac{-1}{5}$

Vậy với $x = -2$ thì $B = \frac{-1}{5}$

Bài 12.

a) $A = \frac{(x+a)^2 - x^2}{2x+a}$

$$A = \frac{(x+a)^2 - x^2}{2x+a} = \frac{(x+a-x)(x+a+x)}{2x+a} = \frac{a(2x+a)}{2x+a} = a$$

Vậy giá trị biểu thức A không phụ thuộc vào biến x.

b) $B = \frac{ax^2 - a}{x+1} - \frac{axy + ax - ay - a}{y+1}$

$$B = \frac{ax^2 - a}{x+1} - \frac{axy + ax - ay - a}{y+1} = \frac{a(x^2 - 1)}{x+1} - \frac{ax(y+1) - a(y+1)}{y+1} = \frac{a(x-1)(x+1)}{x+1} - \frac{(y+1)(ax-a)}{y+1}$$

$$B = a(x-1) - (ax-a) = ax - a - ax + a = 0$$

Vậy giá trị biểu thức B không phụ thuộc vào biến x, y.

Bài 13.

a) $\frac{1}{6x^2y}$ và $\frac{1}{4x^3y^2}$

MTC: $12x^3y^2$

$$\frac{1}{6x^2y} = \frac{2xy}{6x^2y \cdot 2xy} = \frac{2xy}{12x^3y^2}; \quad \frac{1}{4x^3y^2} = \frac{3}{4x^3y^2 \cdot 3} = \frac{3}{12x^3y^2}$$

b) $\frac{1}{x^2 - 2x + 1}$ và $\frac{2}{x^2 + x}$

Ta có $\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{(x-1)^2}; \quad \frac{2}{x^2 + x} = \frac{2}{x(x+1)}$

MTC: $x(x+1)(x-1)^2$

$$\frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)^2}; \quad \frac{2}{x^2+x} = \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)^2}$$

c) $\frac{3}{2x+6}$ và $\frac{x-2}{x^2+6x+9}$

Ta có $\frac{3}{2x+6} = \frac{3}{2(x+3)}$; $\frac{x-2}{x^2+6x+9} = \frac{x-2}{(x+3)^2}$

MTC: $(x+3)^2$

$$\frac{3}{2x+6} = \frac{3}{2(x+3)} = \frac{3(x+3)}{2(x+3)^2}; \quad \frac{x-2}{x^2+6x+9} = \frac{x-2}{(x+3)^2} = \frac{2(x-2)}{2(x+3)^2}$$

d) $\frac{1}{x^2+8x+15}$ và $\frac{1}{x^2+6x+9}$

Ta có $\frac{1}{x^2+8x+15} = \frac{1}{(x+3)(x+5)}$; $\frac{1}{x^2+6x+9} = \frac{1}{(x+3)^2}$

MTC: $(x+3)^2(x+5)$

$$\frac{1}{x^2+8x+15} = \frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{x+3}{(x+3)^2(x+5)}; \quad \frac{1}{x^2+6x+9} = \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{x+5}{(x+3)^2(x+5)}$$

Bài 14.

a) $\frac{5}{2x-4}$; $\frac{4}{3x-9}$ và $\frac{7}{50-25x}$

Ta có $\frac{5}{2x-4} = \frac{5}{2(x-2)}$; $\frac{4}{3x-9} = \frac{4}{3(x-3)}$; $\frac{7}{50-25x} = \frac{7}{25(2-x)}$

MTC: $150(x-2)(x-3)$

$$\frac{5}{2x-4} = \frac{5}{2(x-2)} = \frac{375(x-3)}{150(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{4}{3x-9} = \frac{4}{3(x-3)} = \frac{200(x-2)}{150(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{7}{50-25x} = \frac{7}{25(2-x)} = \frac{-7 \cdot 6 \cdot (x-3)}{150(x-2)(x-3)} = \frac{-42(x-3)}{150(x-2)(x-3)}$$

b) $\frac{1}{2x+4}$; $\frac{x}{2x-4}$ và $\frac{11}{4-x^2}$

Ta có $\frac{1}{2x+4} = \frac{1}{2(x+2)}$; $\frac{x}{2x-4} = \frac{x}{2(x-2)}$; $\frac{11}{4-x^2} = \frac{-11}{(x-2)(x+2)}$

MTC: $2(x-2)(x+2)$

$$\frac{1}{2x+4} = \frac{1}{2(x+2)} = \frac{x-2}{2(x-2)(x+2)}; \frac{x}{2x-4} = \frac{x}{2(x-2)} = \frac{x(x+2)}{2(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{11}{4-x^2} = \frac{-11}{(x-2)(x+2)} = \frac{-11 \cdot 2}{2(x-2)(x+2)} = \frac{-22}{2(x-2)(x+2)}$$

c) $\frac{x}{x^3+1}$; $\frac{2}{x(x+1)}$ và $\frac{x+2}{x^2-x+1}$

Ta có $\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}$

MTC: $x(x+1)(x^2-x+1)$

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x^2}{x(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{2}{x(x+1)} = \frac{2(x^2-x+1)}{x(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{x+2}{x^2-x+1} = \frac{(x+2)x \cdot (x+1)}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x^2-x+1)}$$

Bài 15.

a) $\frac{x-y}{2x^2-4xy+2y^2}$; $\frac{x+y}{2x^2+4xy+2y^2}$ và $\frac{1}{y^2-x^2}$

Ta có $\frac{x-y}{2x^2-4xy+2y^2} = \frac{x-y}{2(x-y)^2} = \frac{1}{2(x-y)}$; $\frac{x+y}{2x^2+4xy+2y^2} = \frac{x+y}{2(x+y)^2} = \frac{1}{2(x+y)}$

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \frac{-1}{x^2 - y^2} = \frac{-1}{(x-y)(x+y)}$$

MTC: $2(x-y)(x+y)$

$$\frac{x-y}{2x^2 - 4xy + 2y^2} = \frac{x-y}{2(x-y)^2} = \frac{1}{2(x-y)} = \frac{x+y}{2(x-y)(x+y)}$$

$$\frac{x+y}{2x^2 + 4xy + 2y^2} = \frac{x+y}{2(x+y)^2} = \frac{1}{2(x+y)} = \frac{x-y}{2(x-y)(x+y)}$$

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \frac{-1}{x^2 - y^2} = \frac{-1}{(x-y)(x+y)} = \frac{-2}{2(x-y)(x+y)}$$

b) $\frac{1}{(a-b)(b-c)}$; $\frac{1}{(c-b)(c-a)}$ và $\frac{1}{(b-a)(a-c)}$

Ta có $\frac{1}{(c-b)(c-a)} = \frac{1}{(b-c)(a-c)}$; $\frac{1}{(b-a)(a-c)} = \frac{-1}{(a-b)(a-c)}$

MTC: $(a-b)(a-c)(b-c)$

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} = \frac{a-c}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{1}{(c-b)(c-a)} = \frac{1}{(b-c)(a-c)} = \frac{a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{1}{(b-a)(a-c)} = \frac{-1}{(a-b)(a-c)} = \frac{-(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{c-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Bài 16.

a) $A = \frac{5}{x^2 + 1}$ Đkxđ: $x^2 + 1 \neq 0$ (luôn đúng $\forall x$)

Để A nguyên thì $\frac{5}{x^2 + 1}$ nguyên, $\frac{5}{x^2 + 1}$ nguyên khi $5 : (x^2 + 1)$

Hay $x^2 + 1 \in U(5)$ hay $x^2 + 1 \in \{-5; -1; 1; 5\}$

Mà $x^2 + 1 \geq 1 (\forall x \in \mathbb{R})$ nên $x^2 + 1 \in \{1; 5\}$

$$\Leftrightarrow x^2 \in \{0; 4\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 2\}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{-2; 0; 2\}$

Vậy $x \in \{-2; 0; 2\}$ thì A nguyên.

$$b) B = \frac{7}{x^2 - x + 1} \text{ Đkxd: } x^2 - x + 1 \neq 0 \text{ (luôn đúng } \forall x)$$

Để B nguyên thì $\frac{7}{x^2 - x + 1}$ nguyên, $\frac{7}{x^2 - x + 1}$ nguyên khi $7 : (x^2 - x + 1)$

Hay $x^2 - x + 1 \in U(7)$ hay $x^2 - x + 1 \in \{-7; -1; 1; 7\}$

$$\text{Mà } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \text{ (} \forall x \in \mathbb{R} \text{) nên } x^2 - x + 1 \in \{1; 7\}$$

$$\text{Nếu } x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Nếu } x^2 - x + 1 = 7 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì B nguyên.

Bài 17.

$$B = \frac{2x^3 + 5x^2 - 5x + 5}{2x - 1} \text{ Đkxd: } 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } B = \frac{2x^3 - x^2 + 6x^2 - 3x - 2x + 1 + 4}{2x - 1}$$

$$B = \frac{x^2(2x - 1) + 3x(2x - 1) - (2x - 1) + 4}{2x - 1}$$

$$B = x^2 + 3x - 1 + \frac{4}{2x - 1}$$

Để B nguyên thì $\frac{4}{2x - 1}$ nguyên, $\frac{4}{2x - 1}$ nguyên khi $4 : (2x - 1)$

Hay $2x - 1 \in U(4)$ hay $2x - 1 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Ta có bảng sau:

$2x - 1$	-4	-2	-1	1	2	4
x	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ và kết hợp điều kiện ta được $x \in \{0; 1\}$

Vậy $x \in \{0; 1\}$ thì B nguyên.

Bài 18. $M = \frac{3}{2x^2 + 2x + 3}$

Ta có $M = \frac{3}{2x^2 + 2x + 3} = \frac{3}{2(x^2 + x) + 3} = \frac{3}{2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2}} = \frac{3}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}}$

Đkxđ: $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \neq 0$ (luôn đúng với mọi x)

Vì $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}} \leq \frac{2}{5}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \frac{3}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}} \leq \frac{6}{5}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow M \leq \frac{6}{5}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị lớn nhất của $M = \frac{6}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Bài 19.

a) $A = \frac{1}{-x^2 + 2x - 2}$

Ta có $A = \frac{1}{-x^2 + 2x - 2} = \frac{1}{-(x^2 - 2x + 1) - 1} = \frac{1}{-(x-1)^2 - 1}$

Đkxđ: $-(x-1)^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \neq 0$ (luôn đúng với mọi x)

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 - 1 \leq -1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-(x-1)^2 - 1} \geq -1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow A \geq -1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = -1 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{b) } B = \frac{2}{-4x^2 + 8x - 5}$$

$$\text{Ta có } B = \frac{2}{-4x^2 + 8x - 5} = \frac{2}{-4(x^2 - 2x + 1) - 1} = \frac{2}{-4(x-1)^2 - 1}$$

Đkxđ: $-4(x-1)^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 1 \neq 0$ (luôn đúng với mọi x)

$$\forall x \quad (x-1)^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow -4(x-1)^2 \leq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow -4(x-1)^2 - 1 \leq -1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-4(x-1)^2 - 1} \geq -1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{-4(x-1)^2 - 1} \geq -2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow B \geq -2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị nhỏ nhất của $B = -2 \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 20. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của phân thức $M = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9}$

Đkxđ: $x^2 + 9 \neq 0$ (luôn đúng với mọi x)

$$\text{Ta có } M = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} = \frac{4x^2 + 36 - 4x^2 - 12x - 9}{x^2 + 9}$$

$$M = \frac{4(x^2 + 9) - (4x^2 + 12x + 9)}{x^2 + 9}$$

$$M = \frac{4(x^2 + 9) - (2x + 3)^2}{x^2 + 9}$$

$$M = 4 - \frac{(2x + 3)^2}{x^2 + 9}$$

$$\text{Vì } x^2 + 9 > 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}); \ (2x + 3)^2 \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \frac{(2x + 3)^2}{x^2 + 9} \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(2x + 3)^2}{x^2 + 9} \leq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{(2x + 3)^2}{x^2 + 9} \leq 4 \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow M \leq 4 \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow (2x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } M = 4 \text{ khi } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Ta có: } M = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} = \frac{x^2 - 12x + 36 - x^2 - 9}{x^2 + 9} = \frac{(x - 6)^2 - (x^2 + 9)}{x^2 + 9} = \frac{(x - 6)^2}{x^2 + 9} - 1$$

$$\text{Vì } x^2 + 9 > 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}); \ (x - 6)^2 \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 6)^2}{x^2 + 9} \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 6)^2}{x^2 + 9} - 1 \geq -1 \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow B \geq -1 \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow (x - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } B = -1 \Leftrightarrow x = 6$$

$$\text{Bài 21. Rút gọn phân thức sau: } M = \frac{(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}.$$

Xét tử số:

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\begin{aligned}
&= -3b^2c + 3bc^2 - 3c^2a + 3ca^2 - 3a^2b + 3ab^2 \\
&= -3bc(b-c) + 3a(b^2 - c^2) - 3a^2(b-c) \\
&= (b-c)(-3bc + 3ab + 3ac - 3a^2) \\
&= -3(b-c)(bc - ab - ac + a^2) \\
&= -3(b-c)[c(b-a) - a(b-a)] \\
&= -3(b-c)(b-a)(c-a) \\
&= 3(b-c)(a-b)(c-a)
\end{aligned}$$

Xét mẫu: $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2(b-c) + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$

$$\begin{aligned}
&= a^2(b-c) + bc(b-c) - a(b^2 - c^2) \\
&= a^2(b-c) + bc(b-c) - a(b-c)(b+c) \\
&= (b-c)[a^2 + bc - a(b-c)] \\
&= (b-c)(a^2 + bc - ab + ac) \\
&= (b-c)(a-c)(a-b)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = \frac{3(b-c)(a-b)(c-a)}{(b-c)(a-c)(a-b)} = -3$$

Bài 22.

Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \neq 0 \Rightarrow x = ak; y = bk; z = ck$

Ta có $M = \frac{(a^2k^2 + b^2k^2 + c^2k^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{(a.ak + b.bk + c.ck)^2}$

$$M = \frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{(a^2k + b^2k + c^2k)^2}$$

$$M = \frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2}{k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2} = 1$$

Bài 23.

Ta có $ax + by + cz = 0 \Leftrightarrow (ax + by + cz)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(axby + axcz + bycz) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = -2(axby + axcz + bycz) \quad (1)$$

Xét mẫu:

$$bc(y-z)^2 + ac(x-z)^2 + ab(x-y)^2 = bc(y^2 - 2yz + z^2) + ac(x^2 - 2xz + z^2) + ab(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$\Leftrightarrow bc(y-z)^2 + ac(x-z)^2 + ab(x-y)^2$$

$$= bcy^2 - 2bcyz + bcz^2 + acx^2 - 2acxz + acz^2 + abx^2 - 2abxy + aby^2$$

$$\Leftrightarrow bc(y-z)^2 + ac(x-z)^2 + ab(x-y)^2$$

$$= bcy^2 + bcz^2 + acx^2 + acz^2 + abx^2 + aby^2 - 2(bcyz + acxz + abxy) \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được mẫu bằng

$$bcy^2 + bcz^2 + acx^2 + acz^2 + abx^2 + aby^2 + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

$$= (bcy^2 + acx^2 + c^2z^2) + (bcz^2 + abx^2 + b^2y^2) + (acz^2 + aby^2 + a^2x^2)$$

$$= c(by^2 + ax^2 + cz^2) + b(cz^2 + ax^2 + by^2) + a(cz^2 + by^2 + ax^2)$$

$$= (cz^2 + by^2 + ax^2)(a + b + c)$$

$$\text{Vậy } N = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{(cz^2 + by^2 + ax^2)(a + b + c)} = \frac{1}{a + b + c}.$$

BÀI 23. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

VD 1.1. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{x-4}{14} + \frac{-10-8x}{14} = \frac{x-4-10-8x}{14} = \frac{-7x-14}{14} = \frac{-7(x+2)}{14} = \frac{-x-2}{2}$$

$$b) \frac{7x-2}{24xy} + \frac{2-8xy}{24xy} = \frac{7x-2+2-8xy}{24xy} = \frac{7x-8xy}{24xy} = \frac{x(7-8y)}{24xy} = \frac{7-8y}{24y}$$

$$c) \frac{3x-y}{3x+y} + \frac{6x+4y}{3x+y} = \frac{3x-y+6x+4y}{3x+y} = \frac{9x+3y}{3x+y} = \frac{3(3x+y)}{3x+y} = 3$$

$$d) \frac{3xy-4}{-25xy} + \frac{7-12x}{-25xy} + \frac{4x-3}{-25xy} = \frac{3xy-4+7-12x+4x-3}{-25xy} = \frac{3xy-8x}{-25xy} = \frac{x(3y-8)}{-25xy} = \frac{8-3y}{25y}$$

VD 1.2. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{3}{5-2x} + \frac{2x-2}{2x-5} = \frac{3}{5-2x} - \frac{2x-2}{5-2x} = \frac{3-2x+2}{5-2x} = \frac{5-2x}{5-2x} = 1$$

$$b) \frac{2x}{3} + \frac{2ax+3x}{-3a} = \frac{2ax}{3a} - \frac{2ax+3x}{3a} = \frac{2ax-2ax-3x}{3a} = \frac{-3x}{3a} = \frac{-x}{a}$$

b)

$$\frac{5}{x+2} + \frac{7-2x}{x^2-4} = \frac{5}{x+2} + \frac{7-2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{5(x-2)+7-2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{5x-10+7-2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{3x-3}{(x-2)(x+2)}$$

$$d) \frac{5}{x^2+x} + \frac{2x-5}{2x^2-2} = \frac{5}{x(x+1)} + \frac{2x-5}{2(x-1)(x+1)} = \frac{5(x-1)}{2x(x-1)(x+1)} + \frac{(2x-5)x}{2x(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{5x-5+2x^2-5x}{2x(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2-5}{2x(x-1)(x+1)}$$

VD 1.3. Thực hiện phép tính:

a)

$$\frac{x^2+2xy}{x-y} + \frac{3y^2-xy}{y-x} + \frac{2y^2-3xy}{x-y} = \frac{x^2+2xy}{x-y} - \frac{3y^2-xy}{x-y} + \frac{2y^2-3xy}{x-y}$$
$$= \frac{x^2+2xy-3y^2+xy+2y^2-3xy}{x-y}$$
$$= \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x}{x^3+1} + \frac{2x}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{x^2+2x}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{2x}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+2x+2x(x+1)+x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x^2+2x+2x^2+2x+x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{4x^2+3x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{3}{y-1} + \frac{-2}{x} + \frac{-3x^2+xy-x}{x^2(y-1)} &= \frac{3x^2}{x^2(y-1)} + \frac{-2x(y-1)}{x^2(y-1)} + \frac{-3x^2+xy-x}{x^2(y-1)} \\ &= \frac{3x^2-2xy+2x-3x^2+xy-x}{x^2(y-1)} = \frac{x-xy}{x^2(y-1)} = \frac{x(1-y)}{x^2(y-1)} = \frac{-1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1}{9x-18} + \frac{22-7x}{72-18x^2} + \frac{5}{12x+24} \\ &= \frac{1}{9(x-2)} + \frac{22-7x}{18(4-x^2)} + \frac{5}{12(x+2)} \\ &= \frac{1}{9(x-2)} - \frac{22-7x}{18(x^2-4)} + \frac{5}{12(x+2)} \\ &= \frac{1}{9(x-2)} - \frac{22-7x}{18(x-2)(x+2)} + \frac{5}{12(x+2)} \\ &= \frac{4(x+2)}{36(x-2)(x+2)} - \frac{2(22-7x)}{36(x-2)(x+2)} + \frac{15(x-2)}{36(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{4x+8-44+14x+15x-30}{36(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{33x-66}{36(x-2)(x+2)} = \frac{33(x-2)}{36(x-2)(x+2)} = \frac{11}{12(x+2)} \end{aligned}$$

VD 2.1. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{2(x+y)(x-y)}{x} - \frac{-2y^2}{x} = \frac{2(x^2-y^2)+2y^2}{x} = \frac{2x^2-2y^2+2y^2}{x} = \frac{2x^2}{x} = 2x$$

$$\text{b) } \frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y} = \frac{4x-1-7x+1}{3x^2y} = \frac{-3x}{3x^2y} = \frac{-1}{xy}$$

$$\text{c) } \frac{3x+1}{x+y} - \frac{2x-3}{x+y} = \frac{3x+1-2x+3}{x+y} = \frac{x+4}{x+y}$$

$$\text{d) } \frac{xy}{2x-y} - \frac{x^2-1}{y-2x} = \frac{xy}{2x-y} + \frac{x^2-1}{2x-y} = \frac{xy+x^2-1}{2x-y}$$

VD 2.2. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{5x^2 - y^2}{xy} - \frac{3x - 2y}{y} = \frac{5x^2 - y^2}{xy} - \frac{3x^2 - 2xy}{xy} = \frac{5x^2 - y^2 - 3x^2 + 2xy}{xy} = \frac{2x^2 + 2xy - y^2}{xy}$$

$$b) \frac{x+3}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x(x+3) - x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 3x - x + 1}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x(x-1)}$$

c)

$$\frac{x+9y}{x^2-9y^2} - \frac{3y}{x^2+3xy} = \frac{x+9y}{(x-3y)(x+3y)} - \frac{3y}{x(x+3y)}$$

$$= \frac{x(x+9y) - 3y(x-3y)}{x(x-3y)(x+3y)} = \frac{x^2 + 9xy - 3xy + 9y^2}{x(x-3y)(x+3y)}$$

$$= \frac{x^2 + 6xy + 9y^2}{x(x-3y)(x+3y)} = \frac{(x+3y)^2}{x(x-3y)(x+3y)} = \frac{x+3y}{x(x-3y)}$$

$$d) \frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x} = \frac{3}{2(x+3)} - \frac{x-6}{2x(x+3)} = \frac{3x - x + 6}{2x(x+3)} = \frac{2x+6}{2x(x+3)} = \frac{2(x+3)}{2x(x+3)} = \frac{1}{x}$$

VD 2.3. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} - \frac{-10x+8}{9x^2-4} = \frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} - \frac{-10x+8}{(3x-2)(3x+2)}$$

$$= \frac{3x+2 - 4(3x-2) + 10x - 8}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{3x+2 - 12x + 8 + 10x - 8}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{x+2}{(3x-2)(3x+2)}$$

$$b) \frac{4x^2-3x+5}{x^3-1} - \frac{1-2x}{x^2+x+1} - \frac{6}{x-1} = \frac{4x^2-3x+5}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1-2x}{x^2+x+1} - \frac{6}{x-1}$$

$$= \frac{4x^2-3x+5 - (1-2x)(x-1) - 6(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{4x^2-3x+5 - x+1+2x^2-2x-6x^2-6x-6}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{-12x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

VD 3.1.

a) Ta có $P = \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x^2+x}$ ($x \neq 0; x \neq -1$)

$$\Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x^3 + 2(x-1)(x+1) + x+2}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x^3 + 2(x^2 - 1) + x + 2}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x^3 + 2x^2 - 2 + x + 2}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x(x^2 + 2x + 1)}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x(x+1)^2}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow P = x + 1$$

Vậy $P = x + 1$

b) Thay $x = 1$ (tmdl) vào P , ta được $P = 1 + 1 = 2$

Vậy với $x = 1$ thì $P = 2$.

VD 3.2.

Ta có $P = \frac{x+2}{2(x+5)} + \frac{x-5}{x} + \frac{50-5x}{2x(x+5)}$ ($x \neq -5; x \neq 0$)

$$P = \frac{x^2 + 2x}{2x(x+5)} + \frac{2(x-5)(x+5)}{2x(x+5)} + \frac{50-5x}{2x(x+5)}$$

$$P = \frac{x^2 + 2x + 2x^2 - 50 + 50 - 5x}{2x(x+5)} = \frac{3x^2 - 3x}{2x(x+5)} = \frac{3(x-1)}{2(x+5)}$$

Thay $x = \frac{11}{5}$ vào P , ta được $P = \frac{3 \cdot \left(\frac{11}{5} - 1\right)}{2 \cdot \left(\frac{11}{5} + 5\right)} = \frac{3 \cdot \frac{6}{5}}{2 \cdot \frac{36}{5}} = \frac{\frac{18}{5}}{\frac{72}{5}} = \frac{18}{5} \cdot \frac{5}{72} = \frac{1}{4}$

Vậy với $x = \frac{11}{5}$ thì $P = \frac{1}{4}$.

VD 4.1.

$$\text{Ta có } \frac{x^2 - x + 2}{(x-1)^3} = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{(x-1)^3} = \frac{a + b(x-1) + c(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{(x-1)^3} = \frac{a + bx - b + cx^2 - 2cx + c}{(x-1)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{(x-1)^3} = \frac{cx^2 + (b-2c)x + a-b+c}{(x-1)^3}$$

Đồng nhất hệ số hai vế của biểu thức ta được $\begin{cases} c = 1 \\ b - 2c = -1 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

Vậy $a = 2; b = c = 1$

VD 4.2.

$$\text{Ta có } \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{a(x^2 + 1) + (bx + c)(x-1)}{(x-1)(x^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{ax^2 + a + bx^2 - bx + cx - c}{(x-1)(x^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{ax^2 + a + bx^2 - bx + cx - c}{(x-1)(x^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{(a+b)x^2 + (c-b)x + a-c}{(x-1)(x^2 + 1)}$$

Đồng nhất hệ số hai vế của biểu thức ta được $\begin{cases} a + b = 1 & (1) \\ c - b = 2 & (2) \\ a - c = -1 & (3) \end{cases}$

Lấy (1) + (2), ta được $a + c = 3$

Kết hợp với (3), ta được $a = 1$; $c = 2$ suy ra $b = 0$

Vậy $a = 1$; $b = 0$; $c = 2$

VD 5.1.

a) Thời gian hoàn thành 5000m^3 ở giai đoạn đầu tiên là: $\frac{5000}{x}$ (ngày)

b) Thời gian hoàn thành nốt phần việc còn lại ở giai đoạn sau là:

$$\frac{11\,600 - 5000}{x + 25} = \frac{6600}{x + 25} \text{ (ngày)}$$

c) Tổng thời gian hoàn thành công việc là: $\frac{5000}{x} + \frac{6600}{x + 25}$ (ngày)

d) Thay $x = 250$ vào biểu thức $\frac{5000}{x} + \frac{6600}{x + 25}$ ta được:

$$\frac{5000}{250} + \frac{6600}{250 + 25} = 20 + 24 = 44 \text{ (ngày)}$$

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{5xy^2 - 3z}{3xy} + \frac{4x^2y + 3z}{3xy} = \frac{5xy^2 - 3z + 4x^2y + 3z}{3xy} = \frac{5xy^2 + 4x^2y}{3xy} = \frac{xy(5y + 4x)}{3xy} = \frac{5y + 4x}{3}$$

$$\text{b) } \frac{3y + 5}{y - 1} + \frac{y^2 + 4y}{y - 1} + \frac{y^2 + y + 7}{y - 1} = \frac{3y + 5 + y^2 + 4y + y^2 + y + 7}{y - 1} = \frac{2y^2 + 8y + 12}{y - 1}$$

$$\text{c) } \frac{2x^2 - xy}{x - y} + \frac{xy + y^2}{x - y} + \frac{2y^2 - x^2}{x - y} = \frac{2x^2 - xy + xy + y^2 + 2y^2 - x^2}{x - y} = \frac{x^2 + 3y^2}{x - y}$$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{2x + 9}{9 - 4x^2} + \frac{2}{2x - 3} = \frac{2x + 9}{(3 - 2x)(3 + 2x)} - \frac{2}{3 - 2x} = \frac{2x + 9 - 2(3 + 2x)}{(3 - 2x)(3 + 2x)} = \frac{2x + 9 - 6 - 4x}{(3 - 2x)(3 + 2x)} \\ = \frac{3 - 2x}{(3 - 2x)(3 + 2x)} = \frac{1}{3 + 2x}$$

$$\text{b) } \frac{x}{2y^2 - xy} + \frac{4y}{x^2 - 2xy} = \frac{x}{y(2y - x)} + \frac{4y}{x(x - 2y)} = \frac{x}{y(2y - x)} - \frac{4y}{x(2y - x)} \\ = \frac{x^2 - 4y^2}{y(2y - x)} = \frac{(x - 2y)(x + 2y)}{y(2y - x)} = -\frac{x + 2y}{y}$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - 2}{x^3 - 2x^2 + x} + \frac{x - 2}{2x^2 - x^3 - x} = \frac{x^2 - 2}{x(x^2 - 2x + 1)} - \frac{x - 2}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{x^2 - 2}{x(x - 1)^2} - \frac{x - 2}{x(x - 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2 - x + 2}{x(x-1)^2} = \frac{x(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{6b-3}{a^2-b^2} + \frac{2bx-2ax+6a-3}{b^2-a^2} &= \frac{6b-3}{a^2-b^2} - \frac{2bx-2ax+6a-3}{a^2-b^2} = \frac{6b-3-2bx+2ax-6a+3}{a^2-b^2} \\ &= \frac{6b-2bx+2ax-6a}{a^2-b^2} = \frac{6(b-a)-2x(b-a)}{(a-b)(a+b)} = \frac{(b-a)(6-2x)}{(a-b)(a+b)} = \frac{-(a-b)(6-2x)}{(a-b)(a+b)} = \frac{-6+2x}{a+b} \end{aligned}$$

Bài 3. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{3x-2y}{xy} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3x-2y+2y+2x}{xy} = \frac{5x}{xy} = \frac{5}{y}$$

$$b) \frac{5}{9a^2b} + \frac{1}{5ab^3} + \frac{4}{15a^3b} = \frac{5.5ab^2+9a^2+4.3b^2}{45a^3b^3} = \frac{25ab^2+9a^2+12b^2}{45a^3b^3}$$

$$\begin{aligned} c) \frac{5}{2x} + \frac{2x-3}{2x-1} + \frac{4x^2+3}{8x^2-4x} &= \frac{5}{2x} + \frac{2x-3}{2x-1} + \frac{4x^2+3}{4x(2x-1)} = \frac{5.2(2x-1)+(2x-3).4x+4x^2+3}{4x(2x-1)} \\ &= \frac{20x-10+8x^2-12x+4x^2+3}{x(2x-1)} = \frac{12x^2+8x-7}{x(2x-1)} = \frac{12x^2-6x+14x-7}{x(2x-1)} = \frac{(2x-1)(6x+2)}{x(2x-1)} = \frac{6x+2}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \frac{2x+1}{2x^2-x} + \frac{32x^2}{1-4x^2} + \frac{1-2x}{2x^2+x} &= \frac{2x+1}{x(2x-1)} - \frac{32x^2}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{1-2x}{x(2x+1)} \\ &= \frac{(2x+1)^2 - 32x^2 + (1-2x)(2x-1)}{x(2x-1)} = \frac{4x^2+4x+1-32x^2-4x^2+4x-1}{x(2x-1)} = \frac{8x-32x^3}{x(2x-1)} \\ &= \frac{8x(1-4x^2)}{x(2x-1)} = \frac{8(1-2x)(1+2x)}{2x-1} = -8(1+2x) \end{aligned}$$

Bài 4. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{x}{x-y} - \frac{1}{x-y} - \frac{1-y}{y-x} = \frac{x}{x-y} - \frac{1}{x-y} + \frac{1-y}{x-y} = \frac{x-1+1-y}{x-y} = \frac{x-y}{x-y} = 1$$

$$b) \frac{x^2+y^2}{(x-y)^3} - \frac{2xy}{(x-y)^3} = \frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)^3} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^3} = \frac{1}{x-y}$$

$$c) \frac{2x^3+5}{x^2-x+1} - \frac{x^3+4}{x^2-x+1} = \frac{2x^3+5-x^3-4}{x^2-x+1} = \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = x+1$$

$$d) \frac{x^2+25y^2}{x^2-25y^2} - \frac{10xy}{x^2-25y^2} = \frac{x^2+25y^2-10xy}{x^2-25y^2} = \frac{(x-5y)^2}{(x-5y)(x+5y)} = \frac{x-5y}{x+5y}$$

Bài 5. Thực hiện phép tính

a)

$$\frac{6}{5x-20} - \frac{x-5}{x^2-8x+16} = \frac{6}{5(x-4)} - \frac{x-5}{(x-4)^2} = \frac{6(x-4) - 5(x-5)}{5(x-4)^2} = \frac{6x-24-5x+25}{5(x-4)^2} = \frac{x}{5(x-4)^2}$$

b)

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2(x-1)+x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

c)

$$\frac{x}{x^2-2x} - \frac{x^2+4x}{x^3-4x} - \frac{2}{x^2+2x} = \frac{x}{x(x-2)} - \frac{x^2+4x}{x(x^2-4)} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{x}{x(x-2)} - \frac{x^2+4x}{x(x-2)(x+2)} - \frac{2}{x(x+2)}$$

$$= \frac{x(x+2) - x^2 - 4x - 2(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x-x^2-4x-2x+4}{x(x-2)(x+2)} = \frac{-4x+4}{x(x-2)(x+2)}$$

d)

$$\frac{5}{2x^2+6x} - \frac{4-3x^2}{x^2-9} - 3 = \frac{5}{2x(x+3)} - \frac{4-3x^2}{(x-3)(x+3)} - 3 = \frac{5(x-3) - (4-3x^2) \cdot 2x - 3 \cdot 2x(x-3)}{2x(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{5x-15-8x+6x^3-6x(x^2-9)}{2x(x-3)(x+3)} = \frac{5x-15-8x+6x^3-6x^3+54x}{2x(x-3)(x+3)} = \frac{51x-15}{2x(x^2-9)}$$

e)

$$\frac{2x^2+1}{x^3+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2+1 - (x-1)(x+1) - x^2}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+1-x^2+1-x^2+x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x^2-x+1}$$

f)

$$\frac{3x-1}{6x+2} - \frac{3x+1}{2-6x} - \frac{6x}{9x^2-1} = \frac{3x-1}{2(3x+1)} - \frac{3x+1}{2(1-3x)} - \frac{6x}{(3x-1)(3x+1)}$$

$$= \frac{3x-1}{2(3x+1)} + \frac{3x+1}{2(3x-1)} - \frac{6x}{(3x-1)(3x+1)}$$

$$= \frac{(3x-1)^2 + (3x+1)^2 - 6x \cdot 2}{2(3x-1)(3x+1)} = \frac{9x^2-6x+1+9x^2+6x+1-12x}{2(3x-1)(3x+1)}$$

$$= \frac{18x^2 - 12x + 2}{2(3x-1)(3x+1)} = \frac{2(9x^2 - 6x + 1)}{2(3x-1)(3x+1)} = \frac{(3x-1)^2}{(3x-1)(3x+1)} = \frac{3x-1}{3x+1}$$

Bài 6. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } A = \frac{1}{x^2 + 6x + 9} + \frac{1}{6x - x^2 - 9} + \frac{x}{x^2 - 9} = \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{-(x^2 - 6x + 9)} + \frac{x}{x^2 - 9}$$

$$= \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{x}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)^2 - (x+3)^2 + x(x-3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

$$= \frac{(x-3-x-3)(x-3+x+3) + x(x^2-9)}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{-12x + x(x^2-9)}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

$$\text{b) } B = \frac{x^4}{1-x} + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^4 + x^3(1-x) + x^2(1-x) + x(1-x) + 1-x}{1-x}$$

$$= \frac{x^4 + x^3 - x^4 + x^2 - x^3 + x - x^2 + 1 - x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{c) } C = \frac{3}{x^2 + 2xy + y^2} + \frac{4}{2xy - x^2 - y^2} + \frac{5}{x^2 - y^2} = \frac{3}{(x+y)^2} + \frac{4}{-(x-y)^2} + \frac{5}{(x-y)(x+y)}$$

$$C = \frac{3(x-y)^2}{(x+y)^2(x-y)^2} - \frac{4(x+y)^2}{(x+y)^2(x-y)^2} + \frac{5(x-y)(x+y)}{(x-y)^2(x+y)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x^2 - 8xy - 4y^2 + 5x^2 - 5y^2}{(x+y)^2(x-y)^2}$$

$$C = \frac{4x^2 - 14xy - 6y^2}{(x+y)^2(x-y)^2} = \frac{2(2x^2 - 7xy - 3y^2)}{(x+y)^2(x-y)^2}$$

Bài 7. Tìm x, biết:

$$\text{a) } \frac{2}{x+3} + \frac{3}{x^2-9} = 0 \quad (\text{đkxđ: } x \neq \pm 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+3} + \frac{3}{(x-3)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-3)+3}{(x-3)(x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)+3 = 0 \Leftrightarrow 2x-6+3 = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy $x = \frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{9x^2+6x+1} + \frac{3x}{1-9x^2} = \frac{2}{(1-3x)(3x+1)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{(3x+1)^2} + \frac{3x}{(1-3x)(1+3x)} = \frac{2}{(1-3x)(3x+1)^2}$ (đkxđ: $x \neq \pm \frac{1}{3}$)

$\Leftrightarrow \frac{2(1-3x)}{(1-3x)(3x+1)^2} + \frac{3x(3x+1)}{(1-3x)(3x+1)^2} = \frac{2}{(1-3x)(3x+1)^2}$

$\Leftrightarrow 2-6x+9x^2+3x=2 \Leftrightarrow 9x^2-3x=0 \Leftrightarrow 3x(3x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ 3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (TM) \\ x=\frac{1}{3} & (KTM) \end{cases}$

Vậy $x = 0$

Bài 8.

Ta có $P = \frac{x}{2x-2} + \frac{x^2+1}{2-2x^2} = \frac{x}{2(x-1)} + \frac{x^2+1}{2(1-x^2)}$ (đkxđ: $x \neq 1$)

$P = \frac{x}{2(x-1)} - \frac{x^2+1}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x(x+1)}{2(x-1)} - \frac{x^2+1}{2(x-1)(x+1)}$
 $= \frac{x^2+x-x^2-1}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{2(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2(x+1)}$

Thay $x = -2$ (tmđk) vào P, ta được $P = \frac{1}{2(-2+1)} = \frac{-1}{2}$

Vậy với $x = -2$ thì $P = \frac{-1}{2}$.

Bài 9. Ta có $P = \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-3} + \frac{18}{x^2-9} = \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-3} + \frac{18}{(x+3)(x-3)}$ (đkxđ: $x \neq \pm 3$)

$P = \frac{3(x-3)+x+3+18}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x-9+3+18}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x+9}{(x+3)(x-3)} = \frac{3}{x-3}$

Xét $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & (TM) \\ x=3 & (KTM) \end{cases}$

Thay $x = 1$, vào P ta được $P = \frac{3}{1-3} = \frac{-3}{2}$

Vậy với $x = 1$ ta được $P = \frac{-3}{2}$.

Bài 10.

a) Ta có $P = \frac{x^2}{5x+25} + \frac{2x-10}{x} + \frac{50+5x}{x^2+5x} = \frac{x^2}{5(x+5)} + \frac{2x-10}{x} + \frac{50+5x}{x(x+5)}$ (đkxd:

$x \neq 0; x \neq -5$)

$$= \frac{x^3}{5x(x+5)} + \frac{5 \cdot 2(x-5)(x+5)}{5x(x+5)} + \frac{(50+5x) \cdot 5}{5x(x+5)} = \frac{x^3 + 10(x^2 - 25) + 250 + 25x}{5x(x+5)}$$

$$= \frac{x^3 + 10x^2 - 250 + 250 + 25x}{5x(x+5)} = \frac{x(x^2 + 10x + 25)}{5x(x+5)} = \frac{x(x+5)^2}{5x(x+5)} = \frac{x+5}{5}$$

Vậy $P = \frac{x+5}{5}$

b) Thay $x = -2$ (tmdk) vào P, ta được $P = \frac{-2+5}{5} = \frac{3}{5}$

Vậy với $x = -2$ thì $P = \frac{3}{5}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của biểu thức tại $x = -2$

Bài 11.

a) Ta có

$$P = \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{2}{x^2-x} + \frac{4x}{1-x^3} = \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{2}{x(x-1)} + \frac{4x}{(1-x)(x^2+x+1)}$$

(đkxd: $x \neq 1$)

$$= \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{2}{x(x-1)} - \frac{4x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2(x-1) + 2(x^2+x+1) - 4x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{2x - 2 + 2x^2 + 2x + 2 - 4x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2x^2}{x^3-1}$$

b) Thay $x = 2$ (tmdk) vào P, ta được $P = \frac{2 \cdot 2^2}{2^3-1} = \frac{8}{7}$

Vậy với $x = 2$ thì $P = \frac{8}{7}$

Bài 12. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức $A = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{4x^2+15x+14}$ tại $x = 1$.

$$\text{Ta có } A = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{4x^2+15x+14} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)}$$

$$\text{Đkxđ: } x \neq -2; -3; \frac{-7}{4}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x+2)(4x+7) + 4x+7 + x+3}{(x+2)(x+3)(4x+7)} = \frac{4x^2 + 7x + 8x + 14 + 5x + 10}{(x+2)(x+3)(4x+7)} \\ &= \frac{4x^2 + 20x + 24}{(x+2)(x+3)(4x+7)} = \frac{4(x^2 + 5x + 6)}{(x+2)(x+3)(4x+7)} = \frac{4(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(4x+7)} = \frac{4}{4x+7} \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ (tmđk) vào } A, \text{ ta được } A = \frac{4}{4 \cdot 1 + 7} = \frac{4}{11}$$

$$\text{Vậy với } x = 1 \text{ thì } A = \frac{4}{11}.$$

Bài 13. D

a) Thời gian tàu đi ngược dòng từ A đến B là: $\frac{70}{x-5}$ (giờ)

b) Thời gian tàu đi xuôi dòng từ B về A là: $\frac{70}{x+5}$ (giờ)

c) Thời gian kể từ lúc tàu xuất phát đến khi tàu quay ngược trở lại A là:

$$\frac{70}{x-5} + \frac{70}{x+5} + 2 \text{ (giờ)}$$

d) Thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi từ quay ngược về A là:

$$\frac{70}{x-5} + \frac{70}{x+5} + 2 = \frac{70}{20-5} + \frac{70}{20+5} + 2 = \frac{14}{3} + \frac{14}{5} + 2 = \frac{142}{15} = 9 \text{ giờ } 28 \text{ phút}$$

Bài 14.

a) Ta có $\frac{2x^2 - 3x + 12}{(x+3)^3} = \frac{a}{(x+3)^3} + \frac{b}{(x+3)^2} + \frac{c}{x+3}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x + 12}{(x+3)^3} = \frac{a}{(x+3)^3} + \frac{b(x+3)}{(x+3)^3} + \frac{c(x+3)^2}{(x+3)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x + 12}{(x+3)^3} = \frac{a + bx + 3b + c(x^2 + 6x + 9)}{(x+3)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x + 12}{(x+3)^3} = \frac{a + bx + 3b + cx^2 + 6cx + 9c}{(x+3)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x + 12}{(x+3)^3} = \frac{cx^2 + (b+6c)x + a + 3b + 9c}{(x+3)^3}$$

Đồng nhất hệ số hai vế của biểu thức ta được

$$\begin{cases} c = 2 \\ b + 6c = -3 \\ a + 3b + 9c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -15 \\ a + 3 \cdot (-15) + 9 \cdot 2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -15 \\ a = 39 \end{cases}$$

Vậy $a = 39; b = -15; c = 2$

b) Ta có
$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{a(x^2 - 3x + 2) + bx^2 - 2bx + cx^2 - cx}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{ax^2 - 3ax + 2a + bx^2 - 2bx + cx^2 - cx}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{(a+b+c)x^2 - (3a+2b+c)x + 2a}{x(x-1)(x-2)}$$

Đồng nhất hệ số hai vế của biểu thức ta được

$$\begin{cases} a + b + c = 9 \\ 3a + 2b + c = 16 \\ 2a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b + c = 7 \\ 2b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases}$$

Vậy $a = 2, b = 3, c = 4$

Bài 15.

Ta có
$$\frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{(ax+a)(x^2+1) + (bx-b)(x^2+1) + (cx+d)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$\frac{x^3}{x^4-1} = \frac{ax^3 + ax + ax^2 + a + bx^3 + bx - bx^2 - b + cx^3 - cx + dx^2 - d}{x^4-1}$$

$$\frac{x^3}{x^4-1} = \frac{(a+b+c)x^3 + (a-b+d)x^2 + (a+b-c)x + (a-b-d)}{x^4-1}$$

Đồng nhất hệ số hai vế của biểu thức ta được

$$\begin{cases} a+b+c=1 & (1) \\ a-b+d=0 & (2) \\ a+b-c=0 & (3) \\ a-b-d=0 & (4) \end{cases}$$

Lấy (1) - (3) ta được $2c=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{2} \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$

Lấy (2) + (4) ta được $2a-2b=0 \Leftrightarrow a-b=0$

Từ đó tính được $a=b=\frac{1}{4}$

Lấy (2) - (4) ta được $2d=0 \Leftrightarrow d=0$

Vậy $a=b=\frac{1}{4}; c=\frac{1}{2}; d=0$

Bài 16.

Ta có $A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1+x+1-x}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2(1+x^2)+2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{2+2x^2+2-2x^2}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{4(1+x^4)+4(1-x^4)}{(1-x^4)(1+x^4)} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{4+4x^4+4-4x^4}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{8(1+x^8)+8(1-x^8)}{(1-x^8)(1+x^8)} = \frac{8+8x^8+8-8x^8}{(1-x^8)(1+x^8)} = \frac{16}{1-x^{16}}$$

Vậy $A = \frac{16}{1-x^{16}}$.

Bài 17.

$$\text{Xét } VT = \frac{4x^2 - (x-3)^2}{9(x^2-1)} - \frac{x^2-9}{(2x+3)^2-x^2} + \frac{(2x-3)^2-x^2}{4x^2-(x+3)^2}$$

$$VT = \frac{(2x-x+3)(2x+x-3)}{9(x-1)(x+1)} - \frac{(x-3)(x+3)}{(2x+3-x)(2x+3+x)} + \frac{(2x-3-x)(2x-3+x)}{(2x-x-3)(2x+x+3)}$$

$$VT = \frac{3(x+3)(x-1)}{9(x-1)(x+1)} - \frac{(x-3)(x+3)}{3(x+3)(x+1)} + \frac{3(x-3)(x-1)}{3(x-3)(x+1)}$$

$$VT = \frac{x+3}{3(x+1)} - \frac{x-3}{3(x+1)} + \frac{3(x-1)}{3(x+1)}$$

$$VT = \frac{x+3-x+3+3x-3}{3(x+1)}$$

$$VT = \frac{3x+3}{3x+3} = 1 = VP$$

$$\Rightarrow VT = VP \text{ (đpcm)}$$

Bài 18.

$$\text{Ta có } A = \frac{2}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+6x+8} + \frac{2}{x^2+10x+24} + \frac{2}{x^2+14x+48}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{2}{(x+6)(x+8)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(x+2)-x}{x(x+2)} + \frac{(x+4)-(x+2)}{(x+2)(x+4)} + \frac{(x+6)-(x+4)}{(x+4)(x+6)} + \frac{(x+8)-(x+6)}{(x+6)(x+8)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+8}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x+8-x}{x(x+8)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{8}{x(x+8)}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{8}{x(x+8)}$$

Bài 19.

Vì a, b, c đôi một khác nhau nên $a-b \neq 0$; $b-c \neq 0$; $c-a \neq 0$

$$\text{Ta có: } M = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^3}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^3}{(a-c)(b-c)}$$

$$M = \frac{a^3(b-c) - b^3(a-c) + c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M = \frac{a^3(b-c) - b^3a + b^3c + c^3a - c^3b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M = \frac{a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M = \frac{a^3(b-c) - a(b-c)(b^2 + bc + c^2) + bc(b-c)(b+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M = \frac{(b-c)[a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M = \frac{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)}{(a-b)(a-c)}$$

$$M = \frac{a^3 - ab^2 - abc - ac^2 + b^2c + bc^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$M = \frac{a(a^2 - b^2) - bc(a-b) - c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)}$$

$$M = \frac{(a-b)[a(a+b) - bc - c^2]}{(a-b)(a-c)}$$

$$M = \frac{a(a+b) - bc - c^2}{a-c}$$

$$M = \frac{a^2 + ab - bc - c^2}{a-c}$$

$$M = \frac{(a-c)(a+c) + b(a-c)}{a-c}$$

$$M = \frac{(a-c)(a+c+b)}{a-c}$$

$$M = a + b + c$$

Vì a, b, c là các số nguyên nên $a + b + c$ nguyên, suy ra M nguyên.

Bài 20. Cho $a + b + c = 0$ và $a, b, c \neq 0$. Tính

$$M = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}.$$

$$\text{Ta có } a + b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -(b + c) \\ b = -(a + c) \\ c = -(a + b) \end{cases}$$

Thay $a = -(b + c)$; $b = -(a + c)$; $c = -(a + b)$ vào M ta được:

$$M = \frac{1}{a^2 + b^2 - (a + b)^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - (b + c)^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - (c + a)^2}$$

$$M = \frac{1}{a^2 + b^2 - a^2 - 2ab - b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - b^2 - 2bc - c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - c^2 - 2ca - a^2}$$

$$M = \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ca} = \frac{c + a + b}{-2abc} = \frac{0}{-2abc} = 0$$

Vậy $M = 0$.

BÀI 24. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

VD 1.1. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{14x}{5y^2} \cdot \frac{2y^3}{x^2} = \frac{28y}{5x}$$

$$b) \frac{5y^2}{7y^2} \cdot \left(-\frac{2x^2}{10y}\right) = \frac{5y^2 \cdot (-2x^2)}{7y^2 \cdot 10y} = \frac{-10x^2y^2}{70y^3} = \frac{-x^2}{7y}$$

$$c) 3x^3y^4 \cdot \left(-\frac{7z}{9xy^5}\right) = \frac{-3x^3y^4 \cdot 7z}{9xy^5} = \frac{-7x^2z}{3y}$$

VD 1.2. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{3x+9}{4x-10} \cdot \frac{5-2x}{x+3} = \frac{3(x+3) \cdot (5-2x)}{2(2x-5)(x+3)} = \frac{-3(2x-5)}{2(2x-5)} = \frac{-3}{2}$$

$$b) \frac{x^2-16}{2x+5} \cdot \frac{6}{4-x} = \frac{-(x-4)(x+4) \cdot 6}{(2x+5)(x-4)} = \frac{-6(x+4)}{2x+5}$$

$$c) \frac{x^3-8}{5x+20} \cdot \frac{x^2+4x}{x^2+2x+4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)x(x+4)}{5(x+4)(x^2+2x+4)} = \frac{x(x-2)}{5}$$

VD 1.3.

$$\text{Ta có } P = \frac{x^2-1}{x+5} \cdot \frac{2x+10}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+5} \cdot \frac{2(x+5)}{x(x-1)} \quad (x \neq -5; 0; 1)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{2(x+1)}{x}$$

$$\text{Thay } x = 99 \text{ (tmđk) vào } P, \text{ ta được } P = \frac{2(99+1)}{99} = \frac{200}{99}$$

$$\text{Vậy với } x = 99 \text{ thì } P = \frac{200}{99}.$$

VD 1.4.

$$\text{Ta có } A = \frac{x+y}{xy-y^2} + \frac{y-3x}{x^3+xy^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{x+y}{y(x-y)} + \frac{y-3x}{x(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$$A = \frac{x+y}{y(x-y)} + \frac{y-3x}{x(x-y)} = \frac{x^2+xy+y^2-3xy}{xy(x-y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x-y)} = \frac{x-y}{xy}.$$

VD 1.5.

$$\text{Ta có } 1+a^2 = ab+bc+ca+a^2 = b(a+c)+a(a+c) = (a+c)(a+b) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } 1+b^2=(a+b)(b+c) \quad (2)$$

$$\text{Và } 1+c^2=(a+c)(b+c) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$A = \frac{(a+b)^2}{(a+c)(a+b)} \cdot \frac{(b+c)^2}{(a+b)(b+c)} \cdot \frac{(c+a)^2}{(a+c)(b+c)} = \frac{a+b}{a+c} \cdot \frac{b+c}{a+b} \cdot \frac{c+a}{b+c} = 1$$

Vậy giá trị biểu thức A không phụ thuộc vào biến.

VD 2.1. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{7xy}{3x+1} : \frac{14x^2y}{6x+2} = \frac{7xy}{3x+1} \cdot \frac{6x+2}{14x^2y} = \frac{7xy \cdot 2 \cdot (3x+1)}{(3x+1) \cdot 14x^2y} = \frac{14xy(3x+1)}{14x^2y(3x+1)} = \frac{1}{x}$$

$$\text{b) } \frac{34x^2y^3}{2xy^2+2y^2} : \frac{17xy}{3x+3} = \frac{34x^2y^3}{2y^2(x+1)} \cdot \frac{3(x+1)}{17xy} = \frac{34x^2y^3 \cdot 3(x+1)}{34y^2(x+1)} = 3x^2y$$

$$\text{c) } \frac{x^3-27}{x+3} : (x^2-6x+9) = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x+3} \cdot \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{x^2+3x+9}{x^2-9}$$

$$\text{d) } (x^2+2x+1) : \frac{x^2-1}{2x+3} = (x+1)^2 \cdot \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)(2x+3)}{x-1}$$

VD 2.2. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{x-1}{x-2} : \frac{x-2}{x-3} : \frac{(x-1)(x-3)}{x^2-4} = \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-3}{x-2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$\text{b) } \frac{x^3+1}{x-1} : (x^2-x+1) : \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2-x+1} \cdot \frac{x-1}{x+1} = 1$$

VD 2.3. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \frac{9x^2-6x+1}{x^2+2xy+4y^2} : \frac{12x-4}{4x^3+32y^3} = \frac{(3x-1)^2}{x^2+2xy+4y^2} \cdot \frac{4(x^3+8y^3)}{4(3x-1)}$$

$$= \frac{3x-1}{x^2+2xy+4y^2} \cdot \frac{(x+2y)(x^2+2xy+4y^2)}{1} = (3x-1)(x+2y)$$

$$\text{b) } \frac{x^2+3x+2}{x^2+x-6} : \frac{x^2+x}{x^2-4x+4} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+3)} \cdot \frac{(x-2)^2}{x(x+1)} = \frac{(x+2)(x-2)^2}{x(x+3)(x-2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{x(x+3)}$$

VD 2.4.

$$\text{Ta có } A = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1-3x}{x^3+x} : \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1-3x}{x(x^2+1)} \cdot \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1-3x}{x(x-1)}$$

$$A = \frac{x(x+1)+1-3x}{x(x-1)} = \frac{x^2+x+1-3x}{x(x-1)} = \frac{x^2-2x+1}{x(x-1)} = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x}$$

Vậy $A = \frac{x-1}{x}$.

VD 2.5.

Ta có $\frac{x-4}{x^3-3x^2+x-3} : A = \frac{x^2-5x+4}{(x-2)(x-3)}$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x-4}{x^3-3x^2+x-3} : \frac{x^2-5x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-4}{x^2(x-3)+(x-3)} : \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x-4}{(x-3)(x^2+1)} \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)} = \frac{x-2}{(x^2+1)(x-1)}$$

Vậy $A = \frac{x-2}{(x^2+1)(x-1)}$.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{8x}{15y^3} \cdot \frac{4y^2}{x^2} = \frac{8x \cdot 4y^2}{15y^3 \cdot x^2} = \frac{32xy^2}{15x^2y^3} = \frac{32}{15xy}$

b) $\frac{9x^2}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{6x^3} = \frac{9x^2(x-3)(x+3)}{(x+3) \cdot 6x^3} = \frac{3(x-3)}{2x}$

c) $\frac{2x^2-20x+50}{5x+5} \cdot \frac{2x^2-2}{4(x-5)^3} = \frac{2(x^2-10x+25)}{5(x+1)} \cdot \frac{2(x-1)(x+1)}{4(x-5)^3} = \frac{4(x-5)^2(x-1)(x+1)}{5(x+1) \cdot 4(x-5)^3}$
 $= \frac{4(x-5)^2(x-1)(x+1)}{5(x+1) \cdot 4(x-5)^3} = \frac{x-1}{5(x-5)}$

d) $\frac{x+3}{x^2-4} \cdot \frac{8-12x+6x^2-x^3}{7x+21} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{6x(x-2)-(x^3-8)}{7(x+3)}$
 $= \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(6x-x^2-2x-4)}{7(x+3)} = \frac{-x^2+4x-4}{7(x+2)} = \frac{-(x-2)^2}{7(x+2)}$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{2x+2y}{a^2+2ab+b^2} \cdot \frac{ax-ay+bx-by}{2x^2-2y^2} = \frac{2(x+y)}{(a+b)^2} \cdot \frac{(x-y)(a+b)}{2(x-y)(x+y)} = \frac{1}{a+b}$

$$b) \frac{a+b-c}{a^2+2ab+b^2-c^2} \cdot \frac{a^2+2ab+b^2+ac+bc}{a^2-b^2} = \frac{a+b-c}{(a+b)^2-c^2} \cdot \frac{(a+b)^2+c(a+b)}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{a+b-c}{(a+b-c)(a+b+c)} \cdot \frac{(a+b)(a+b+c)}{(a-b)(a+b)} = \frac{1}{a-b}$$

$$c) \frac{x^3+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2-2x+2} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{2(x^2-x+1)} = \frac{x-1}{2}$$

$$d) \frac{x^8-1}{x+1} \cdot \frac{1}{(x^2+1)(x^4+1)} = \frac{(x^4-1)(x^4+1)}{x+1} \cdot \frac{1}{(x^2+1)(x^4+1)} = \frac{x^4-1}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{12x+5}{x+9} \cdot \frac{4x+3}{360x+150} + \frac{12x+5}{x+9} \cdot \frac{6-3x}{360x+150} = \frac{12x+5}{x+9} \cdot \left(\frac{4x+3}{360x+150} + \frac{6-3x}{360x+150} \right)$$

$$= \frac{12x+5}{x+9} \cdot \frac{4x+3+6-3x}{360x+150} = \frac{12x+5}{x+9} \cdot \frac{x+9}{30(12x+5)} = \frac{1}{30}$$

b)

$$B = \frac{x+3y}{3x+y} \cdot \frac{4x-2y}{x-y} - \frac{x+3y}{3x+y} \cdot \frac{x-3y}{x-y} = \frac{x+3y}{3x+y} \cdot \left(\frac{4x-2y}{x-y} - \frac{x-3y}{x-y} \right) = \frac{x+3y}{3x+y} \cdot \left(\frac{4x-2y-x+3y}{x-y} \right)$$

$$= \frac{x+3y}{3x+y} \cdot \frac{3x+y}{x-y} = \frac{x+3y}{x-y}$$

$$c) C = \frac{x-y}{xy+y^2} - \frac{3x+y}{x^2-xy} \cdot \frac{y-x}{x+y} = \frac{x-y}{y(x+y)} - \frac{3x+y}{x(x-y)} \cdot \frac{-(x-y)}{x+y} = \frac{x-y}{y(x+y)} + \frac{3x+y}{x(x+y)}$$

$$= \frac{x(x-y)+y(3x+y)}{xy(x+y)} = \frac{x^2-xy+3xy+y^2}{xy(x+y)} = \frac{x^2+2xy+y^2}{xy(x+y)} = \frac{(x+y)^2}{xy(x+y)} = \frac{x+y}{xy}$$

$$d) D = \frac{x-1}{2x} \cdot \left(x^2+x+1 + \frac{x^3}{x-1} \right) = \frac{x-1}{2x} \cdot \frac{x^2(x-1)+x(x-1)+x-1+x^3}{x-1}$$

$$= \frac{x^3-x^2+x^2-x+x-1+x^3}{2x} = \frac{2x^3-1}{2x}$$

Bài 4. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{9x^2 - 4}{3x + 1} : \frac{3x + 2}{6x^2 + 2x} = \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{3x + 1} \cdot \frac{2x(3x + 1)}{3x + 2} = 2x(3x - 2)$$

$$b) \frac{5x - 15}{x^2 - 4} : \frac{x - 3}{x + 2} = \frac{5(x - 3)}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{(x + 2)}{x - 3} = \frac{5}{x - 2}$$

$$c) \frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 + 6x + 9} : \frac{2x - 6}{x + 3} = \frac{2(x^2 - 6x + 9)}{(x + 3)^2} \cdot \frac{x + 3}{2(x - 3)} = \frac{2(x - 3)^2}{x + 3} \cdot \frac{1}{2(x - 3)} = \frac{x - 3}{x + 3}$$

$$d) \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 3x - 10} : \frac{x - 5}{4x + 8} = \frac{(x - 5)^2}{(x + 2)(x - 5)} \cdot \frac{4(x + 2)}{x - 5} = 4$$

$$e) \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} : (x^2 + 2x + 4) = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{x + 2}$$

$$f) (3x^2 - 48) : \frac{2x - 8}{9x + 6} = 3(x^2 - 16) \cdot \frac{3(3x + 2)}{2(x - 4)} = \frac{9(x - 4)(x + 4)(3x + 2)}{2(x - 4)} = 9(x + 4)(3x + 2)$$

Bài 5. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{5x^2 - 20y^2}{3x + 6y} : \frac{5x - 10y}{9x} = \frac{5(x^2 - 4y^2)}{3(x + 2y)} \cdot \frac{9x}{5(x - 2y)} = \frac{3x(x - 2y)(x + 2y)}{(x + 2y)(x - 2y)} = 3x$$

$$b) \frac{x - 2y}{3x + 6y} : \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 4xy + 4y^2} = \frac{x - 2y}{3(x + 2y)} \cdot \frac{(x + 2y)^2}{(x - 2y)(x + 2y)} = \frac{1}{3}$$

c)

$$\frac{x^4 - y^4}{4x^2 - 4x + 1} : \frac{3x^2y + 3xy^2}{6 - 12x} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{(2x - 1)^2} \cdot \frac{6(1 - 2x)}{3xy(x + y)} = \frac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)}{(2x - 1)^2} \cdot \frac{-6(2x - 1)}{3xy(x + y)}$$

$$= \frac{-6(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(2x - 1)}{3xy(x + y)(2x - 1)^2} = \frac{-2(x - y)(x^2 + y^2)}{xy(2x - 1)}$$

d)

$$\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{2x^2 - 2xy + 2y^2} : \frac{10x - 20y}{5x^3 + 5y^3} = \frac{(x - 2y)^2}{2(x^2 - xy + y^2)} \cdot \frac{5(x^3 + y^3)}{10(x - 2y)} = \frac{(x - 2y)^2}{2(x^2 - xy + y^2)} \cdot \frac{5(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{10(x - 2y)}$$

$$= \frac{(x - 2y)^2 \cdot 5(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{2(x^2 - xy + y^2) \cdot 10(x - 2y)} = \frac{(x - 2y)(x + y)}{4}$$

Bài 6.

Ta có $B = \frac{(x-1)^2 - 6(x-1) + 9}{3x^2 - 3x} = \frac{x^2 - 16}{3x^3 - 3x}$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x^2 - 16}{3x^3 - 3x} : \frac{(x-1)^2 - 6(x-1) + 9}{3x^2 - 3x}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(x-4)(x+4)}{3x(x^2-1)} : \frac{(x-1-3)}{3x(x-1)} = \frac{(x-4)(x+4)}{3x(x-1)(x+1)} \cdot \frac{3x(x-1)}{x-4} = \frac{x+4}{x+1}$$

Vậy $B = \frac{x+4}{x+1}$

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x}{2x-8} - \frac{2}{x^2-3x-4} \cdot \left(1 + \frac{3x+x^2}{x+3}\right)$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x}{2(x-4)} - \frac{2}{(x-4)(x+1)} \cdot \left[1 + \frac{x(x+3)}{x+3}\right]$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x}{2(x-4)} - \frac{2}{(x-4)(x+1)} \cdot (1+x)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x}{2(x-4)} - \frac{2}{x-4}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x-4}{2(x-4)} = \frac{1}{2}$$

Vậy $A = \frac{1}{2}$

b) $B = \left(\frac{x^3+y^3}{x+y} - xy\right) : (x^2-y^2) + \frac{2y}{x+y}$

$$\Leftrightarrow B = \left[\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y} - xy\right] : \frac{(x-y)(x+y)}{1} + \frac{2y}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow B = (x^2 - xy + y^2 - xy) \cdot \frac{1}{(x-y)(x+y)} + \frac{2y}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)} + \frac{2y}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x-y}{x+y} + \frac{2y}{x+y} = \frac{x-y+2y}{x+y} = \frac{x+y}{x+y} = 1$$

Vậy $B = 1$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \left(\frac{x}{x-1} - \frac{4x}{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{x^3-1} \right) \cdot \left(x + \frac{2x+1}{x-1} \right) \\ \Leftrightarrow C &= \left[\frac{x}{x-1} - \frac{4x}{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right] \cdot \left[\frac{x(x-1)}{x-1} + \frac{2x+1}{x-1} \right] \\ \Leftrightarrow C &= \frac{x(x^2+x+1) - 4x(x-1) - 2x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2-x+2x+1}{x-1} \\ \Leftrightarrow C &= \frac{x^3+x^2+x-4x^2+4x-2x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x-1} \\ \Leftrightarrow C &= \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1) - 3x(x-1)}{(x-1)^2} \\ \Leftrightarrow C &= \frac{(x-1)(x^2+x+1-3x)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} \\ \Leftrightarrow C &= \frac{(x-1)(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2} = x-1 \end{aligned}$$

Vậy $C = x - 1$

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{x}{xy-y^2} + \frac{2x-y}{xy-x^2} \right) \cdot \frac{x^2y-xy^2}{x^2-2xy+y^2} \\ \Leftrightarrow A &= \left[\frac{x}{y(x-y)} + \frac{2x-y}{x(y-x)} \right] \cdot \frac{xy(x-y)}{(x-y)^2} \\ \Leftrightarrow A &= \left[\frac{x}{y(x-y)} - \frac{2x-y}{x(x-y)} \right] \cdot \frac{xy}{x-y} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{x^2 - (2x-y)y}{xy(x-y)} \cdot \frac{xy}{x-y} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2} = 1 \end{aligned}$$

Vậy $A = 1$

$$\text{b) } B = \left(\frac{x+y}{2x-2y} - \frac{x-y}{2x+2y} - \frac{2y^2}{y^2-x^2} \right) : \frac{2y}{x-y}$$

$$\Leftrightarrow B = \left[\frac{x+y}{2(x-y)} - \frac{x-y}{2(x+y)} + \frac{2y^2}{x^2-y^2} \right] : \frac{2y}{x-y}$$

$$\Leftrightarrow B = \left[\frac{x+y}{2(x-y)} - \frac{x-y}{2(x+y)} + \frac{2y^2}{(x-y)(x+y)} \right] : \frac{2y}{x-y}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2 + 4y^2}{2(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{2y}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 - 4y^2}{4(x+y)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{4xy - 4y^2}{4(x+y)} = \frac{4y(x-y)}{4(x+y)} = \frac{y(x-y)}{x+y}$$

Vậy $B = \frac{y(x-y)}{x+y}$

Bài 9.

Ta có $P = \left(\frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2} \right) \cdot \frac{4x^2-4}{5}$

$$\Leftrightarrow P = \left[\frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+3}{2(x+1)} \right] \cdot \frac{4(x^2-1)}{5}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{(x+1)^2 + 3 \cdot 2 - (x+3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4(x-1)(x+1)}{5}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{2(x^2 + 2x + 1 + 6 - x^2 + x - 3x + 3)}{5}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4$$

Vậy giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào biến.

Bài 10.

Ta có $P = \left(\frac{5x+2}{x-10} + \frac{5x-2}{x+10} \right) \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4} \quad (x \neq \pm 10)$

$$\Leftrightarrow P = \frac{(5x+2)(x+10) + (5x-2)(x-10)}{(x-10)(x+10)} \cdot \frac{(x-10)(x+10)}{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{5x^2 + 50x + 2x + 20 + 5x^2 - 50x - 2x + 20}{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{10x^2 + 40}{x^2 + 4} = \frac{10(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = 10$$

Do $P = 10$ nên giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào biến.

Vậy với $x = 20040$ thì giá trị của P không đổi và $P = 10$

Bài 11.

$$\text{a) Ta có } P = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{1-x^3} \cdot \frac{x^2+x+1}{x+1} \right) : \frac{2x+1}{x^2+2x+1}$$

$$\Leftrightarrow P = \left[\frac{1}{x-1} - \frac{x}{(1-x)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x+1} \right] : \frac{2x+1}{(x+1)^2} \quad \left(x \neq -1; x \neq \frac{-1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow P = \left[\frac{1}{x-1} - \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{x+1} \right] : \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow P = \left[\frac{1}{x-1} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} \right] : \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x+1+x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{2x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{b) Thay } x = \frac{1}{2} \text{ (tmđk) vào P, ta được } P = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{-2}{1} = -3$$

Vậy với $x = \frac{1}{2}$ thì $P = -3$.

Bài 12.

$$\text{Xét } M = \left[\frac{(x-1)^2}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$$

$$\Leftrightarrow M = \left[\frac{(x-1)^2}{3x+x^2-2x+1} - \frac{1-2x^2+4x}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow M = \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1-2x^2+4x}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{x-1} \right] \cdot \frac{x(x^2+1)}{x(x+1)}$$

a) Đkxđ:
$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

b) Ta có
$$M = \frac{(x-1)^2 \cdot (x-1) - 1 + 2x^2 - 4x + x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x(x^2+1)}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{(x-1)^3 + 3x^2 - 3x}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 3x}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{x^3 - 1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{x^2+1}{x+1}$$

Vậy
$$M = \frac{x^2+1}{x+1}$$

c) Ta có
$$|M| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x^2+1}{x+1} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+1} = \pm 1$$

TH1:

$$\frac{x^2+1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2+1 = x+1 \Leftrightarrow x^2-x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (TM) \\ x=1 & (KTM) \end{cases}$$

TH2:
$$\frac{x^2+1}{x+1} = -1 \Leftrightarrow x^2+1 = -x-1 \Leftrightarrow x^2+x+2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \text{ (vô lí, do } \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x)$$

Vậy $x = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

Bài 13.

$$a) A = \left(x^2 + \frac{4x^2}{x^2 - 4} \right) \cdot \left(\frac{x+2}{2x-4} + \frac{2-3x}{x^3-4x} \cdot \frac{x^2-4}{x-2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \left[x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)(x+2)} \right] \cdot \left[\frac{x+2}{2(x-2)} + \frac{2-3x}{x(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \right] \text{ (đkxđ:}$$

$x \neq 0; x \neq \pm 2$)

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^2(x^2-4) + 4x^2}{(x-2)(x+2)} \cdot \left[\frac{x+2}{2(x-2)} + \frac{2-3x}{x(x-2)} \right]$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^4 - 4x^2 + 4x^2}{(x-2)(x+2)} \cdot \left[\frac{x(x+2)}{2x(x-2)} + \frac{2(2-3x)}{2x(x-2)} \right]$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^4}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x^2 + 2x + 4 - 6x}{2x(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^3}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{2(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^3}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)^2}{2(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^3}{2(x+2)}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x^3}{2(x+2)}$$

$$b) \text{ Ta có } |2x-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \\ 2x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ 2x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 & (KTM) \\ x=-1 & (TM) \end{cases}$$

$$\text{Thay } x = -1 \text{ vào } A, \text{ ta được } A = \frac{(-1)^3}{2(-1+2)} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Vậy với } x = -1 \text{ thì } P = \frac{-1}{2}.$$

$$\text{Bài 14. Cho biểu thức } A = \left(\frac{x+2}{x^2+2x+1} - \frac{x-2}{x^2-1} \right) : \frac{2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}.$$

a) Rút gọn biểu thức A và tìm điều kiện của x để giá trị của A được xác định.

b) Tìm giá trị của biểu thức A tại $x = -3$; $x = \frac{1}{4}$; $x = -\frac{1}{2}$.

c) Tìm giá trị của x để giá trị của A = 3.

d) Tìm giá trị của x để giá trị của $A = \frac{2}{3}$.

a) Ta có $A = \left(\frac{x+2}{x^2+2x+1} - \frac{x-2}{x^2-1} \right) : \frac{2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{x+2}{(x+1)^2} - \frac{x-2}{(x-1)(x+1)} \right] : \frac{x(2x+1)}{x^2(x+1)-(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{x+2}{(x+1)^2} - \frac{x-2}{(x-1)(x+1)} \right] : \frac{x(2x+1)}{(x+1)(x^2-1)}$$

Đkxđ: $x \neq 0$; $x \neq \pm 1$; $x \neq \frac{-1}{2}$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} - \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)} \right] \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x+1)}{x(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^2-x+2x-2-x^2-x+2x+2}{(x+1)^2(x-1)} \cdot \frac{(x+1)^2(x-1)}{x(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2x}{x(2x+1)} = \frac{2}{2x+1}$$

Vậy $A = \frac{2}{2x+1} \left(x \neq 0; x \neq \pm 1; x \neq \frac{-1}{2} \right)$

b)

+ Với $x = -3$ (tmđk) thay vào A ta được $A = \frac{2}{2 \cdot (-3) + 1} = \frac{2}{-5} = \frac{-2}{5}$.

+ Với $x = \frac{1}{4}$ (tmđk) thay vào A ta được $A = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{4} + 1} = \frac{2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$.

+ Với $x = -\frac{1}{2}$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá trị của A không xác định.

c) Xét $A = 3 \left(x \neq 0; x \neq \pm 1; x \neq \frac{-1}{2} \right)$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2 = 3(2x+1) \Leftrightarrow 2 = 6x+3 \Leftrightarrow 6x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x = -\frac{1}{6}$

d) Xét $A = \frac{2}{3} \left(x \neq 0; x \neq \pm 1; x \neq \frac{-1}{2} \right)$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2x+1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x+1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy không có giá trị nào của x để $A = \frac{2}{3}$.

Bài 15.

Ta có $P = \left(\frac{x^2-2}{x^2+2x} + \frac{1}{x+2} \right) : \frac{x+1}{x}$ với $x \neq 0; -2; -1$

$$\Leftrightarrow P = \left[\frac{x^2-2}{x(x+2)} + \frac{1}{x+2} \right] : \frac{x+1}{x} = \frac{x^2-2+x}{x(x+2)} : \frac{x+1}{x}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x+2)} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

Vậy $P = \frac{x-1}{x+1}$

b) Ta có $P = \frac{5}{2} \text{ (} x \neq 0; -2; -1 \text{)}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(x-1) = 5(x+1) \Leftrightarrow 2x-2 = 5x+5 \Leftrightarrow 3x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{3}$$

Vậy $x = \frac{-7}{3}$

c) Ta có $P = \frac{x-1}{x+1} \text{ (} x \neq 0; -2; -1 \text{)}$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

Để P nguyên thì $\frac{2}{x+1}$ nguyên $\Leftrightarrow 2 : (x+1) \Leftrightarrow x+1 \in U(2)$ hay $x+1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$

$$\Leftrightarrow x \in \{-3; -2; 0; 1\}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = -3$

Vậy $x = -3$

Bài 16.

$$\text{a) Ta có } B = \frac{6-7x}{x^2-4} + \frac{3}{x+2} - \frac{x}{2-x} = \frac{6-7x}{(x-2)(x+2)} + \frac{3}{x+2} + \frac{x}{x-2}$$

Đkxđ: $x \neq \pm 2$

$$\Leftrightarrow B = \frac{6-7x+3(x-2)+x(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{6-7x+3x-6+x^2+2x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x^2-2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x+2}$$

Vậy $B = \frac{x}{x+2}$

b) Với $A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x-3) = x+2 \Leftrightarrow 2x-6 = x+2 \Leftrightarrow x = 8$ (tmdk)

Thay $x = 8$ vào B ta được $B = \frac{8}{8+2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Vậy khi $A = \frac{1}{2}$ thì $B = \frac{4}{5}$.

c) Ta có $M = \frac{A}{B} = \frac{x-3}{x+2} : \frac{x}{x+2} = \frac{x-3}{x}$ (đkxđ: $x \neq 0; x \neq \pm 2$)

Để $|M| = -M \Leftrightarrow M \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

Vậy với $x \leq 3$ thì $|M| = -M$

Bài 17. Cho biểu thức $A = \frac{x^2-x-4}{x^2-9} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+3}$ và $B = \frac{x+2}{x+3}$ với $x \neq \pm 3; x > 2$.

a) Tính giá trị của B khi $x = 3$.

b) Rút gọn biểu thức A.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A : B \cdot (x-3)$

a) Ta có $A = \frac{x^2-x-4}{x^2-9} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+3}$ ($x \neq \pm 3; x > 2$)

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^2-x-4}{(x-3)(x+3)} + \frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^2-x-4+2x+6-x+3}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^2 + 5}{(x-3)(x+3)}$$

b) Xét $P = \frac{x^2 + 5}{(x-3)(x+3)} : \frac{x+2}{x+3} \cdot (x-3) \quad (x \neq \pm 3; x > 2)$

$$P = \frac{x^2 + 5}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+2} \cdot (x-3) = \frac{x^2 + 5}{x+2}$$

$$P = \frac{x^2 - 4 + 9}{x+2} = x - 2 + \frac{9}{x+2} = x + 2 + \frac{9}{x+2} - 4$$

Với $x \neq \pm 3; x > 2$, áp dụng BĐT Cosi cho hai số $x+2$ và $\frac{9}{x+2}$ ta được

$$x + 2 + \frac{9}{x+2} \geq 2(x+2) \cdot \frac{9}{x+2} = 18 \quad (x \neq \pm 3; x > 2)$$

$$\Leftrightarrow x + 2 + \frac{9}{x+2} - 4 \geq 18 - 4 \quad (x \neq \pm 3; x > 2)$$

$$\Leftrightarrow P \geq 14 \quad (x \neq \pm 3; x > 2)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + 2 = \frac{9}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow x + 2 = 9 \Leftrightarrow x = 7$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 14 \Leftrightarrow x = 7$.

Bài 18.

Ta có $VT = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} \right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot \frac{c-b-a}{abc}$ (1)

Do $a+b=c$ nên $c-b-a=0$ thay vào (1) ta được

$$VT = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot \frac{0}{abc} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = VP$$

Vậy $VT = VP$ (đpcm)

Bài 19.

Xét $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-2n+1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

Ta có $2A = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

$$2A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} < 1$$

$$\Rightarrow 2A < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{2}$$

Vậy $A < \frac{1}{2}$.

Bài 20.

$$\text{Ta có } M = \left(\frac{b+c}{a} + 1 \right) + \left(\frac{c+a}{b} + 1 \right) + \left(\frac{a+b}{c} + 1 \right) - 3$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{b+c+a}{c} + \frac{c+a+b}{b} + \frac{a+b+c}{c} - 3 = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3$$

$$\text{Do } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \text{ nên } M = (a+b+c) \cdot 0 - 3 = -3$$

Vậy $M = -3$.

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \left(\frac{x-2}{x^2-1} - \frac{x+2}{x^2+2x+1} \right) \cdot \frac{x^4-2x^2+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+2}{(x+1)^2} \right] \cdot \frac{(x^2-1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(x-2)(x+1) - (x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \cdot \frac{(x^2-1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^2+x-2x-2-x^2+x-2x+2}{(x-1)(x+1)^2} \cdot \frac{(x^2-1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-2x}{(x^2-1)(x+1)} \cdot \frac{(x^2-1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-x(x^2-1)}{x+1} = \frac{-x(x-1)(x+1)}{x+1} = -x(x-1)$$

Vậy $A = -x(x-1)$

$$b) B = \left[\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2-3x} - \frac{2x^2+4x-1}{x^3+1} - \frac{1}{x+1} \right] \cdot \frac{x^2-4}{3x^2+6x}$$

$$\Leftrightarrow B = \left[\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+1-3x} - \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)(x^2+x+1)} - \frac{1}{x+1} \right] \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{3x(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow B = \left[\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{1}{x+1} \right] \cdot \frac{x-2}{3x}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(x+1)^3 - 2x^2 - 4x + 1 - x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x-2}{3x}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x^2 - 4x + 1 - x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{3x}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x^3+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{3x}{x-2} = \frac{3x}{x-2}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{3x}{x-2}$$

$$c) C = \left(\frac{x^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x-y} \right) : \frac{x^3-y^3}{x^5-x^4y-xy^4+y^5}$$

$$\Leftrightarrow C = \left[\frac{x^2}{(x-y)(x+y)} + \frac{y}{x-y} \right] : \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^4(x-y)-y^4(x-y)}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{x^2+y(x+y)}{(x-y)(x+y)} : \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^4-y^4)(x-y)}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{(x^4-y^4)(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{x^4-y^4}{(x-y)(x+y)}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2-y^2} = x^2+y^2$$

$$\text{Vậy } C = x^2+y^2$$

Bài 2.

$$\text{Ta có } A = \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \cdot \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{ab} \right] \cdot \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} \right] \cdot \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{b^2+a^2+2ab}{a^2b^2} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(a+b)^2}{a^2b^2} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{1}{ab}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{ab}$$

Bài 3.

$$\text{Ta có } B = \left[\frac{1}{(2x-y)^2} + \frac{2}{4x^2-y^2} + \frac{1}{(2x+y)^2} \right] \cdot \frac{4x^2+4xy+y^2}{16x}$$

$$\Leftrightarrow B = \left[\frac{1}{(2x-y)^2} + \frac{2}{(2x-y)(2x+y)} + \frac{1}{(2x+y)^2} \right] \cdot \frac{(2x+y)^2}{16x}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(2x+y)^2 + 2(2x-y)(2x+y) + (2x-y)^2}{(2x-y)^2(2x+y)^2} \cdot \frac{(2x+y)^2}{16x}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(2x+y+2x-y)^2}{(2x-y)^2(2x+y)^2} \cdot \frac{(2x+y)^2}{16x}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(4x)^2}{(2x-y)^2} \cdot \frac{1}{16x}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{(4x)^2}{(2x-y)^2} \cdot \frac{1}{16x} = \frac{16x^2}{(2x-y)^2} \cdot \frac{1}{16x} = \frac{x}{(2x-y)^2}$$

Vậy $B = \frac{x}{(2x-y)^2}$

Bài 4.

Ta có $A = \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \cdot \frac{1 + \frac{a}{b+c}}{1 - \frac{a}{b+c}} \cdot \frac{b^2 + c^2 - (b-c)^2}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{a+b+c}{b+c-a} \cdot \frac{b^2 + c^2 - b^2 + 2bc - c^2}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{a+b+c}{b+c-a} \cdot \frac{2bc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{a+b+c}{b+c-a} \cdot \frac{2bc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} \cdot \frac{2bc}{b+c-a}$$

$$\Leftrightarrow A = a+b+c$$

Vậy $A = a+b+c$

Bài 5.

a) $A = \left(\frac{x}{x-2} + \frac{3x-2}{2x-x^2} \right) : \left(\frac{x+2}{x} + \frac{4-x}{x-2} \right) \quad (x \neq 0; x \neq 2)$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x}{x-2} + \frac{3x-2}{x(2-x)} \right) : \left(\frac{x+2}{x} + \frac{4-x}{x-2} \right) \\
&= \left(\frac{x^2}{x(x-2)} - \frac{3x-2}{x(x-2)} \right) : \left(\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} + \frac{(4-x)x}{x(x-2)} \right) \\
&= \left(\frac{x^2-3x+2}{x(x-2)} \right) : \left(\frac{x^2-4+4x-x^2}{x(x-2)} \right) \\
&= \left(\frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)} \right) : \left(\frac{4(x-1)}{x(x-2)} \right) \\
&= \left(\frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)} \right) \cdot \left(\frac{x(x-2)}{4(x-1)} \right) \\
&= \frac{x-2}{4}
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x-2}{4}$ ($x \neq 0; x \neq 2$)

b) Ta có $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 & (KTM) \\ x=3 & (TM) \end{cases}$

Thay $x = 3$ (tmdk) vào A, ta có $A = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$

Vậy với $x = 3$ thì $A = \frac{1}{4}$.

Bài 6.

a) $P = \left(\frac{x^2-3x}{x^2-9} - 1 \right) : \left(\frac{9-x^2}{x^2+x-6} - \frac{x-3}{2-x} - \frac{x-2}{x+3} \right)$ ($x \neq \pm 3; x \neq 2$)

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} - 1 \right) : \left(\frac{9-x^2}{(x-2)(x+3)} + \frac{x-3}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} \right) \\
&= \left(\frac{x}{x+3} - 1 \right) : \left(\frac{9-x^2}{(x-2)(x+3)} + \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+3)} - \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+3)} \right) \\
&= \left(\frac{x-x-3}{x+3} \right) : \left(\frac{9-x^2+x^2-9-x^2+4x-4}{(x-2)(x+3)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-3}{x+3} \right) : \left(\frac{-x^2+4x-4}{(x-2)(x+3)} \right) \\
&= \left(\frac{-3}{x+3} \right) \cdot \left(\frac{(x-2)(x+3)}{-(x-2)^2} \right) \\
&= \frac{3}{x-2}
\end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{3}{x-2}$ ($x \neq \pm 3; x \neq 2$)

b) Ta có

$$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (TM) \\ x = 2 & (KTM) \\ x = -2 & (TM) \end{cases}$$

+ Thay $x = 0$ (tmđk) vào P , ta được $P = \frac{3}{0-2} = \frac{-3}{2}$.

+ Thay $x = -2$ (tmđk) vào P , ta được $P = \frac{3}{-2-2} = \frac{-3}{4}$.

Vậy với $x = 0$ thì $P = \frac{-3}{2}$; với $x = -2$ thì $P = \frac{-3}{4}$.

Bài 7.

a) $P = \left(\frac{x+2}{2-x} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{4x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2}{2-x} \right)$ ($x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$)

$$= \left(\frac{x+2}{2-x} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{4x^2}{(2-x)(2+x)} \right) : \left(\frac{x+3}{x(x-2)} - \frac{2}{x-2} \right)$$

$$= \frac{(x+2)^2 + (2-x)(x-2) + 4x^2}{(2-x)(2+x)} : \frac{x+3-2x}{x(x-2)}$$

$$= \frac{x^2+4x+4-(x-2)^2+4x^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(x-2)}{3-x}$$

$$= \frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4+4x^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{-x(2-x)}{3-x}$$

$$= \frac{4x^2+8x}{x+2} \cdot \frac{-x}{3-x}$$

$$= \frac{4x(x+2)}{x+2} \cdot \frac{-x}{3-x}$$

$$= \frac{-4x^2}{3-x} = \frac{4x^2}{x-3}$$

Vậy $P = \frac{4x^2}{x-3}$ ($x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$)

b) Ta có $P < 0$ ($x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$)

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} < 0$$

Do $4x^2 > 0$ ($\forall x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$) nên $\frac{4x^2}{x-3} < 0$ khi $x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$

Kết hợp với điều kiện ta được $x < 3$ và $x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$.

Vậy $x < 3$ và $x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$.

Bài 8.

a) $P = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

$$\Leftrightarrow P = 1 + \frac{x+3}{(x+2)(x+3)} : \left[\frac{8x^2}{4x^2(x-2)} - \frac{3x}{3(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} \right] \quad (1)$$

Đkxđ: $x \neq -3; x \neq \pm 2; x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow P = 1 + \frac{1}{x+2} : \left[\frac{2}{(x-2)} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} \right]$$

$$\Leftrightarrow P = 1 + \frac{1}{x+2} : \frac{2(x+2) - x - x + 2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow P = 1 + \frac{1}{x+2} : \frac{2x+4-x-x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow P = 1 + \frac{1}{x+2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{6}$$

$$\Leftrightarrow P = 1 + \frac{x-2}{6} = \frac{6+x-2}{6} = \frac{x+4}{6}$$

Vậy $P = \frac{x+4}{6}$ ($x \neq -3; x \neq \pm 2; x \neq 0$)

$$b) P = \frac{x+4}{6} \quad (x \neq -3; x \neq \pm 2; x \neq 0)$$

$$\text{Với } P = 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ (tmđk)}$$

$$\text{Với } P = 1 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} = 1 \Leftrightarrow x+4 = 6 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (không tmđk)}$$

$$c) P = \frac{x+4}{6} \quad (x \neq -3; x \neq \pm 2; x \neq 0)$$

$$\text{Ta có } P > 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} > 0 \Leftrightarrow x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4 \text{ (do } 6 > 0)$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x > -4$ và $x \neq -3; x \neq \pm 2; x \neq 0$

Vậy với $x > -4$ và $x \neq -3; x \neq \pm 2; x \neq 0$ thì $P > 0$.

Bài 9.

$$a) P = \left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} - \frac{4x^2}{x^2-1} \right) : \frac{4x^2-4}{x^2-2x+1} \quad (x \neq \pm 1)$$

$$= \left(\frac{-(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} + \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)} \right) : \frac{4(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \left(\frac{(x-1)^2 - (x+1)^2 - 4x^2}{(x-1)(x+1)} \right) : \frac{4(x+1)}{(x-1)}$$

$$= \left(\frac{-4x - 4x^2}{(x-1)(x+1)} \right) \cdot \frac{(x-1)}{4(x+1)}$$

$$= \left(\frac{-4x(x+1)}{(x-1)(x+1)} \right) \cdot \frac{(x-1)}{4(x+1)}$$

$$= \frac{-x}{x+1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{-x}{x+1} \quad (x \neq \pm 1)$$

b) Ta có

$$x^2 + 4x = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 & (TM) \\ x=1 & (KTM) \end{cases}$$

Thay $x = -5$ (tmdk) vào P ta được $P = \frac{-(-5)}{-5+1} = \frac{-5}{4}$

Vậy với $x = -5$ thì $P = \frac{-5}{4}$

c) Ta có $P = \frac{-x}{x+1} = \frac{-x-1+1}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}$ ($x \neq \pm 1$)

Để P có giá trị nguyên thì $\frac{1}{x+1}$ nguyên $\Leftrightarrow x+1 \in U(1)$ hay $x+1 \in \{-1; 1\} \Leftrightarrow x \in \{-2; 0\}$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = -2$ và $x = 0$.

Vậy $x \in \{-2; 0\}$

Bài 10.

a) $P = \left(\frac{x-1}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} + \frac{4x-2}{x^2-9} \right) : \left(1 - \frac{x+1}{x+3} \right)$ ($x \neq \pm 3$)

$$= \left(\frac{(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{(x-3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{4x-2}{(x+3)(x-3)} \right) : \left(\frac{x+3-x-1}{x+3} \right)$$

$$= \left(\frac{x^2+2x-3+x^2-6x+9+4x-2}{(x+3)(x-3)} \right) : \left(\frac{2}{x+3} \right)$$

$$= \left(\frac{2x^2+4}{(x+3)(x-3)} \right) \cdot \left(\frac{x+3}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{2(x^2+2)}{(x+3)(x-3)} \right) \cdot \left(\frac{x+3}{2} \right)$$

$$= \frac{x^2+2}{x-3}$$

Vậy $P = \frac{x^2+2}{x-3}$ ($x \neq \pm 3$)

b) Ta có $|2x-1|-1=0 \Leftrightarrow |2x-1|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (TM)} \\ x=0 \text{ (TM)} \end{cases}$

+ Với $x = 0$ (tmdk) vào P ta được $P = \frac{0^2+2}{0-3} = \frac{-2}{3}$.

+ Với $x = 1$ (tmđk) vào P ta được $P = \frac{1^2 + 2}{1^2 - 3} = \frac{-3}{2}$

Vậy với $x = 0$ thì $P = \frac{-2}{3}$; với $x = 1$ thì $P = \frac{-3}{2}$.

c) Ta có $P = \frac{x^2 + 2}{x - 3} = x + 3 + \frac{11}{x - 3}$ ($x \neq \pm 3$)

Để P có giá trị nguyên thì $\frac{11}{x - 3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - 3 \in U(11)$ hay $x - 3 \in \{-11; -1; 1; 11\}$

$\Leftrightarrow x \in \{-8; 2; 4; 14\}$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{-8; 2; 4; 14\}$

Vậy $x \in \{-8; 2; 4; 14\}$

Bài 11.

a) Ta có $A = \left(\frac{1+2x}{x+2} - \frac{x}{x-2} + \frac{x^2+8}{4-x^2} \right) : \frac{-5}{x+1}$ ($x \neq \pm 2; x \neq 1$)

$\Leftrightarrow A = \left[\frac{1+2x}{x+2} - \frac{x}{x-2} - \frac{x^2+8}{(x-2)(x+2)} \right] : \frac{-5}{x+1}$

$\Leftrightarrow A = \frac{(1+2x)(x-2) - x(x+2) - x^2 - 8}{(x+2)(x-2)} : \frac{-5}{x+1}$

$\Leftrightarrow A = \frac{x-2+2x^2-4x-x^2-2x-x^2-8}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x+1}{-5}$

$\Leftrightarrow A = \frac{-5x-10}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x+1}{-5}$

$\Leftrightarrow A = \frac{-5(x+2)}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x+1}{-5}$

$\Leftrightarrow A = \frac{x+1}{x-2}$

Vậy $A = \frac{x+1}{x-2}$

b) Ta có $A < 1$ ($x \neq \pm 2; x \neq 1$)

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x+2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ (do } 3 >$$

0)

Kết hợp với điều kiện ta được $x < 2$ và $x \neq -2; x \neq 1$

Vậy với $x < 2$ và $x \neq -2; x \neq 1$ thì $A > 1$

c) Xét $A = \frac{x+1}{x-2}$ ($x \neq \pm 2; x \neq 1$)

$$\Leftrightarrow A = \frac{x-2+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

Để A nhận giá trị nguyên thì $\frac{3}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-2 \in U(3)$ hay $x-2 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{-1; 3; 5\}$ thì A nhận giá trị nguyên

$$+ \text{ Với } x = -1 \text{ thay vào A ta được } A = \frac{-1+1}{-1-2} = 0$$

$$+ \text{ Với } x = 3 \text{ thay vào A ta được } A = \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$+ \text{ Với } x = 5 \text{ thay vào A ta được } A = \frac{5+1}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$$

Vậy với $x = 3$ thì A nhận giá trị nguyên lớn nhất là $A = 4$.

Bài 12.

$$a) Q = \left(\frac{2x-x^2}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) \cdot \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1-x}{x} \right) \quad (x \neq 0; x \neq 2)$$

$$\Leftrightarrow Q = \left[\frac{2x-x^2}{2(x^2+4)} - \frac{2x^2}{x^2(x-2)+4(x-2)} \right] \cdot \frac{2+(1-x)x}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow Q = \left[\frac{2x-x^2}{2(x^2+4)} - \frac{2x^2}{(x-2)(x^2+4)} \right] \cdot \frac{2+(1-x)x}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{(2x-x^2)(x-2) - 2x^2 \cdot 2}{2(x-2)(x^2+4)} \cdot \frac{2+x-x^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{2x^2 - 4x - x^3 + 2x^2 - 4x^2}{2(x-2)(x^2+4)} \cdot \frac{2+x-x^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{-4x - x^3}{2(x-2)(x^2+4)} \cdot \frac{-(x^2-x-2)}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{-x(x^2+4)}{2(x-2)(x^2+4)} \cdot \frac{-(x^2-x-2)}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{x^2-x-2}{2x(x-2)} = \frac{(x-2)(x+1)}{2x(x-2)} = \frac{x+1}{2x}$$

Vậy $Q = \frac{x+1}{2x}$ ($x \neq 0; x \neq 2$)

b) Ta có $Q = \frac{x+1}{2x} \Leftrightarrow 2Q = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

Để Q nhận giá trị nguyên thì 2Q nhận giá trị nguyên

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(1) \text{ hay } x \in \{-1; 1\}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{-1; 1\}$

Vậy với $x \in \{-1; 1\}$ thì Q nhận giá trị nguyên.

Bài 13.

a) $A = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3} + \frac{-2x}{x^2-9}$ ($x \neq \pm 3$)

$$\Leftrightarrow A = \frac{2(x+3) + x-3 - 2x}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2x+6+x-3-2x}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{x-3}$$

Vậy $A = \frac{1}{x-3}$

$$b) B = \frac{11-7x}{x^2-x-6} - \frac{3-x}{2+x} - \frac{x-1}{3-x} \quad (x \neq -2; x \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{11-7x}{(x+2)(x-3)} - \frac{3-x}{x+2} + \frac{x-1}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{11-7x - (3-x)(x-3) + (x-1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{11-7x+x^2-6x+9+x^2-x+2x-2}{(x+2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{2x^2-12x+18}{(x+2)(x-3)} = \frac{2(x-3)^2}{(x+2)(x-3)} = \frac{2(x-3)}{x+2}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{2(x-3)}{x+2}$$

$$c) \text{ Xét } P = A.B.(x+1) \quad (x \neq -2; x \neq \pm 3)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{x-3} \cdot \frac{2(x-3)}{x+2} \cdot (x+1)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{2x+2}{x+2} = \frac{2x+4-2}{x+2} = 2 - \frac{2}{x+2}$$

Để P nhận giá trị nguyên $\frac{2}{x+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+2 \in U'(2)$ hay

$$x+2 \in \{-2; -1; 1; 2\} \Leftrightarrow x \in \{-4; -3; -1; 0\}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{-4; -1; 0\}$

Vậy với $x \in \{-4; -1; 0\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

Bài 14.

$$a) \text{ Ta có } D = \left(\frac{x}{x^2-25} - \frac{x-5}{x^2+5x} \right) : \frac{10x-25}{x^2+5x} + \frac{2x}{5-x}$$

$$\Leftrightarrow D = \left[\frac{x}{(x-5)(x+5)} - \frac{x-5}{x(x+5)} \right] : \frac{5(2x-5)}{x(x+5)} + \frac{2x}{5-x} \quad (1)$$

$$\text{Đkxđ: } x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow D = \frac{x^2 - (x-5)^2}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x(x+5)}{5(2x-5)} + \frac{2x}{5-x}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{(x-x+5)(x+x-5)}{x(x-5)} \cdot \frac{x}{5(2x-5)} + \frac{2x}{5-x}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{5(2x-5)}{x-5} \cdot \frac{1}{5(2x-5)} + \frac{2x}{5-x}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{1}{x-5} + \frac{2x}{5-x} = \frac{1-2x}{x-5}$$

Vậy $D = \frac{1-2x}{x-5}$

b) $D = \frac{1-2x}{x-5} \left(x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2} \right)$

Thay $x = 1$ (tmđk) vào D ta được $D = \frac{1-2 \cdot 1}{1-5} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$.

Vậy với $x = 1$ thì $D = \frac{1}{4}$.

c) Ta có $D = 2023 \left(x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2} \right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x-5} = 2023 \Leftrightarrow 1-2x = 2023x - 10115 \Leftrightarrow 2025x = 10116 \Leftrightarrow x = \frac{1124}{225} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy để $D = 2023$ thì $x = \frac{1124}{225}$.

d) Ta có $D = \frac{1-2x}{x-5} \left(x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2} \right)$

$$\Leftrightarrow D = \frac{1-2x}{x-5} = \frac{-9-2(x-5)}{x-5} = -2 - \frac{9}{x-5}$$

Để D nhận giá trị nguyên thì $\frac{9}{x-5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-5 \in U'(9)$ hay $x-5 \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}$

$$\Leftrightarrow x \in \{4; 6; 2; 8; 14; -4\}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{4; 6; 2; 8; 14; -4\}$

Vậy với $x \in \{4; 6; 2; 8; 14; -4\}$ thì D nhận giá trị nguyên.

Bài 15.

$$\begin{aligned}
\text{a) } P &= \frac{x-1}{2} : \left(\frac{x^2+2}{x^3-1} + \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x} \right) \quad (x \neq 1) \\
&= \frac{x-1}{2} : \left(\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x} \right) \\
&= \frac{x-1}{2} : \left(\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) \\
&= \frac{x-1}{2} : \left(\frac{x^2+2+x^2-x-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) \\
&= \frac{x-1}{2} : \left(\frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) \\
&= \frac{x-1}{2} : \left(\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) \\
&= \frac{x-1}{2} : \left(\frac{(x-1)}{(x^2+x+1)} \right) \\
&= \frac{x-1}{2} \cdot \left(\frac{(x^2+x+1)}{(x-1)} \right) \\
&= \frac{x^2+x+1}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{b) Xét } \frac{x^2+x+1}{2} = \frac{1}{2} \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{8}$$

$$\text{Ta có } \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \quad (\forall x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \quad (\forall x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{8} \geq \frac{3}{8} \quad (\forall x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{3}{8} \quad (\forall x \neq 1)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P = \frac{3}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Bài 16.

$$\text{a) } A = \frac{x}{x+5} - \frac{7x-15}{25-x^2} + \frac{3}{x-5} \quad (x \neq \pm 5)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x}{x+5} + \frac{7x-15}{(x-5)(x+5)} + \frac{3}{x-5}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x(x-5) + 7x - 15 + 3x + 15}{(x+5)(x-5)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^2 - 5x + 7x - 15 + 3x + 15}{(x+5)(x-5)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^2 + 5x}{(x+5)(x-5)} = \frac{x}{x-5}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x}{x-5}$$

$$\text{b) Ta có } |2x-1| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=9 \\ 2x-1=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 & (\text{KTM}) \\ x=-4 & (\text{TM}) \end{cases}$$

$$\text{Thay } x = -4 \text{ (tmđk) vào } A \text{ ta được } A = \frac{-4}{-4-5} = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Vậy với } x = -4 \text{ thì } A = \frac{4}{9}.$$

$$\text{c) Ta có } P = A \cdot B \quad (x \neq \pm 5)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x}{x-5} \cdot (x^2 - 2x - 15) = \frac{x(x-5)(x+3)}{x-5} = x(x+3) = x^2 + 3x = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow P = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$\text{Do } \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0 \quad (\forall x \neq \pm 5)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4} \quad (\forall x \neq \pm 5)$$

$$P \geq -\frac{9}{4} \quad (\forall x \neq \pm 5)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Bài 17.

a) Đkxđ: $x \neq 2; x \neq -2$

$$\text{b) Ta có } A = \left(\frac{x+2}{2x-4} - \frac{x-2}{2x+4} - \frac{8}{4-x^2} \right) : \frac{4}{x-2} \cdot (x^2 - 2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{x+2}{2(x-2)} - \frac{x-2}{2(x+2)} - \frac{8}{(2-x)(2+x)} \right] : \frac{4}{x-2} \cdot (x-3)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(x+2)^2 - (x-2)^2 + 16}{2(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{4} \cdot (x^2 - 2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 + 16}{2(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{4} \cdot (x^2 - 2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{8x + 16}{8(x+2)} \cdot (x^2 - 2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow A = x^2 - 2x + 3$$

Vậy $A = x^2 - 2x + 3$ ($x \neq 2; x \neq -2$)

$$\text{c) Thay } x = -\frac{1}{2} \text{ (tmđk) vào } A, \text{ ta được } A = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

Vậy với $x = -\frac{1}{2}$ thì $A = \frac{17}{4}$

d) Ta có $A = 3$ ($x \neq 2; x \neq -2$)

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (TM) \\ x = 2 & (KTM) \end{cases}$$

Vậy tại $x = 0$ thì $A = 3$.

e) Ta có $A = x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$ ($\forall x \neq 2; x \neq -2$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = 2$ tại $x = 1$.

Bài 18. D

a) $Q = \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x} + 1 - \frac{1}{x} \right] : \left(\frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} \right)$

$$\Leftrightarrow Q = \left[\frac{(x-1)^2}{x(x+1)} + 1 - \frac{1}{x} \right] : \left[\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} - \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} \right] \quad (1)$$

Đkxd: $x \neq 0; x \neq \pm 1$

$$(1) \Leftrightarrow Q = \left[\frac{(x-1)^2}{x(x+1)} + \frac{x-1}{x} \right] : \left(\frac{x^2+x+1}{x} - \frac{x^2-x+1}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow Q = \left[\frac{(x-1)^2}{x(x+1)} + \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} \right] : \frac{x^2+x+1-x^2+x-1}{x}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{x^2-2x+1+x^2-1}{x(x+1)} : \frac{2x}{x}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{2x^2-2x}{x(x+1)} : 2$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{2x(x-1)}{x(x+1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x-1}{x+1}$$

Vậy $Q = \frac{x-1}{x+1}$

b) Ta có $Q = \frac{x-1}{x+1}$ ($x \neq 0; x \neq \pm 1$)

$$\Leftrightarrow Q = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

Để Q nhận giá trị nguyên thì $\frac{2}{x+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 \in U(2)$ hay $x+1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$

$$\Leftrightarrow x \in \{-3; -2; 0; 1\}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{-3; -2\}$

Vậy với $x \in \{-3; -2\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

c) Ta có $P = \frac{(x-1)^2}{Q} + x + 1 \quad (x \neq 0; x \neq \pm 1)$

$$\Leftrightarrow P = \frac{(x-1)^2}{\frac{x-1}{x+1}} + x + 1 = (x-1)^2 \cdot \frac{x+1}{x-1} + x + 1 = (x-1)(x+1) + x + 1 = x^2 - 1 + x + 1 = x^2 + x$$

Xét $P = x^2 + x = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \quad (\forall x \neq 0; x \neq \pm 1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Bài 19. D

a) $A = \left(\frac{2x}{x^3 + x - x^2 - 1} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1}\right) \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow A = \left(\frac{2x}{x(x^2 + 1) - (x^2 + 1)} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1}\right)$$

$$\Leftrightarrow A = \left(\frac{2x}{(x^2 + 1)(x-1)} - \frac{1}{x-1}\right) : \frac{x^2 + 1 + x}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2x - x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x-1)} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-(x-1)^2}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-(x-1)}{x^2 + x + 1} = \frac{1-x}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1-x}{x^2+x+1}$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{A}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{1-x}{x^2+x+1} : (1-x) = \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x^2+2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\text{Do } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad (\forall x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \quad (\forall x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \leq -4 \quad (\forall x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow B \leq -4 \quad (\forall x \neq 1)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } B = -4 \text{ khi } x = -\frac{1}{2}.$$

Bài 20. D

$$\text{a) } Q = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \quad (x \neq 0; x \neq \pm 2; x \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow Q = \left[\frac{2+x}{2-x} + \frac{4x^2}{(2-x)(2+x)} - \frac{2-x}{2+x} \right] : \frac{x(x-3)}{x^2(2-x)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{(2+x)^2 + 4x^2 - (2-x)^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x^2(2-x)}{x(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{4 + 4x + x^2 + 4x^2 - 4 + 4x - x^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{8x + 4x^2}{2+x} \cdot \frac{x}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{4x(2+x)}{2+x} \cdot \frac{x}{x-3} = \frac{4x^2}{x-3}$$

Vậy $Q = \frac{4x^2}{x-3}$ ($x \neq 0$; $x \neq \pm 2$; $x \neq 3$)

b) Ta có $Q = \frac{4x^2}{x-3}$ ($x > 3$)

$$\Leftrightarrow Q = \frac{4x^2 - 36 + 36}{x-3} = \frac{4(x^2 - 9) + 36}{x-3} = \frac{4(x-3)(x+3) + 36}{x-3} = 4(x+3) + \frac{36}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow Q = 4x + 12 + \frac{36}{x-3} = 4x - 12 + \frac{36}{x-3} + 24 = 4(x-3) + \frac{36}{x-3} + 24$$

Với $x > 3$, áp dụng BĐT Cosi cho hai số $4(x-3)$; $\frac{36}{x-3}$ ta được:

$$4(x-3) + \frac{36}{x-3} \geq 2\sqrt{4(x-3) \cdot \frac{36}{x-3}} = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$$

$$\Leftrightarrow 4(x-3) + \frac{36}{x-3} + 24 \geq 48 \Leftrightarrow Q \geq 48$$

Dấu "=" xảy ra $4(x-3) = \frac{36}{x-3} \Leftrightarrow (x-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x-3 = 3 \Leftrightarrow x = 6$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị nhỏ của $Q = 48 \Leftrightarrow x = 6$

Bài 21. D

a) Xét $x^2y^2 + 1 + (x^2 - y)(1 - y) \neq 0$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + 1 + x^2 - x^2y - y + y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 - x^2y + x^2 + y^2 - y + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(y^2 - y + 1) + y^2 - y + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - y + 1)(x^2 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \left[\left(y^2 - y + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4} \right] (x^2 + 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] (x^2 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{R}$$

Vậy điều kiện xác định là $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{b) Ta có } A &= \frac{\frac{1}{4}x^2 + x^2y + \frac{1}{4}y + y^2 + x^2y^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}y}{x^2y^2 + 1 + (x^2 - y)(1 - y)} \\
&= \frac{x^2y + x^2y^2 + \frac{1}{4}x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4}}{x^2y^2 + 1 + x^2 - x^2y - y + y^2} = \frac{x^2\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right)}{(y^2 - y + 1) + x^2(y^2 - y + 1)} \\
&= \frac{\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right)(x^2 + 1)}{(y^2 - y + 1)(x^2 + 1)} = \frac{y^2 + y + \frac{1}{4}}{y^2 - y + 1}
\end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến x.

$$\text{c) Xét } A = \frac{y^2 + y + \frac{1}{4}}{y^2 - y + 1} = \frac{y^2 + 2y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{y^2 - 2y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq 0$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } A = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

Bài 22. D

$$\text{a) Ta có } E = \frac{\frac{2}{x-1} - \frac{x}{x^2+x+1}}{(x-3)\left(x - \frac{x^4+2}{x^3-1}\right)} \quad (\text{đkxđ: } x \neq 1; x \neq 3; x \neq -2)$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow E &= \frac{\frac{2(x^2+x+1) - x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}}{(x-3) \cdot \frac{x^4 - x - x^4 - 2}{x^3 - 1}} = \frac{\frac{2x^2 + 2x + 2 - x^2 + x}{(x-1)(x^2+x+1)}}{\frac{-(x-3)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}} = \frac{x^2 + 3x + 2}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-3)(x+2)}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{(x+1)(x+2)}{-(x-3)(x+2)} = \frac{x+1}{3-x}$$

$$\text{Vậy } E = \frac{x+1}{3-x}$$

$$\text{b) } E = \frac{x+1}{3-x} \quad (x \neq 1; x \neq 3; x \neq -2)$$

$$\text{Ta có } E = \frac{x+1}{3-x} = -\frac{x+1}{x-3} = -\frac{x-3+4}{x-3} = -1 - \frac{4}{x-3}$$

$$\text{Để } E \text{ đạt giá trị nguyên thì } \frac{4}{x-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-3 \in U(4)$$

$$\text{Hay } x-3 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 2; 4; 5; 7\}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được } x \in \{-1; 2; 4; 5; 7\}$$

Vậy với $x \in \{-1; 2; 4; 5; 7\}$ thì E nhận giá trị nguyên.

