

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + \left(\frac{1}{3}xy + y\right) + \frac{1}{36}y^2 \\
&= x^2 + 6x + 9 + \frac{1}{3}xy + y + \frac{1}{36}y^2.
\end{aligned}$$

Tổng quát:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca.$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca.$$

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

VD 2.1.

$$a) x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$$

$$b) x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2.$$

$$c) x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$d) \frac{9}{x^2} + \frac{y^2}{4} - 3 \frac{y}{x} = \left(\frac{3}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{x} \cdot \frac{y}{2} = \left(\frac{3}{x} - \frac{y}{2}\right)^2.$$

VD 2.2.

$$a) x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2;$$

$$b) x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2;$$

$$c) \frac{x^2}{4} - x + 1 = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2;$$

$$d) 9(x + 1)^2 - 6(x + 1) + 1 = [3(x + 1) - 1]^2 = (3x - 2)^2$$

e)

$$(x - 2y)^2 - 8(x^2 - 2xy) + 16x^2 = (x - 2y)^2 - 2 \cdot 4x(x - 2y) + 16x^2 = (x - 2y - 4x)^2 = (3x + 2y)^2$$

$$f) x^4 - 4x^2y^3 + 4y^6 = (x^2)^2 - 2x^2y^3 + (2y^3)^2 = (x^2 - 2y^3)^2$$

VD 2.3.

$$a) x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2).$$

$$b) 25 - \frac{1}{16y^2} = 5^2 - \left(\frac{1}{4y}\right)^2 = \left(5 - \frac{1}{4y}\right)\left(5 + \frac{1}{4y}\right).$$

$$c) (x+3)^2 - 9(y-3)^2 = (x+3)^2 - [3(y-3)]^2 = (x+3)^2 - (3y-9)^2 \\ = [(x+3) + (3y-9)] \cdot [(x+3) - (3y-9)] = (x+3y-6)(x-3y+12).$$

$$d) x^2 - 4x + 4 - y^2 = (x-2)^2 - y^2 = (x-2+y)(x-2-y)$$

VD 3.1.

$$a) \text{ Rút gọn: } A = 4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x+3)^2.$$

$$\text{Thay } x = \frac{3}{2} \text{ vào A, ta có: } A = \left(2 \cdot \frac{3}{2} + 3\right)^2 = 6^2 = 36.$$

$$b) \text{ Rút gọn: } B = 9x^2 - 2xy + \frac{1}{9}y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{3}y + \left(\frac{1}{3}y\right)^2 = \left(3x - \frac{1}{3}y\right)^2.$$

$$\text{Thay } x = \frac{1}{3}, y = 3 \text{ vào B, ta có: } B = \left(3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 3\right)^2 = 0.$$

$$c) C = 49x^2 - 70x + 25 = (7x-5)^2.$$

$$\text{Thay } x = \frac{1}{7} \text{ vào biểu thức ta được: } C = \left(7 \cdot \frac{1}{7} - 5\right)^2 = (-4)^2 = 16.$$

$$d) D = x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1$$

$$\text{Thay } x = 103 \text{ vào biểu thức ta được: } D = 100^2 + 1 = 10001.$$

$$e) E = x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$$

$$\text{Thay } x-y = 5 \text{ và } xy = 1 \text{ vào biểu thức ta được: } E = 5^2 + 2 = 27.$$

$$f) F = 25x^2 - 2xy + \frac{1}{5}y^2 = \left(5x - \frac{1}{5}y\right)^2$$

$$\text{Thay } x = -\frac{1}{5}; y = -5 \text{ vào biểu thức ta được: } F = 0.$$

VD 3.2.

a) Có

$$A = (2x + 9)^2 - x(4x + 31) = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 9 + 9^2 - (4x^2 + 31x) = 5x + 81 \\ = 4x^2 + 36x + 81 - 4x^2 - 31x$$

Thay $x = -16$ vào A, ta có: $A = 5 \cdot (-16) + 81 = -80 + 81 = 1$.

b) Có

$$B = (x + 3y)^2 - (x - 3y)^2 - 12x(y + 1) - 1 = x^2 + 6xy + 9y^2 - x^2 + 6xy - 9y^2 - 12xy - 12x - 1 \\ = -12x - 1$$

Thay $x = -\frac{1}{12}$ và $y = -\frac{2}{99}$ vào B ta có: $B = -12 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) - 1 = 0$.

VD 4.1.

a) $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$.

b) $201^2 = (200 + 1)^2 = 200^2 + 2 \cdot 200 \cdot 1 + 1^2 = 40000 + 400 + 1 = 40401$.

c) $48.52 = (50 - 2) \cdot (50 + 2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$.

VD 4.2.

a) $46^2 + 54^2 + 92.54 = 46^2 + 2 \cdot 46 \cdot 54 + 54^2 = (46 + 54)^2 = 100^2 = 10000$.

b) $79^2 + 19^2 - 38.79 = 79^2 - 2 \cdot 79 \cdot 19 + 19^2 = (79 - 19)^2 = 60^2 = 3600$.

c) $89^2 + 11^2 + 22.89 = 89^2 + 2 \cdot 89 \cdot 11 + 11^2 = (89 + 11)^2 = 100^2 = 10000$

VD 4.3.

a) $2021^2 - 2020 \cdot 2022 = 2021^2 - (2021 - 1)(2021 + 1) = 2021^2 - (2021^2 - 1) = 1$.

b) $40^2 - 39^2 + 38^2 - 37^2 + \dots - 2^2 - 1^2 = (40 + 39)(40 - 39) + (38 + 37)(38 - 37) + \dots + (2 + 1)(2 - 1)$

$$40 + 39 + 38 + 37 + \dots + 2 + 1 = \frac{(40 + 1) \cdot 40}{2} = 820$$

VD 5. 1.

a) $VP = (x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = VT$ (đpcm)

b) $VT = (-x - y)^2 = [(-1)(x + y)]^2 = (-1)^2 \cdot (x + y)^2 = (x + y)^2 = VP$ (đpcm)

VD 5. 2.

$$a) (x+2)^2 + (x-2)^2 - 2(x-2)(x+2) = [(x+2) - (x-2)]^2 = 4^2 = 16.$$

$$b) (3x+2)^2 + (4x-1)^2 + (2+5x)(2-5x) = 9x^2 + 12x + 4 + 16x^2 - 8x + 1 + 4 - 25x^2 = 4x + 9$$

$$c) (x+y-z)^2 + 2(x+y-z)(z-y) + (z-y)^2 = [(x+y-z) + (z-y)]^2 = (x+y-z+z-y)^2 = x^2$$

VD 5. 3.

$$a) A = (x-y)^2 + (x+y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

$$b) B = (2x-1)^2 - 2(2x-3)^2 + 4 = 4x^2 - 4x + 1 - 2(4x^2 - 12x + 9) + 4 = -4x^2 + 20x - 13.$$

$$c) C = (x-1)^2 - 2(x-1)(x-3) + (x-3)^2 = [(x-1) - (x-3)]^2 = 2^2 = 4;$$

$$d) D = (x-y+z)^2 + (z-y)^2 + 2(x-y+z)(y-z)$$

$$= (x+z-y)^2 + (z-y)^2 - 2(x+z-y)(z-y) = x^2 + 2x(z-y) + (z-y)^2 + (z-y)^2 - 2[x(z-y) + (z-y)^2]$$

$$= x^2 + 2x(z-y) + 2(z-y)^2 - 2x(z-y) - 2(z-y)^2 = x^2.$$

VD 6.1.

$$a) \text{ Sử dụng hằng đẳng thức: } A^2 - B^2 = (A-B)(A+B).$$

$$(x-2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 1^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2+1)(x-2-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{1; 3\}$.

$$b) \text{ Sử dụng: } A^2 = B^2 \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

$$x^2 - 9 - \frac{8}{9}x^2 = 0 \Rightarrow 1x^2 - \frac{8}{9}x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{8}{9}\right)x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \frac{1}{9}x^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 81 = 0 \Rightarrow x^2 = 9^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -9 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{\pm 9\}$.

$$c) \text{ Sử dụng hằng đẳng thức: } (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

$$(3x-2)^2 - (2x+3)^2 = 5(x+4)(x-4) \Rightarrow (9x^2 - 12x + 4) - (4x^2 + 12x + 9) = 5(x^2 - 16).$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 24x - 5 = 5x^2 - 80 \Rightarrow -24x = -75 \Rightarrow x = \frac{-75}{-24} = \frac{25}{8}.$$

Vậy $x = \frac{25}{8}$.

VD 6.3.

a) $16x^2 - (4x - 5)^2 = 15 \Leftrightarrow 16x^2 - 16x^2 + 40x - 25 = 15 \Leftrightarrow x = 1.$

b) $(2x + 1)(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 = 18 \Leftrightarrow (1 - 4x^2) + (4x^2 - 4x + 1) = 18 \Leftrightarrow -4x = 16 \Leftrightarrow x = -4.$

c) $(x - 5)^2 - x(x - 4) = 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 - x^2 + 4x = 9 \Leftrightarrow -6x = -16 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}.$

d)

$$(x - 5)^2 + (x - 4)(1 - x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 10x + 25) + (-x^2 + 5x - 4) = 0 \Leftrightarrow -5x + 21 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{21}{5}$$

VD 7.1.

a) Ta có: $A = x^2 + 5x + 10 = \left[x^2 + 2x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right] + 10 - \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{15}{4}.$

Vì $\left(x + \frac{5}{2} \right)^2 \geq 0 \forall x$ nên $\left(x + \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4} \forall x$ hay $A \geq \frac{15}{4} \forall x.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{15}{4}$ tại $x = -\frac{5}{2}.$

b) Ta có:

$$B = 4x - 4x^2 - 15 = -(4x^2 - 4x + 15) = -\left[(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 + 14 \right] = -(2x - 1)^2 - 14.$$

Vì $-(2x - 1)^2 \leq 0 \forall x$ nên $-(2x - 1)^2 - 14 \leq -14 \forall x$ hay $B \leq -14 \forall x.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là -14 tại $x = \frac{1}{2}.$

VD 7.2.

$$a) A = x^2 - 2x + 7 = (x - 1)^2 + 6 \geq 6, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 6 khi $x = 1$.

$$b) B = 5x^2 - 20x = 5(x^2 - 4x) = 5(x^2 - 4x + 4) - 20 = 5(x - 2)^2 - 20 \geq -20 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là -20 khi $x = 2$.

$$c) C = x^2 + y^2 - x + 6y + 10 = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + (y^2 - 6y + 9) + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = 3$.

VD 7.3.

$$a) A = 10x - x^2 - 2 = -(x^2 - 10x) - 2 = -(x^2 - 10x + 25) + 23 = -(x - 5)^2 + 23 \leq 23 \text{ với mọi } x$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 23 khi $x = 5$.

$$b) B = 2x - 2x^2 + 3 = -2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + 3 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \leq \frac{7}{2} \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{7}{2}$ khi $x = \frac{1}{2}$.

$$c) C = 4 - x^2 + 3x = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} + 4 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4} \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của C là $\frac{25}{4}$ khi $x = \frac{3}{2}$.

VD 8.1.

$$a) \text{Ta có: } x^2 + 6x + 10 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 1 = (x + 3)^2 + 1.$$

Vì $(x + 3)^2 \geq 0 \forall x$ nên $(x + 3)^2 + 1 \geq 1 \forall x$.

Mà: $1 > 0 \Rightarrow (x + 3)^2 + 1 > 0 \forall x$.

Vậy $x^2 + 6x + 10 > 0 \forall x$ (đpcm).

$$b) \text{Ta có: } 2x - x^2 - 15 = -(x^2 - 2x + 15) = -\left[(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) + 14\right] = -(x - 1)^2 - 14.$$

Vì $-(x-1)^2 \leq 0 \forall x$ nên $-(x-1)^2 - 14 \leq -14 \forall x$.

Mà: $-14 < 0 \Rightarrow -(x-1)^2 - 14 < 0 \forall x$.

Vậy $2x - x^2 - 15 < 0 \forall x$ (đpcm).

c) Ta có: $x^2 + 6xy + 9y^2 + \frac{1}{9} = \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 \right] + \frac{1}{9} = (x + 3y)^2 + \frac{1}{9}$.

Vì $(x + 3y)^2 \geq 0 \forall x, y$ nên $(x + 3y)^2 + \frac{1}{9} \geq \frac{1}{9} \forall x, y$.

Mà: $\frac{1}{9} > 0 \Rightarrow (x + 3y)^2 + \frac{1}{9} > 0 \forall x, y$.

Vậy $x^2 + 6xy + 9y^2 + \frac{1}{9} > 0 \forall x, y$ (đpcm).

VD 8.2.

a) $x^2 - x + 2 = \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) + \frac{7}{4} = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0$ với mọi x .

b) $4x - x^2 - 8 = -(x^2 - 4x) - 8 = -(x^2 - 4x + 4) - 4 = -(x - 2)^2 - 4 \leq -4 < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

a) $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$.

b) $9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = (3x - 2)^2$.

c) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \left(\frac{x}{2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)^2$.

d) $\frac{9}{4x^2} + \frac{9y^2}{4} - \frac{9}{2} \cdot \frac{y}{x} = \left(\frac{3}{2x} \right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2x} \cdot \frac{3y}{2} + \left(\frac{3y}{2} \right)^2 = \left(\frac{3}{2x} - \frac{3y}{2} \right)^2$.

e) $25x^2 - \frac{9}{4} = (5x)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \left(5x - \frac{3}{2} \right) \left(5x + \frac{3}{2} \right)$.

f)

$4x^2 - \frac{1}{9}(y+1)^2 = (2x)^2 - \left[\frac{1}{3}(y+1) \right]^2 = (2x)^2 - \left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \right)^2 = \left(2x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \right) \left(2x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \right)$.

Bài 2.

a) $(3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1.$

b) $(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2.$

c) $(3x+3)(3x-3) = 9x^2 - 9.$

d) $\left(2x + \frac{1}{2}y + 2\right)^2 = 4x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 4 + 2xy + 2y + 8x.$

e) $(\sqrt{3}y - \sqrt{3})^2 = 3(y-1)^2 = 3y^2 - 6y + 3.$

f) $\left(\frac{x}{2} - y\right)\left(\frac{x}{2} + y\right) = \frac{x^2}{4} - y^2.$

g) $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx.$

h) $(x+y)^2 + (x-y)^2 + 2(x+y)(x-y) = [(x+y) + (x-y)]^2 = 4x^2.$

Bài 3.

a) $999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 1 + 1^2 = 998001.$

b) $501^2 = (500+1)^2 = 500^2 + 2 \cdot 500 \cdot 1 + 1^2 = 251001.$

c) $498 \cdot 502 = (500-2) \cdot (500+2) = 249996.$

Bài 4. Biến đổi biểu thức theo hằng đẳng thức: $P = 9x^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2.$ Thay $x = 2$ vào biểu thức P thì $P = (3 \cdot 2 - 5)^2 = 1.$ **Bài 5.** Áp dụng hằng đẳng thức: $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ với $A = x+y, B = x-y.$

Vậy: $(x+y)^2 + (x-y)^2 - 2(x+y)(x-y) = [(x+y) - (x-y)]^2 = 4y^2.$

Bài 6.

a) $4 - (x-2)^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 2^2 \Rightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}.$ Vậy $x \in \{0; 4\}.$

$$b) \frac{3}{4}x^2 - 16 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^2 \right) = 16 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 64 = 8^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -8 \end{cases}. \text{ Vậy } x \in \{\pm 8\}.$$

$$c) (2x-1)^2 + (x+1)^2 = 7(x^2+1) - 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (x^2 + 2x + 1) = 7x^2 + 7 - 2x^2 - x \Rightarrow 5x^2 - 2x + 2 = 5x^2 - x + 7 \Rightarrow x = -5.$$

Vậy $x = -5$.

Bài 7.

$$a) A = (100+99)(100-99) + (98+97)(98-97) + \dots + (2+1)(2-1)$$

$$= 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 = (100+1) \cdot 100 : 2 = 5050$$

$$b) B = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - 2022^2 + 2023^2 = 2023^2 - 2022^2 + \dots + 3^2 - 2^2 + 1^2$$

$$= (2023 - 2022)(2023 + 2022) + \dots + (3 - 2)(3 + 2) + 1 = 2023 + 2022 + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$= (2023 + 1) \cdot 2023 : 2 = 2047276$$

$$c) C = (2-1)(2+1) (2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) - 2^{32}$$

$$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) - 2^{32}$$

$$= 2^{32} - 1 - 2^{32} = -1$$

Bài 8.

$$3A = (4-1)A = (4-1)(4+1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)(4^{16}+1)$$

$$= (4^2-1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)(4^{16}+1)$$

$$= (4^4-1)(4^4+1)(4^8+1)(4^{16}+1)$$

$$= (4^8-1)(4^8+1)(4^{16}+1)$$

$$= (4^{16}-1)(4^{16}+1) = 4^{32} - 1 = B$$

Bài 9.

$$a) A = x^2 - 8x + 20 = (x-4)^2 + 4 \geq 4. \text{ Giá trị nhỏ nhất của } A \text{ là } 4 \text{ tại } x = 4.$$

$$b) B = 4x^2 - 4x + 2023 = (2x)^2 - 2(2x) \cdot 1 + 1 + 2022 = (2x-1)^2 + 2022 \geq 2022. \text{ Giá trị nhỏ}$$

$$\text{nhất của } B \text{ tại } x = \frac{1}{2}.$$

Bài 10.

$$a) A = -(x^2 - 5x + 127) = -\left[x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 127\right] = -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 120\frac{3}{4}\right] \leq 120\frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

$$b) B = xy - 4x^2 - y^2 - 1 = -\left(2x - \frac{1}{4}y\right)^2 - \frac{15}{16}y^2 - 1 \leq -1.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{4}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$

Vậy giá trị lớn nhất của B là -1 tại $x = y = 0$.

Bài 11.

$$a) A = (x + 4)^2 + 1$$

$$B = (x - 5)^2 + 4$$

$$b) C = -(x^2 - 2x + 5) = -\left[(x - 1)^2 + 4\right]$$

$$D = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right].$$

Bài 12.

$$a) \text{Biến đổi: } A = (x - 2)(x + 4) + 10 = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1.$$

Vì $A \geq 1 \forall x$ mà $1 > 0$, nên $A > 0 \forall x$ (đpcm).

b) Biến đổi:

$$\begin{aligned} B &= 4x - x^2 - y^2 - 2y - 6 = -(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) - 6 \\ &= -\left[(x - 2)^2 - 4\right] - \left[(y + 1)^2 - 1\right] - 6 = -(x - 2)^2 - (y + 1)^2 - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} -(x - 2)^2 \leq 0 \forall x \\ -(y + 1)^2 \leq 0 \forall y \end{cases} \text{ nên } \Rightarrow -(x - 2)^2 - (y + 1)^2 - 1 \leq -1 \forall x, y.$$

Vậy $B \leq -1 \forall x, y$ mà $-1 < 0$ nên $B < 0 \forall x, y$.

Bài 13.

$$a) x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$$

$$\text{Vì } (x + 1)^2 \geq 0; (y - 3)^2 \geq 0; \forall x, y \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ (y-3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

b) $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 2x + 12y - 4z + 20 = 0$

Xét vế trái của đẳng thức ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 2x + 12y - 4z + 20 &= (x^2 - 2x + 1) + (9y^2 + 12y + 4) + (4z^2 - 4z + 1) + 14 \\ &= (x-1)^2 + (3y+2)^2 + (2z-1)^2 + 14 \end{aligned}$$

Vì $(x-1)^2 \geq 0; (3y+2)^2 \geq 0; (2z-1)^2 \geq 0; \forall x, y, z$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (3y+2)^2 + (2z-1)^2 + 14 \geq 14 > 0 \text{ với } \forall x, y, z.$$

Vậy không có các số x, y, z thỏa mãn đẳng thức

$$x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 2x + 12y - 4z + 20 = 0.$$

Bài 14.

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (b-c)^2 = 0 \\ (c-a)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Bài 15. Ta có: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$.

Suy ra: $0 = x^2 + y^2 + z^2 + 0$

Hay $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Vậy $x = y = z (= 0)$

Bài 16:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 &= \left[(a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \right] + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a+b)^2 + 2bc + 2ac + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

$$= (a+b)^2 + (b^2 + 2bc + c^2) + (c^2 + 2ca + a^2)$$

$$= (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$$

Bài 17. Ta có: $a = 5K + 1; b = 5H + 2 (K, H \in \mathbb{N})$. Khi đó:

$$a^2 + b^2 = (5K + 1)^2 + (5H + 2)^2 = 25K^2 + 10K + 25H^2 + 20H + 5$$

$$= 5(5K^2 + 2K + 5H^2 + 4H + 1) : 5$$

Bài 18:

Xét $p = 3k + 1$ (k -nguyên) thì $p^2 + 8 : 3$, là hợp số

Xét $p = 3k + 2$ thì $p^2 + 8 : 3$, là hợp số

Xét $p = 3k$, mà p là số nguyên tố nên $p = 3$

Khi đó $p^2 + 2 = 11$, là số nguyên tố.

Bài 19. Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a và b , ta có $a^2 - b^2 = 41$, hay $(a+b)(a-b) = 41$.

Vì 41 là số nguyên tố nên $a - b = 1$ và $a + b = 41$.

Do đó $b = (41 - 1) : 2 = 20$; $a = (41 + 1) : 2 = 21$.

Vậy hai số tự nhiên phải tìm là 20, 21.

Bài 20. Gọi hai số lẻ liên tiếp là a và $a + 2$ (a lẻ). Từ $(a + 2)^2 - a^2 = 56$, ta tìm được $a = 13$

.

Đáp số: 13 và 15.

Bài 21. Gọi số phải tìm là \overline{ab} . Từ $\overline{ab} - \overline{ba} = 36$ ta suy ra $a - b = 4$. (1)

Ta lại có $a^2 - b^2 = 40$ nên từ (1) suy ra $a + b = 10$. (2) và $b = 3$.

Từ (1) và (2) suy ra $a = 7$. Số phải tìm là 73.

BÀI 7. LẬP PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

VD 1.1.

$$a) 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 = (3x)^3 + 3.(3x)^2.2 + 3.(3x).2^2 + 2^3 = (3x + 2)^3.$$

$$b) x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = x^3 - 3.x^2.4 + 3.x.4^2 - 4^3 = (x - 4)^3.$$

$$c) 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x)^3 + 3.(2x)^2.1 + 3(2x).1^2 + 1^3 = (2x + 1)^3.$$

VD 1.2.

$$a) 64a^3 + * + * + 27b^3 = (* + *)^3$$

$$\text{Có } (4a)^3 + 3.16a^2.3b + 3.4a.9b^2 + 27b^3 = (4a + 3b)^3$$

$$b) 8a^3 - * + * - * = (* - 3y)^3$$

$$\text{Có } (2a)^3 - 3.(2a)^2.3y + 3.2a.9y^2 - (3y)^3 = (2a - 3y)^3$$

$$c) (* - *)^3 = x^3 - * + 12xy^2 - *$$

$$\text{Có } (x - 2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

$$d) (* + *)^3 = * + 108x^2y + 144xy^2 + *$$

$$\text{Có } (3x + 4y)^3 = (3x)^3 + 3.(3x)^2.4y + 3.3x.(4y)^2 + (4y)^3$$

$$(3x + 4y)^3 = 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$$

VD 2.1.

$$a) (x + 3)^3 = x^3 + 3x^2.3 + 3.x.3^2 + 3^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27.$$

$$b) (2x^2 + 3y)^3 = (2x^2)^3 + 3.(2x^2)^2.3y + 3.(2x^2)(3y)^2 + (3y)^3 \\ = 8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3.$$

$$c) (x - 2)^3 = x^3 - 3.x^2.2 + 3.x.2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$$

$$d) \left(\frac{2x}{y} - \frac{3y}{x}\right)^3 = \left(\frac{2x}{y}\right)^3 - 3.\left(\frac{2x}{y}\right)^2\left(\frac{3y}{x}\right) + 3\left(\frac{2x}{y}\right)\left(\frac{3y}{x}\right)^2 - \left(\frac{3y}{x}\right)^3 \\ = \frac{8x^3}{y^3} - 36\frac{x}{y} + 54y - \frac{27y^3}{x^3}.$$

VD 2.2.

$$a) \left(2x^2 + \frac{1}{3}\right)^3 = (2x^2)^3 + 3.(2x^2)^2.\frac{1}{3} + 3.2x^2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 8x^6 + 4x^4 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{27}$$

$$b) (2x^2y - 3xy)^3 = (2x^2y)^3 - 3.(2x^2y)^2.3xy + 3.2x^2y.(3xy)^2 - (3xy)^3 \\ = 8x^6y^3 - 36x^5y^3 + 54x^4y^3 - 27x^3y^3$$

c)

$$\left(-3xy^4 + \frac{1}{2}x^2y^2\right)^3 = \left(\frac{1}{2}x^2y^2 - 3xy^4\right)^3 = \left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)^3 - 3.\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)^2.3xy^4 + 3.\frac{1}{2}x^2y^2.(3xy^4)^2 - (3xy^4)^3 \\ = \frac{1}{8}x^6y^6 - \frac{9}{4}x^5y^8 + \frac{27}{2}x^4y^{10} - 27x^3y^{12}$$

d)

$$\left(-\frac{1}{3}ab^2 - 2a^3b\right)^3 = -\left(\frac{1}{3}ab^2 + 2a^3b\right)^3 = -\left[\left(\frac{1}{3}ab^2\right)^3 + 3.\left(\frac{1}{3}ab^2\right)^2.2a^3b + 3.\frac{1}{3}ab^2.(2a^3b)^2 + (2a^3b)^3\right] \\ = -\left(\frac{1}{27}a^3b^6 + \frac{2}{3}a^5b^5 + 4a^7b^4 + 8a^9b^3\right) = -\frac{1}{27}a^3b^6 - \frac{2}{3}a^5b^5 - 4a^7b^4 - 8a^9b^3$$

VD 3.1.

$$a) A = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = (3x)^3 + 3.(3x)^2 + 3.(3x).1 + 1^3 = (3x + 1)^3$$

$$\text{V} \acute{o}i \ x = 3 \Rightarrow A = (3.3 + 1)^3 = 10^3 = 1000.$$

$$b) B = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x)^3 - 3.(2x)^2.3 + 3.(2x).3^2 - 3^3 = (2x - 3)^3$$

$$\text{V} \acute{o}i \ x = 2 \Rightarrow B = (2.2 - 3)^3 = 1^3 = 1.$$

$$c) C = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

$$\text{V} \acute{o}i \ x = 99 \Rightarrow C = (x + 1)^3 = (99 + 1)^3 = 100^3 = 1.000.000$$

$$d) D = x^3 - 9x^2 + 27x - 26 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 1 = (x - 3)^3 + 1$$

$$\text{V} \acute{o}i \ x = 23 \Rightarrow D = (x - 3)^3 + 1 = (23 - 3)^3 + 1 = 20^3 + 1 = 8001$$

VD 3.2.

$$a) A = (x + 2y)^3 + 6(x + 2y)^2 + 12(x + 2y) + 8 \\ = (x + 2y)^3 + 3.(x + 2y)^2.2 + 3.(x + 2y).2^2 + 2^3 = (x + 2y + 2)^3$$

$$\text{V} \acute{o}i \ x = 2; y = 3 \Rightarrow A = (2 + 2.3 + 2)^3 = 10^3 = 1000.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \left(\frac{x}{2} + y\right)^3 - 9\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + 27\left(\frac{x}{2} + y\right) - 27 \\ &= \left(\frac{x}{2} + y\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 \cdot 3 + 3 \cdot \left(\frac{x}{2} + y\right) \cdot 3^2 - 3^3 = \left(\frac{x}{2} + y - 3\right)^3 \end{aligned}$$

$$\text{Với } x = 4; y = 1 \Rightarrow B = \left(\frac{4}{2} + 1 - 3\right)^3 = 0^3 = 0.$$

VD 4.

$$\text{a) Ta có : } 99 = 100 - 1$$

$$\text{Thì } 99^3 = (100 - 1)^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 - 1^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 970299.$$

$$\text{b) Ta có : } 101 = 100 + 1$$

$$\text{Thì } 101^3 = (100 + 1)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 + 1^3 = 1000000 + 30000 + 300 + 1 = 1030301.$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có : } 47^3 + 9 \cdot 47^2 + 27 \cdot 47 + 27 &= 47^3 + 3 \cdot 47^2 \cdot 3 + 3 \cdot 47 \cdot 3^2 + 3^3 \\ &= (47 + 3)^3 = 50^3 = 125000. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có : } 1027^3 - 2 \cdot 1027^2 \cdot 27 + 3 \cdot 1027 \cdot 27^2 - 3^9 &= 1027^3 - 3 \cdot 1027^2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 1027 \cdot (3^3)^2 - (3^3)^3 \\ &= (1027 - 3^3)^3 = 1000^3 = 1000000000. \end{aligned}$$

VD 5.1.

$$\text{a) } x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (2x + 1)^3$$

$$x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = (2x + 1)^3$$

$$(x - 2)^3 = (2x + 1)^3$$

$$x - 2 = 2x + 1$$

$$x - 2x = 1 + 2$$

$$-x = 3$$

$$x = -3.$$

Vậy $x = -3$.

b) Ta có $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = 0$

$$(2x)^3 + 3.(2x)^2.3 + 3.(2x).3^2 + 3^3 = 0$$

$$(2x + 3)^3 = 0$$

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = -3$$

$$x = \frac{-3}{2}.$$

Vậy $x = \frac{-3}{2}$.

c) Ta có $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (3x + 5)^3$.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (3x + 5)^3$$

$$(x + 1)^3 = (3x + 5)^3$$

$$x + 1 = 3x + 5$$

$$x + 1 = 3x + 5$$

$$x - 3x = 5 - 1$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2.$$

Vậy $x = -2$.

VD 5.2.

a) $(2x - 1)^3 + 4(x - 1)(x + 1 - 2x^2) = 7$

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - 8x^3 + 12x^2 - 4 = 7$$

$$6x = 12 \Rightarrow x = 2.$$

Vậy: $x = 2$.

b) $(x + 1)^3 + (x - 2)^3 - 2x^2(x - 1,5) = 3$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 2x^3 + 3x^2 = 3$$

$$15x = 10 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Vậy: $x = \frac{2}{3}$.

$$c) (x-3)^3 - (8x^3 + 1) = (x+2)^3 - (2x-3)^3 - 18x(2x-3)$$

Ta có:

$$x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3 - (8x^3 + 1) = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 - (8x^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 27) - 36x^2 + 54$$

$$5x^2 - 5x + 21 = 0$$

$$5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{79}{4} = 0$$

$$x \in \emptyset$$

$$\text{Vậy: } x \in \emptyset$$

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

$$a) (x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$$

$$b) (2x-3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot (2x) \cdot 3^2 - 3^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27.$$

$$c) \left(\frac{2x}{3} + \frac{3y}{2}\right)^3 = \left(\frac{2x}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{2x}{3}\right)^2 \left(\frac{3y}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2x}{3}\right) \left(\frac{3y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3y}{2}\right)^3$$

$$= \frac{8x^3}{27} + 2x^2y + \frac{9}{2}xy^2 + \frac{27y^3}{8}.$$

$$d) (2x^2y - xy)^3 = (2x^2y)^3 - 3(2x^2y)^2(xy) + 3(2x^2y)(xy)^2 + (xy)^3$$

$$= 8x^6y^3 - 12x^5y^3 + 6x^4y^3 + x^3y^3.$$

Bài 2.

$$a) (x+2y)^3 - 6xy(x+2y) = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 - 6x^2y - 12xy^2 = x^3 + 8y^3$$

$$b) (a-b)^3 + (a+b)^3 - 2a^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 2a^3$$

$$= 2a^3 + 6ab^2 - 2a^3 = 6ab^2.$$

$$c) (x+2)^3 + (x-2)^3 + x^3 - 3x(x+2)(x-2)$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^3 - 3x^3 + 12x = 36x.$$

Bài 3.

$$a) 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot (2x) \cdot 3^2 + 3^3 = (2x+3)^3.$$

$$b) 27a^3 - 27a^2 + 9a - 1 = (3a)^3 - 3 \cdot (3a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3a) \cdot 1^2 - 1^3 = (3a - 1)^3.$$

$$c) -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 = (-2x)^3 + 3 \cdot (-2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2x) \cdot 1^2 + 1^3 = (-2x + 1)^3$$

$$d) (x - 2y)^3 + 6xy(x - 2y) - x^3 = x^3 - 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 - (2y)^3 + 6x^2y - 12xy^2 - x^3 \\ = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 + 6x^2y - 12xy^2 - x^3 = -8y^3.$$

Bài 4.

$$a) A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 = (x - 2)^3.$$

Với $x = 12$ giá trị của biểu thức A là: $A = (12 - 2)^3 = 10^3 = 1000$.

$$b) B = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3 = (x + 3)^3.$$

Thay $x = 7$ vào B ta được $10^3 = 1000$.

$$c) C = 64 - 48x + 12x^2 - x^3 = (4 - x)^3.$$

Thay $x = 24$ vào C ta được $(-20)^3 = -8000$.

$$d) D = x^3 - 3x^2 + 3x = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x - 1)^3 + 1.$$

Thay $x = 11$ vào D ta được $10^3 + 1 = 1001$.

$$e) E = (2x - 1)^3 + 6(2x - 1)^2 + 12(2x - 1) + 8 = (2x - 1)^3 + 3 \cdot (2x - 1)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (2x - 1) \cdot 2^2 + 2^3 \\ = (2x - 1 + 2)^3 = (2x + 1)^3.$$

Với $x = 5$ giá trị của E là: $(2 \cdot 5 + 1)^3 = 11^3 = 1331$

$$f) F = (x - 3y)^3 + 3(x - 3y)^2(x + y) + 3(x - 3y)(x + y)^2 + (x + y)^3 \\ = [(x - 3y) + (x + y)]^3 = [x - 3y + x + y]^3 = [2x - 2y]^3$$

Thay $x = 1; y = 1$ vào $C = [2x - 2y]^3$ ta có $F = [2 \cdot 1 - 2 \cdot 1]^3 = [2 - 2]^3 = 0$

Vậy $F = 0$ với $x = 1; y = 1$

Bài 5.

$$a) \text{Ta có } 999^3 = (1000 - 1)^3 = 1000^3 - 1 - 3 \cdot 1000(1000 - 1) = 997002999.$$

b) Ta có $59^3 + 3.59^2 + 3.59 + 1 = 59^3 + 3.59^2.1 + 3.59.1^2 + 1^3 = (59 + 1)^3 = 60^3 = 216000$.

c) Ta có : $503^3 - 9.503^2 + 27.503 - 27 = 503^3 - 3.503^2.3 + 3.503.3^2 - 3^3 = (503 - 3)^3 = 500^3 = 125000000$.

Bài 6.

$$A = (x-1)^3 - (x+1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \\ = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = -6x^2 - 2$$

Vậy $A = -6x^2 - 2$

$$B = (x+y)^3 + (x-y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 2x^3 + 6xy^2$$

Vậy $B = 2x^3 + 6xy^2$

$$C = (x+1)^3 + 3(x+1)^2(x-1) + 3(x+1)(x-1)^2 + (x-1)^3 \\ = ((x+1) + (x-1))^3 = (x+1+x-1)^3 = (2x)^3 = 8x^3$$

Vậy $C = 8x^3$

$$D = (x-y)^3 - 3(x-y)^2x + 3(x-y)x^2 - x^3 = ((x-y) - x)^3 = (x-y-x)^3 = (-y)^3$$

Vậy $D = (-y)^3$

Bài 7.

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

$$(x+1)^3 = 0$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

Vậy $x = -1$

b) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$

$$(x-4)^3 = 0$$

$$x-4 = 0$$

$$x = 4$$

Vậy $x = 4$

$$c) x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 1 = 0$$

$$(x-1)^3 = 1$$

$$(x-1)^3 = 1^3$$

$$x-1=1$$

$$x=1+1$$

$$x=2$$

Vậy $x = 2$

$$d) x^3 + 12x^2 + 48x + 72 = 0$$

$$x^3 + 12x^2 + 48x + 64 + 8 = 0$$

$$x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 + 4^3 = -8$$

$$(x+4)^3 = (-2)^3$$

$$x+4 = -2$$

$$x = -2 - 4$$

$$x = -6$$

Vậy $x = -6$

Bài 8.

$$a) (2x-1)^3 + 4(x-1)(x+1-2x^2) = 7$$

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - 8x^3 + 12x^2 - 4 = 7$$

$$6x = 12$$

$$x = 2.$$

Vậy: $x = 2.$

$$b) (x+1)^3 + (x-2)^3 - 2x^2(x-1,5) = 3$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 2x^3 + 3x^2 = 3$$

$$15x = 10$$

$$x = \frac{2}{3}.$$

Vậy: $x = \frac{2}{3}.$

Bài 9.

$$a) VP = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = x^3 + y^3 = VT$$

$$\text{Vậy } x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$b) VP = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 3x^2y - 3xy^2 = x^3 - y^3 = VT$$

$$\text{Vậy } x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$c) VT = (x - y)^3 + (y + x)^3 + (y - x)^3 - 3xy(x + y) = (y + x)^3 - 3xy(x + y)$$

$$= y^3 + 3y^2x + 3yx^2 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2 = x^3 + y^3 = VP \text{ (đpcm).}$$

Bài 10.

$$a) (4x - 1)^3 - (4x - 3)(16x^2 + 3) = 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 - 64x^3 + 48x^2 - 12x + 9 = 8.$$

Vậy biểu thức $(4x - 1)^3 - (4x - 3)(16x^2 + 3)$ không phụ thuộc vào biến.

$$b) (x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6(x + 1)(x - 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 6x^2 + 6 = 8.$$

Vậy biểu thức $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6(x + 1)(x - 1)$ không phụ thuộc vào biến.

Câu 11.

$$a) \text{ Xét } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \text{ với } c = -a - b$$

$$= a^3 + b^3 + (-a - b)^3 - 3ab(-a - b)$$

$$= a^3 + b^3 - (a + b)^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a + b)^3$$

$$= (a + b)^3 - (a + b)^3$$

$$= 0.$$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$$b) \text{ Ta có : } x + 2y + z = 0 \Rightarrow x + 2y = -z.$$

$$\text{Xét } x^3 + 8y^3 + z^3 - 6xyz$$

$$= x^3 + 8y^3 + (-x - 2y)^3 - 6xy(-x - 2y)$$

$$= x^3 + 8y^3 - (x + 2y)^3 + 6x^2y + 12xy^2$$

$$\begin{aligned}
&= x^3 + 3.x^2.2y + 3.x.(2y)^2 + (2y)^3 - (x + 2y)^3 \\
&= (x + 2y)^3 - (x + 2y)^3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vậy với $x + 2y + z = 0$ thì $x^3 + 8y^3 + z^3 - 6xyz = 0$

Bài 12.

$$a) x^3 - y^3 = (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) + (3x^2y - 3xy^2) = (x - y)^3 + 3xy(x - y).$$

Thay $x - y = 5$ và $x.y = 3$ vào ta có $x^3 - y^3 = 5^3 + 3.3.5 = 170$.

$$b) x^3 + y^3 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (3x^2y + 3xy^2) = (x + y)^3 - 3xy(x + y).$$

Thay $x + y = 5$ và $x.y = 6$ vào ta có $x^3 + y^3 = 5^3 - 3.6.5 = 35$.

Bài 13.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
a + b = 1 &\Rightarrow VT = a^3 + b^3 + 3ab \\
&= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
&= (a + b)^3 = 1^3 = 1 = VP
\end{aligned}$$

Vậy $a^3 + b^3 + 3ab = 1$ khi $a + b = 1$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
a - b = 1 &\Rightarrow VT = a^3 - b^3 - 3ab \\
&= a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \\
&= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
&= (a - b)^3 = 1^3 = 1 = VP
\end{aligned}$$

Vậy $a^3 - b^3 - 3ab = 1$ khi $a - b = 1$

Câu 14.

Ta có : $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b = -c - d$

$$(a + b)^3 = (-c - d)^3$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -(c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3)$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -(c^3 + d^3) - 3cd(c + d)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab(a + b) - 3cd(c + d)$$

$$\text{Vi } a + b = -c - d \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab(-c - d) - 3cd(c + d)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd).$$

BÀI 8. TỔNG VÀ HIỆU HAI LẬP PHƯƠNG

VD 1.1.

$$a) x^3 + 8y^3 = x^3 + (2y)^3 = (x + 2y) \left[x^2 - 2xy + (2y)^2 \right] = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

$$b) a^6 - b^3 = (a^2)^3 - b^3 = (a^2 - b) \left[(a^2)^2 + a^2b + b^2 \right] = (a^2 - b)(a^4 + a^2b + b^2)$$

$$c) 64y^3 - 125x^3 \\ = (4y)^3 - (5x)^3 = (4y - 5x) \left[(4y)^2 + 4y \cdot 5x + (5x)^2 \right] = (4y - 5x)(16y^2 + 20xy + 25x^2)$$

$$d) 27x^3 - \frac{1}{8} = (3x)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(3x - \frac{1}{2}\right) \left[(3x)^2 + 3x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \left(3x - \frac{1}{2}\right) \left(9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

VD 1.2.

$$a) (x - 1)^3 - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 - 1^3) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 1 = -3x^2 + 3x$$

$$b) (x - 3)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 6(x + 1)^2 \\ = x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3 - (x^3 - 3^3) + 6 \cdot (x^2 + 2x + 1) \\ = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 6x^2 + 12x + 6 = -3x^2 + 39x + 6$$

$$c) (x + 5)(x^2 - 5x + 25) - (x + 3)^3 + (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 1)^3 \\ = x^3 + 5^3 - (x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3) + x^3 - 2^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ = x^3 + 125 - x^3 - 9x^2 - 27x - 27 + x^3 - 8 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = -6x^2 - 30x + 91$$

$$d) (3x - 2y)^3 - (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2) + (y + 2x)^3 \\ = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 - \left[(4x)^3 - (5y)^3 \right] + y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 2x + 3y \cdot (2x)^2 + (2x)^3 \\ = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 - 64x^3 + 125y^3 + y^3 + 6xy^2 + 12x^2y + 8x^3 = -29x^3 - 42x^2y + 42xy^2 + 1$$

VD 2.1.

$$a) (x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x + 2)(x - 2) = 5$$

$$x^3 - 1 - x(x^2 - 4) = 5$$

$$x^3 - 1 - x^3 + 4x = 5$$

$$4x = 6$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vây: } x = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) } (x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 6(x^2 - 2x + 1) = -10$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 6x^2 + 12x - 6 = -10$$

$$12x = -6$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Vây: } x = \frac{-1}{2}.$$

$$\text{c) } (x-3)(x^2 + 3x + 9) + x(x+2)(2-x) = 1$$

$$x^3 - 3^3 + x(2^2 - x^2) = 1$$

$$x^3 - 27 + 4x - x^3 = 1$$

$$4x = 28$$

$$x = 7$$

$$\text{Vây: } x = 7.$$

$$\text{d) } (x-1)^3 - (x+3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 2$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 3^3) + 3x^2 - 12 = 2$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 3^3 + 3x^2 - 12 = 2$$

$$3x = 42$$

$$x = 14$$

$$\text{Vây: } x = 14,$$

VD 2.2.

$$\text{a) } (x+2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 + 2) = 15$$

$$x^3 + 2^3 - x^3 - 2x = 15$$

$$2x = -7$$

$$x = \frac{-7}{2}$$

$$\text{Vậy: } x = \frac{-7}{2}.$$

$$\text{b) } (x-2)^3 - (x-4)(x^2 + 4x + 16) + 6(x+1)^2 = 49$$

$$x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 - (x^3 - 4^3) + 6 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 49$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 64 + 6x^2 + 12x + 6 = 49$$

$$24x = -13$$

$$x = \frac{-13}{24}$$

$$\text{Vậy: } x = \frac{-13}{24}.$$

$$\text{c) } (x-1)^3 + (2-x)(4+2x+x^2) + 3x(x+2) = 16$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2^3 - x^3 + 3x^2 + 6x = 16$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8 - x^3 + 3x^2 + 6x = 16$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

$$\text{Vậy: } x = 1.$$

$$\text{d) } (x-3)^3 - (x-3)(x^2 + 3x + 9) + 9(x+1)^2 = 15$$

$$x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3 - (x^3 - 3^3) + 9 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 15$$

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 9x^2 + 18x + 9 = 15$$

$$45x = 6$$

$$x = \frac{2}{15}$$

$$\text{Vậy: } x = \frac{2}{15}.$$

VD 3.1.

$$\text{a) } 17^3 + 3^3 = (17+3)^3 - 3 \cdot 17 \cdot 3 \cdot (17+3) = 20^3 - 153 \cdot 20 = 8000 - 3060 = 4940$$

b) $18^3 + 2^3 = (18 + 2)(18^2 - 18 \cdot 2 + 2^2) = 20 \cdot 292 = 5840$

c)

$$99^3 + 1 = (99 + 1)(99^2 - 99 + 1) = 100 \left[(100 - 1)^2 - 99 + 1 \right] = 100(100^2 - 200 + 1 - 99 + 1) = 970300$$

VD 3.2.

a)

$$24^3 - 64 = 24^3 - 4^3 = (24 - 4)^3 + 3 \cdot 24 \cdot 4 \cdot (24 - 4) = 20^3 + 288 \cdot 20 = 8000 + 5760 = 13760.$$

b) $23^3 - 27 = (23 - 3)(23^2 + 23 \cdot 3 + 3^2) = 20 \cdot 607 = 12140$

c) $52^3 - 8 = 52^3 - 2^3 = (52 - 2)(52^2 + 52 \cdot 2 + 2^2) = 50 \cdot 2812 = 140600.$

VD 4.1.

a) Tính giá trị của phân thức $l = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ tại $x = -1$.

$$\text{Ta có } l = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

$$\text{Thay } x = -1 \text{ vào } l = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \text{ ta được } l = \frac{(-1)^2 + (-1) + 1}{(-1) - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

b) Tính giá trị của phân thức $M = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}$ tại $x = -2$.

$$\text{Ta có } M = \frac{x^3 + 2^3}{x^2 - 2x + 4} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 2x + 4} = x + 2$$

$$\text{Thay } x = -2 \text{ vào } M = x + 2 \text{ ta được } M = -2 + 2 = 0.$$

c) Tính giá trị của biểu thức $K = 27 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ tại $x = -3$.

$$\text{Ta có } K = 27 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 27 + x^3 - 27 = x^3.$$

$$\text{Thay } x = -3 \text{ vào } K = x^3 \text{ ta được } K = (-3)^3 = -27.$$

VD 4.2.

a) Cho $x + y = 3$ và $x^2 + y^2 = 5$. Tính $x^3 + y^3$.

$$\text{Ta có: } 2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 3^2 - 5 = 4 \Rightarrow xy = 2.$$

Ta lại có: $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3^3 - 3.2.3 = 27 - 18 = 9$.

b) Cho $x - y = 3$ và $x^2 + y^2 = 15$. Tính $x^3 - y^3$.

Ta có $2xy = (x^2 + y^2) - (x - y)^2 = 15 - 3^2 = 6 \Rightarrow xy = 3$.

Ta lại có $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 3^3 + 3.3.3 = 27 + 27 = 54$.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

a) $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

b) $x^3 - \frac{1}{27} = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9}\right)$

c) $64x^3 + 1 = (4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)$

d) $27x^3 - 125y^3 = (3x - 5y)(9x^2 + 15xy + 25y^2)$

Bài 2.

a) $A = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 27$

b) $B = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 8x^3 + 1$

c) $C = (y - 4)(y^2 + 4y + 16) - (128 + y^3) = y^3 - 64 - 128 - y^3 = -192$

Bài 3.

a) $A = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 2(4x^3 - 1) = (2x)^3 + 3^3 - 8x^3 + 2 = 8x^3 + 27 - 8x^3 + 2 = 29$.

b) $B = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (20 + x^3) = x^3 + 3^3 - 20 - x^3 = 27 - 20 = 7$

c) $C = 3y \cdot (-3y - 2)^2 - (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1) - (-6y - 1)^2$
 $= 3y \cdot (9y^2 + 12y + 4) - (27y^3 - 1) - (36y^2 + 12y + 1)$
 $= 27y^3 + 36y^2 + 12y - 27y^3 + 1 - 36y^2 - 12y - 1 = 0$.

Bài 4.

a) $(1 - x)(1 + x + x^2) + x(x^2 - 5) = 11$

$$1 - x^3 + x^3 - 5x = 11$$

$$-5x = 10$$

$$x = -2$$

$$\text{Vậy: } x = -2$$

$$\text{b) } x(x-5)(x+5) - (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 3$$

$$x(x^2 - 25) - (x^3 + 8) = 3$$

$$x^3 - 25x - x^3 - 8 = 3$$

$$-25x = 11$$

$$x = \frac{-11}{25}$$

$$\text{Vậy: } x = \frac{-11}{25}$$

$$\text{c) } 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - x(1 + 8x^2) + 2 = 0$$

$$8\left(x^3 - \frac{1}{8}\right) - x - 8x^3 + 2 = 0$$

$$x = 3$$

$$\text{Vậy: } x = 3.$$

Bài 5.

$$\text{a) } 11^3 = (10 + 1)^3 = 10^3 + 1 + 3 \cdot 10 \cdot 1 \cdot (10 + 1) = 1000 + 1 + 330 = 1331$$

$$\text{b) } 199^3 = (200 - 1)^3 = 7880599$$

$$\text{c) } 99^3 + 1 = 970300$$

$$\text{d) } 52^3 - 8 = 140581$$

$$\text{e) } 19^3 = (20 - 1)^3 = 6859$$

$$\text{f) } 201^3 = (200 + 1)^3 = 8120601$$

$$\text{g) } 18^3 + 2^3 = 5840$$

$$\text{h) } 23^3 - 27 = 23^3 - 3^3 = 12140$$

Bài 6.

a) $A = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (3 - 2x)(4x^2 + 6x + 9)$ tại $x = 20$

Rút gọn được $A = 9x^3$. Thay $x = 20$ vào A ta được: $A = 72000$

b) $B = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + 2y^3$ biết $2x + y = 0$

Rút gọn được $B = 8x^3 + y^3 = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$. Thay $2x + y = 0$ vào B ta được:

$$B = 0$$

c) $C = (x + y)^3 + y^3$ biết $2x + y = 0$

$$C = (x + y)^3 + y^3 = (x + 2y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$

d) $D = x^3 - y^3 - 3xy$ biết $x - y = 1$

$$D = x^3 - y^3 - 3xy = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 1$$

Bài 7.

a) $VP = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3 = VT$

b) $VP = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2 = a^3 - b^3 = VT$

c) $VT = (a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$
 $= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) = VP$

Bài 8. Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -(b + c)$

$$\Rightarrow a^3 = -(b + c)^3 = -[b^3 + c^3 - 3bc(b + c)] = -b^3 - c^3 + 3ab$$

Thay vào $VT = 3abc = VP$

Bài 9.

Thể tích của bể nước là: $8x.4x.2x = 64x^3$ (m^3)

Thể tích nước bơm được sau 8h là: $7.8 = 56$ (m^3)

Vì cần phải bơm thêm y^3 m^3 nữa thì đầy bể nên ta có: $64x^3 - y^3 = 56$ (1)

Theo giả thiết: $4x - y = 2 \Leftrightarrow y = 4x - 2$ thay vào (1) ta được:

$$64x^3 - y^3 = 56 \Leftrightarrow 64x^3 - (4x - 2)^3 = 56$$

$$(4x - 4x + 2) [16x^2 + 4x(4x - 2) + (4x - 2)^2] = 56$$

$$2(48x^2 - 24x + 4) = 56$$

$$12x^2 - 6x + 1 = 7$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Giải phương trình trên ta được: $x = 1$ (nhận) và $x = \frac{-1}{2}$ (loại)

Vậy các kích thước của bể nước là: Chiều dài: 8m; chiều rộng: 4m và chiều cao 2m.

Bài 10.

a) Ta có $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

Vì $a^3 + b^3$ chia hết cho 3 và $3ab(a + b)$ chia hết cho 3 nên $(a + b)^3$ chia hết cho 3

Do đó $a + b$ chia hết cho 3 (đpcm).

b) Ta có $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$

$$= (1^3 + 10^3) + (2^3 + 9^3) + \dots + (5^3 + 6^3)$$

$$= (1 + 10)(1^2 + 10 \cdot 1 + 10^2) + (2 + 9)(2^2 + 2 \cdot 9 + 9^2) + \dots + (5 + 6)(5^2 + 5 \cdot 6 + 6^2)$$

$$= 11 \cdot 111 + 11 \cdot 103 + \dots + 11 \cdot 91$$

$$= 11 \cdot (111 + 103 + \dots + 91). \text{ Vậy : } A : 11$$

BÀI 9. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

PHẦN I. Phương pháp đặt nhân tử chung

VD 1.1.

$$a) x^2 + 2x = x(x+2)$$

$$b) 4x - 6xy = 2x(2 - 3y)$$

$$c) 9x^2y - 6xy^2 = 3xy(3x - 2y)$$

$$d) 7x^2 - 21xy - 14xz = 7x(x - 3y - 2z)$$

$$e) -2a^3b^2 - 6ab^2 + 4ab = -2ab(a^2b + 3b - 2)$$

f)

$$3x^3y^3 - 6x^2y^2 + 9xy = 3xy(x^2y^2 - 2xy + 3)$$

VD 1.2.

$$a) 3x.(x+2) + 5.(x+2) = (x+2)(3x+5)$$

$$b) 7x^2.(x+3) - 14.(3+x) = (3+x)(7x^2 - 14) = 7(3+x)(x^2 - 2)$$

$$c) 5x.(x-y) - 15x^2.(x-y) = 5x(x-y)(1-3x)$$

$$d) 10x^2.(x-y) + 15x^3.(y-x) = 10x^2.(x-y) - 15x^3.(x-y) = 5x^2(x-y)(2-3x)$$

$$e) 5x.(2x-3y) - 15.(3y-2x) = 5x.(2x-3y) + 15.(2x-3y) = 5(2x-3y)(x+3)$$

$$f) a(b-c) + d(b-c) - e(b-c) = (b-c)(a+d-e)$$

g)

$$15a^2b(x^2 - y) - 20ab^2(x^2 - y) + 25ab(y - x^2) = 15a^2b(x^2 - y) - 20ab^2(x^2 - y) - 25ab(x^2 - y) \\ = 5ab(x^2 - y)(3a - 4b - 5)$$

$$h) (3a - 6b) - m(a - 2b) - n(2b - a) = 3(a - 2b) - m(a - 2b) + n(a - 2b) = (a - 2b)(3 - m + n)$$

VD 1.3.

$$a) -26x^4y^3 + 13x^2y^2z^2 - 39xy^2z^3 = -13xy^2(2x^3y - xz^2 + 3z^3).$$

$$b) 3(x-y) + y(y-x) = 3(x-y) - y(x-y) = (x-y)(3-y).$$

$$c) xy(x+y) - 5x - 5y = xy(x+y) - 5(x+y) = (x+y)(xy-5).$$

$$d) x(x+y)^2 + xy(x+y) = x(x+y)(x+y+y) = x(x+y)(x+2y).$$

$$e) y(x-y)^2 + x(y-x)^2 = y(x-y)^2 + x(x-y)^2 = (x-y)^2(x+y).$$

$$f) xy(x-y) + x^2 - y^2 = xy(x-y) + (x-y)(x+y) = (x-y)(xy+x+y).$$

VD 2.1.

$$a) A = a(2b+1) - 3b(2b+1) = (2b+1)(a-3b).$$

$$\text{Thay } a=7, b=2 \text{ vào biểu thức } A \text{ ta có: } A = (2.2+1)(7-3.2) = 5.$$

$$b) B = b^2 - 6b - 5a(6-b) = b(b-6) + 5a(b-6) = (b-6)(5a+b).$$

$$\text{Thay } a=3, b=5 \text{ vào biểu thức } B \text{ ta có: } B = (5-6)(5.3+5) = -1.(15+5) = -20.$$

$$c) C = 2xy(x+y) - zx - zy = 2xy(x+y) - z(x+y) = (x+y)(2xy-z).$$

$$\text{Thay } x=2, y=3, z=-8 \text{ vào biểu thức } C \text{ ta có } C = (2+3)(2.2.3 - (-8)) = 5.20 = 100.$$

$$d) D = x(3x-2y) + 2y - 3x = x(3x-2y) - (3x-2y) = (3x-2y)(x-1).$$

$$\text{Thay } x=6, y=4 \text{ vào biểu thức } D \text{ ta có: } D = (3.6-2.4)(6-1) = 10.5 = 50.$$

VD 2.2.

$$a) A = (a-b)(b+3) \text{ tại } a=2003 \text{ và } b=1997 \text{ thì giá trị của } A = 12000.$$

$$b) B = (b-8)(b+c) \text{ tại } b=108 \text{ và } c=-8 \text{ thì giá trị của } B = 10000.$$

$$c) C = (x+y)(xy-2) \text{ tại } x+y=10 \text{ và } xy=12 \text{ thì giá trị của } C = 100.$$

$$d) D = x^2(x+2y)(x^3-xy+y^2) \text{ tại } x=10 \text{ và } y=-5 \text{ thì giá trị của } D = 0.$$

VD 3.1

$$a) x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$\text{Khi đó } x=0 \text{ hoặc } x-3=0$$

$$\text{Suy ra: } x=0 \text{ hay } x=3$$

$$\text{Vậy } x \in \{0; 3\}$$

$$c) x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0$$

$$\text{Khi đó } x^2=0 \text{ hay } x-3=0$$

$$b) 2x - 4x^2 = 0$$

$$2x(1-2x) = 0$$

$$\text{Khi đó: } 2x=0 \text{ hay } 1-2x=0$$

$$\text{Suy ra: } x=0; x=\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy: } x \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$$

$$d) 3x^3 + 9x = 0$$

$$3x(x^2+3)$$

$$\text{Khi đó } 3x=0 \text{ hay } x^2+3=0$$

Suy ra: $x = 0; x = 3$

Vậy: $x \in \{0; 3\}$

VD 3.2

a) $x - 2023 + 2x(x - 2023) = 0 \dots$

$$(x - 2023)(1 + 2x) = 0$$

Khi đó $x - 2023 = 0$ hoặc $1 + 2x = 0$.

- Với $x - 2023 = 0$
 $x = 2023$.

- Với $1 + 2x = 0$
 $2x = -1$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Vậy $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 2023\right\}$.

b) $\frac{5x^2}{3} + \frac{15x}{2} = 0$.

$$5x \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{2}\right) = 0$$

Khi đó $5x = 0$ hoặc $\frac{x}{3} + \frac{3}{2} = 0$.

- Với $5x = 0$
 $x = 0$.

- Với $\frac{x}{3} + \frac{3}{2} = 0$

$$\frac{x}{3} = -\frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{9}{2}$$

Vậy $x \in \left\{-\frac{9}{2}; 0\right\}$.

Với $3x = 0$ thì $x = 0$

Với $x^2 + 3 = 0$ thì $x^2 = -3$ (loại)

Vậy: $x = 0$

c) $2 - x = (x - 2)(2x + 5)$.

$$(2 - x) - (x - 2)(2x + 5) = 0$$

$$(2 - x) + (2 - x)(2x + 5) = 0$$

$$(2 - x)(1 + 2x + 5) = 0$$

$$(2 - x)(2x + 6) = 0$$

Khi đó $2 - x = 0$ hoặc $2x + 6 = 0$.

- Với $2 - x = 0$
 $x = 2$.

- Với $2x + 6 = 0$
 $2x = -6$
 $x = -3$.

Vậy $x \in \{-3; 2\}$.

d) $(x^2 + 4)(3x - 1) = 12x^2 - 4x$.

$$(x^2 + 4)(3x - 1) - 12x^2 + 4x = 0$$

$$(x^2 + 4)(3x - 1) - 4x(3x - 1) = 0$$

$$(3x - 1)(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$(3x - 1)(x - 2)^2 = 0$$

Khi đó $3x - 1 = 0$ hoặc $x - 2 = 0$.

- Với $3x - 1 = 0$
 $3x = 1$

$$x = \frac{1}{3}$$

- Với $x - 2 = 0$
 $x = 2$.

Vậy $x \in \left\{\frac{1}{3}; 2\right\}$.

VD 4.1.

$$a) A = 15.91,5 + 15.8,5 = 15.(91,5 + 8,5) = 15.100 = 1500$$

$$b) B = 65.14,6 + 5.7.14,6 = 14,6.(65 + 5.7) = 14,6.100 = 1460$$

VD 4.2.

$$a) 75.20,1 + 5^2.20,1$$

$$= 20,1(75 + 5^2)$$

$$= 20,1(75 + 25)$$

$$= 20,1.100$$

$$= 2010.$$

$$b) 86.15 + 150.1,4$$

$$= 86.15 + 15.14$$

$$= 15.(86 + 14)$$

$$= 15.100$$

$$= 1500.$$

$$c) 98,6.199 - 990.9,86$$

$$= 98,6.199 - 98,6.99$$

$$= 98,6(199 - 99)$$

$$= 98,6.100$$

$$= 9860.$$

$$d) 0,78.1300 + 50.6,5 - 39$$

$$= 78.13 + 5.65 - 39$$

$$= 13.78 + 13.25 - 13.3$$

$$= 13(78 + 25 - 3)$$

$$= 13.100$$

$$= 1300.$$

$$e) 0,12.900 - 110.0,6 + 36 - 63.6$$

$$= 6.18 - 6.11 + 6.6 - 6.63$$

$$= 6(18 - 11 + 6 - 63)$$

$$= 6.(-50)$$

$$= -300.$$

$$f) 84.84,5 + 840.1,55$$

$$= 840.8,45 + 840.1,55$$

$$= 840(8,45 + 1,55)$$

$$= 840.10$$

$$= 8400.$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP**Bài 1.**

$$a) x(x^2 + 2).$$

$$b) 3xy(x - 2 + 4yz).$$

$$c) 3x^2(x - 4).$$

$$d) (x - y)(5y + 3).$$

$$e) 5(x + 3y)(1 - 3x).$$

$$f) -2(x - y)(x + 2y).$$

Bài 2.

$$a) (x+2).(x-3) + (3x-2).(x-3) = (x-3).(x+2+3x-2) = (x-3).4x$$

$$b) (2+5x).(x-5) - (2x-1).(5-x) = (2+5x).(x-5) + (2x-1).(x-5) \\ = (x-5)(2+5x+2x-1) = (x-5)(7x+1)$$

$$c) -5x.(1-3x) - (2x-1).(3x-1) = -5x(1-3x) + (2x-1)(1-3x) \\ = (1-3x)(-5x+2x-1) = (1-3x)(-3x-1)$$

$$d) (5x-1).(x^2+2) + (x^2+3x-2).(1-5x) = (5x-1).(x^2+2) - (x^2+3x-2).(5x-1) \\ = (5x-1)(x^2+2-x^2-3x+2) = (5x-1)(-3x+4)$$

$$e) (5-x).(11x+x^2) - (11x+x^2).(10x^2-x) = (11x+x^2)(5-x-x^2+x) \\ = (11x+x^2)(5-10x^2) = 5(11x+x^2)(1-2x^2)$$

Bài 3.

$$a) 2(x-1)(2x-3) + 3x(2x-3) = (2x-3)[2(x-1) + 3x] \\ = (2x-3)(2x-2+3x) = (2x-3)(5x-2)$$

$$b) 3(5-2x)(3x+1) - (4-x)(5-2x) = (5-2x)[3(3x+1) - 4+x] \\ = (5-2x)(9x+3-4+x) = (5-2x)(10x-1)$$

$$c) (2x-1)^2 - (3+x)(1-2x) = (2x-1)^2 + (3+x)(2x-1) \\ = (2x-1)(2x-1+3+x) = (2x-1)(3x+2)$$

$$d) (3-2x)(5-x) - 2(x-5)^2 = -(3-2x)(x-5) - 2(x-5)^2 = (x-5)[-3+2x-2(x-5)] \\ = (x-5)(-3+2x-2x+10) = 7.(x-5)$$

$$e) 3(3x-4)(x-2) + 2(1-x)(4-3x) = 3(3x-4)(x-2) - 2(1-x)(3x-4) \\ = (3x-4)[3(x-2) - 2(1-x)] = (3x-4)(3x-6-2+2x) = (3x-4)(5x-8)$$

Bài 4.

$$a) 12,7(85+15) = 1270.$$

$$b) 856(0.64+0.36) = 856.$$

$$b) 18(65-25+60) = 1800.$$

$$d) 7(30-25+7-32) = -140.$$

Bài 5

$$a) (x-2)(x+3) = 0 \text{ nên } x \in \{2; -3\}$$

$$b) (x-2)(x^2+4x+6) = 0 \text{ nên } x = 2$$

$$c) (5x-3)(x-2) = 0 \text{ nên } x \in \left\{ \frac{3}{5}; 2 \right\}$$

$$d) (x^3-8)(x^2-9) = 0 \text{ nên } x \in \{2; \pm 3\}$$

Bài 6.

a) $(x-2)(2x-3)=0$ nên $x \in \left\{ \frac{3}{2}; 2 \right\}$. b) $8x(x-3)(x+3)=0$ nên $x \in \{0; -3; 3\}$.

c) $(x-5)^2(x-4)(x-6)=0$ nên $x \in \{4; 5; 6\}$. d) $(2x+3)(x^2+1)=0$ nên $x \in \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

e) $x(x-1)(x+2)$ nên $x \in \{-2; 0; 1\}$. f) $x(x-2)(x-12)$ nên $x \in \{0; 2; 12\}$.

g) $(x-3)(5x+7)=0$ nên $x = \left\{ 3; -\frac{7}{5} \right\}$ h) $(x-4)(x+10)=0$ nên $x \in \{4; -10\}$

i) $(2x+3)(-x+6)=0$ nên $x \in \left\{ \frac{-3}{2}; 6 \right\}$ k) $(4x-1)(-3x-1)=0$ nên $x \in \left\{ \frac{1}{4}; -\frac{1}{3} \right\}$

Bài 7.

a) $A = 2x(x+y) - 4(x+y) = 2(x-2)(x+y)$

tại $x = 22; y = 88$ ta có $A = 2 \cdot (22-2) \cdot (22+88) = 2 \cdot 20 \cdot 110 = 4400$

b) $B = x(x-1) - y(1-x) = x(x-1) + y(x-1) = (x+y)(x-1)$

tại $x = 2001; y = 1999$ ta có $B = (2001-1)(2001+1999) = 2000 \cdot 4000 = 8000000$

c) $C = x^2(2x-y) + x(y-2x) = x^2(2x-y) - x(2x-y) = x(x-1)(2x-y)$

tại $x = 201; y = 102$ ta có

$C = 201(2 \cdot 201 - 102)(201 - 1) = 201 \cdot 300 \cdot 200 = 201 \cdot 60000 = 12060000$

Bài 8.

a) $50^{n+2} - 50^{n+1} = 50^n(50^2 - 50) = 50^n \cdot 2450$ nên chia hết cho 245 với mọi số tự nhiên n .

b) $n^2 + 4n + 3 = n^2 + n + 3n + 3 = n(n+1) + 3(n+1) = (n+1)(n+3)$ nên chia hết cho 8 với mọi số tự nhiên n lẻ.

c) Ta có: $33^{n+1} - 33^n = 33^n \cdot 33 - 33^n = 33^n \cdot (33 - 1) = 33^n \cdot 32$. Vì $33^n \cdot 32 : 32$ với mọi số tự nhiên n nên $33^{n+1} - 33^n : 32$ với mọi số tự nhiên n .

d) Ta có: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n \cdot (n+1)(n-1)$

Vi $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ chia hết cho 2 và chia hết cho 3.

Nên $(n-1).n.(n+1)$ chia hết cho 6.

Vậy $n^3 - n$ chia hết cho 6.

e) Ta có: $55^{n+1} - 55^n = 55^n(55-1) = 54.55^n : 54 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

f) Ta có: $P = n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$

Vì n lẻ, $n \in \mathbb{N}$ nên $(n-1)n(n+1)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow P : 3(1)$

Vì n lẻ nên $n-1$; $n+1$ là hai số tự nhiên chẵn liên tiếp

Đặt $n-1 = 2k (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$

Ta có: $(n-1)(n+1) = 2k.2(k+1) = 4.k(k+1) : 8$ (do $k(k+1) : 2; \forall k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow P : 8(2)$

Từ (1); (2) và $(3;8) = 1$ suy ra $P : 24$ (đpcm)

g) $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = (n-1).n.n(n+1) : 4$ Vì có 2 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2 và tích 2 số chia hết cho 2 sẽ chia hết cho 4.

Bài 9.

a) Ta có $xy + 3x - 2y - 9 = 0$

$$(x-2)(y+3) = 3.$$

Mà $3 = 3.1 = -3.(-1)$. Khi đó có bốn trường hợp xảy ra $x-2=3$ và $y+3=1$ hoặc $x-2=1$ và $y+3=3$ hoặc $x-2=-3$ và $y+3=-1$ hoặc $x-2=-1$ và $y+3=-3$.

Nên $x=5, y=-2$ hoặc $x=3, y=0$ hoặc $x=-1, y=-4$ hoặc $x=1, y=-6$.

b) Ta có :

$$xy - x + 3y - 4 = 0$$

$$(x+3)(y-1) = 1$$

Mà $1 = 1.1 = -1.(-1)$. Khi đó có hai trường hợp xảy ra là $x+3=1$ và $y-1=1$ hoặc $x+3=-1$ và $y-1=-1$. Nên $x=-2, y=2$ hoặc $x=-4, y=0$.

c) Ta có: $xy - x + 2(y-1) = x(y-1) + 2(y-1) = (y-1)(x+2)$

$$13 = 13.1 = 1.13 = (-1).(-13) = (-13).(-1)$$

Vậy ta có:

$$1, \begin{cases} y-1=1 \\ x+2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=11 \end{cases}$$

$$2, \begin{cases} y-1=13 \\ x+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$3, \begin{cases} y-1=-1 \\ x+2=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-15 \end{cases}$$

$$4, \begin{cases} y-1=-13 \\ x+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-12 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy có 4 cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn là: (11, 2) ; (-1, 14) ; (-15, 0) ; (-3, -12).

PHẦN 2: Phương pháp dùng hằng đẳng thức

VD 1.1.

$$a) 6x - 9 - x^2 = -(x^2 - 2.3x + 3^2) = -(x-3)^2.$$

$$b) 9 - 6x + x^2 - y^2 = x^2 - 2.3x + 3^2 - y^2 = (x-3)^2 - y^2$$

$$= [(x-3)-y][(x-3)+y] = [x-y-3][x+y-3].$$

$$c) 5x^2 - 10xy^2 + 5y^4 = 5[x^2 - 2xy^2 + (y^2)^2] = 5[x-y^2]^2.$$

$$d) x^2 - 4x - 25y^2 + 4 = x^2 - 4x + 4 - 25y^2 = x^2 - 2.x.2 + 2^2 - (5y)^2 = (x-2)^2 - (5y)^2$$

$$= [(x-2)-5y][(x-2)+5y] = [x-5y-2][x+5y-2].$$

$$e) 49(y-4)^2 - 9(y+2)^2 = [7(y-4)]^2 - [3(y+2)]^2$$

$$= [7(y-4)-3(y+2)][7(y-4)+3(y+2)]$$

$$= [7y-28-3y-6][7y-28+3y+6] = [4y-34][10y-22] = 4[2y-17][5y-11].$$

$$f) (2x+y)^2 - 4x^2 + 12x - 9 = (2x+y)^2 - (4x^2 - 12x + 9) = (2x+y)^2 - [(2x)^2 - 2.2x.3 + 3^2]$$

$$= (2x+y)^2 - (2x-3)^2 = [(2x+y)-(2x-3)][(2x+y)+(2x-3)]$$

$$= [2x+y-2x+3][2x+y+2x-3] = [y+3][4x+y-3].$$

VD 1.2.

$$a) 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3x \cdot 1^2 - 1^3 = (3x - 1)^3$$

$$b) 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1^3 = (2x - 1)^3.$$

$$c) x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 9y^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 + (2y)^3 + y^3 = (x + 2y)^3 + y^3$$

$$= [(x + 2y) + y] [(x + 2y)^2 - (x + 2y)y + y^2] = [x + 3y] [x^2 + 4xy + 4y^2 - xy - 2y^2 + y^2]$$

$$= [x + 3y] [x^2 + 3xy + 3y^2].$$

$$d). 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 - z^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 + y^3 - z^3 = (2x + y)^3 - z^3$$

$$= [(2x + y) - z] [(2x + y)^2 + (2x + y)z + z^2] = [2x + y - z] [4x^2 + 4xy + y^2 + 2zx + yz + z^2]$$

$$= [2x + y - z] [4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + yz + 2zx].$$

VD 2.1.

$$a) 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 \text{ tại}$$

$$x = 39, y = 22.$$

$$A = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

$$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 + y^3$$

$$= (2x + y)^3$$

Thay $x = 39, y = 22$ vào biểu thức A

ta có :

$$A = (2 \cdot 39 + 22)^3$$

$$= 100^3$$

$$= 1000000.$$

$$c) C = x^2 - 8x + 15 \text{ tại } x = 105.$$

$$C = x^2 - 8x + 15 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 1^2$$

$$= (x - 4)^2 - 1^2 = [(x - 4) - 1] [(x - 4) + 1]$$

$$= [x - 5] [x - 3]$$

Thay $x = 105$ vào biểu thức C ta có :

$$C = [105 - 5] [105 - 3]$$

$$= 100 \cdot 102$$

$$= 10200.$$

$$b) B = x^2 - 2x + 1 - (2y + 1)^2$$

$$\begin{aligned} B &= x^2 - 2x + 1 - (2y + 1)^2 \\ &= (x - 1)^2 - (2y + 1)^2 \\ &= [(x - 1) - (2y + 1)][(x - 1) + (2y + 1)] \\ &= [x - 1 - 2y - 1][x - 1 + 2y + 1] \\ &= [x - 2y - 2][x + 2y] \end{aligned}$$

Thay $x = 36, y = 32$ vào biểu thức B

ta có :

$$\begin{aligned} B &= [36 - 2.32 - 2][36 + 2.32] \\ &= -30.100 \\ &= -3000. \end{aligned}$$

VD 3.1.

$$a) (2x - 5)^2 - (5 + 2x)^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} (2x - 5)^2 - (5 + 2x)^2 &= 0 \\ [2x - 5 - 5 - 2x][2x - 5 + 5 + 2x] &= 0 \\ -40x &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Vậy $x \in \{0\}$.

$$b) 9(4x + 3)^2 = 16(3x - 5)^2$$

$$\begin{aligned} 9(4x + 3)^2 - 16(3x - 5)^2 &= 0 \\ [3(4x + 3) - 4(3x - 5)][3(4x + 3) + 4(3x - 5)] &= 0 \\ (12x + 9 - 12x + 20)(12x + 9 + 12x - 11) &= 0 \\ 29(24x - 11) &= 0 \\ 24x - 11 &= 0 \\ x &= \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

$$d) D = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - y^3.$$

$$\begin{aligned} D &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - y^3 \\ &= (x + 1)^3 - y^3 \\ &= [(x + 1) - y][(x + 1)^2 + (x + 1)y + y^2] \\ &= [x - y + 1][(x + 1)^2 + (x + 1)y + y^2] \end{aligned}$$

Thay $x = 99, y = 100$ vào biểu thức D ta có :

$$\begin{aligned} D &= [99 - 100 + 1][(99 + 1)^2 + (99 + 1).100 - \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$a) x^2 - 2x + 1 = 25$$

$$(x - 1)^2 = (\pm 5)^2$$

Với $x - 1 = 5$ thì $x = 6$

Với $x - 1 = -5$ thì $x = -4$

Vậy $x \in \{6; -4\}$

$$d) 1 - 9x^2 = (3x + 1)^2.$$

$$\begin{aligned} 1 - 9x^2 &= (3x + 1)^2 \\ 1 - 9x^2 - (3x + 1)^2 &= 0 \\ (1 - 3x)(1 + 3x) - (3x + 1)^2 &= 0 \\ (1 + 3x)(1 - 3x - (3x + 1)) &= 0 \\ (1 + 3x)(1 - 3x - 3x - 1) &= 0 \\ -6x(1 + 3x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{11}{24}.$$

$$\begin{aligned} & - \text{ Với } -6x = 0 \\ & \quad x = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \text{ Với } 1 + 3x = 0 \\ & \quad x = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -\frac{1}{3}; 0 \right\}.$$

VD 3.2.

$$\text{a) } (x^3 - 4x^2) - (x - 4) = 0$$

$$x^2(x - 4) - (x - 4) = 0$$

$$(x - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x - 4)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-1; 1; 4\}.$$

$$\text{b) } 27x^3 - 54x^2 + 36x = 8.$$

$$27x^3 - 54x^2 + 36x = 8$$

$$27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = 0$$

$$(3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 = 0$$

$$(3x - 2)^3 = 0$$

$$(3x - 2)^3 = 0$$

$$3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{2}{3} \right\}.$$

$$\text{c) } x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{64}.$$

$$x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = 0$$

$$x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{2} + 3x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -\frac{1}{4} \right\}.$$

$$\text{d) } 4x^2 - (x + 4)^2 = 0$$

$$[2x + x + 4][2x - (x + 4)] = 0$$

$$(3x + 4)(2x - x - 4) = 0$$

$$(3x + 4)(x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} 3x + 4 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -\frac{4}{3}; 4 \right\}.$$

VD 4.1.

a) $48^2 - 42^2 + 64 - 52^2$.

$$\begin{aligned}
& 48^2 - 42^2 + 64 - 52^2 \\
&= 48^2 - 52^2 + 8^2 - 42^2 \\
&= (48 - 52)(48 + 52) + (8 - 42)(8 + 42) \\
&= (48 - 52)(48 + 52) + (8 - 42)(8 + 42) \\
&= -4 \cdot 100 - 34 \cdot 50 \\
&= -400 - 1700 \\
&= -2100.
\end{aligned}$$

b) $72^2 + 144 \cdot 16 + 16^2 - 12^2$.

$$\begin{aligned}
& 72^2 + 144 \cdot 16 + 16^2 - 12^2 \\
&= 72^2 + 2 \cdot 72 \cdot 16 + 16^2 - 12^2 \\
&= (72 + 16)^2 - 12^2 \\
&= 88^2 - 12^2 \\
&= (88 - 12)(88 + 12) \\
&= (76)(100) \\
&= 7600.
\end{aligned}$$

VD 4.2.

a) $82^2 - 18^2$

$$\begin{aligned}
&= (82 + 18)(82 - 18) \\
&= 100 \cdot 64 \\
&= 6400
\end{aligned}$$

c) $\frac{93^3 + 78^3}{171} - 93 \cdot 78$

c) $\frac{43^2 - 11^2}{(36,5)^2 - (27,5)^2}$.

$$\begin{aligned}
& \frac{43^2 - 11^2}{(36,5)^2 - (27,5)^2} \\
&= \frac{(43 - 11)(43 + 11)}{(36,5 - 27,5)(36,5 + 27,5)} \\
&= \frac{32 \cdot 54}{9 \cdot 64} \\
&= \frac{16}{12} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
& 93^3 + 21 \cdot 93^2 + 3 \cdot 49 \cdot 93 + 343, \\
& 93^3 + 21 \cdot 93^2 + 3 \cdot 49 \cdot 93 + 343 \\
&= 93^3 + 3 \cdot 93^2 \cdot 7 + 3 \cdot 93 \cdot 7^2 + 7^3 \\
&= (93 + 7)^3 \\
&= 100^3 \\
&= 1000000.
\end{aligned}$$

b) $26^2 + 52 \cdot 24 + 24^2$

$$\begin{aligned}
&= 26^2 + 2 \cdot 26 \cdot 24 + 24^2 \\
&= (26 + 24)^2 \\
&= 50^2 \\
&= 2500
\end{aligned}$$

d) $\frac{57^2 - 18^2}{76,5^2 - 1,5^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(93+78)(93^2-93.78+78^2)}{171} - 93.78 \\
&= \frac{171.(93^2-93.78+78^2)}{171} - 93.78 \\
&= 93^2 - 93.78 + 78^2 - 93.78 \\
&= 93^2 - 2.93.78 + 78^2 \\
&= (93-78)^2 \\
&= 15^2 \\
&= 225
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(57+18)(57-18)}{(76,5+1,5)(76,5-1,5)} \\
&= \frac{75.39}{78.75} \\
&= \frac{39}{78} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1.

a) $12x$.

b) $2xy$.

c) $2y(3x^2 + y^2)$.

d) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

e) $(x-y)^2(x-1)$.

f) $(x-y)(x^2+y^2-xy)$.

Bài 2.

a) $(73-27)(73+27) = 46.100 = 4600$.

b) $(36-14)(36+14) = 22.50 = 1100$.

c) $(63-27)(63+27) + (72-18)(72+18) = 36.100 + 54.100 = 9000$.

d) $(82-18)(82+18) + (54-46)(54+46) = 64.100 + 8.100 = 7200$.

Bài 3.

a) $(x-5)^2 = 0$. Nên $x \in \{5\}$.

b) $(2x-1)^2 = 0$. Nên $x \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) $(3-5x)(x-1) = 0$. Nên $x \in \left\{\frac{3}{5}; 1\right\}$.

d) $(3x-7)(3-x) = 0$. Nên $x \in \left\{\frac{3}{7}; 3\right\}$.

Bài 4.

a) $2^9 - 1 = (2^3)^3 - 1^3 = (2^3 - 1)(2^6 + 2^3 + 1) = 7.73$ chia hết cho 73.

$$b) 5^6 - 10^4 = (5^3)^2 - (10^2)^2 = (5^3 - 10^2)(5^3 + 10^2) = 25.225 \text{ chia hết cho } 9.$$

$$c) 2^{12} + 1 = (2^4)^3 + 1^3 = (2^4 + 1) \left[(2^4)^2 - 2^4 + 1 \right] = 17 \cdot (2^8 - 2^4 + 1) : 17$$

$$d) 3^9 - 8 = (3^3)^3 - 2^3 = (3^3 - 2) \left[(3^3)^2 + 2 \cdot 3^3 + 2^2 \right] = 25 \cdot (3^6 + 2 \cdot 3^3 + 2^2) : 25$$

Bài 5.

$$a) \text{Ta có: } (n+6)^2 - (n-6)^2 = 12 \cdot 2n = 24n \text{ chia hết cho } 24.$$

$$\begin{aligned} b) \text{Ta có: } (7n-2)^2 - (2n-7)^2 &= [(7n-2) + (2n-7)][(7n-2) - (2n-7)] \\ &= (9n-9)(5n+5) = 9(n-1) \cdot 5 \cdot (n+1) = 45(n^2-1) : 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) (5n-2)^2 - (2n-5)^2 &= [(5n-2) + (2n-5)][(5n-2) - (2n-5)] \\ &= (7n-7) \cdot (3n+3) = 7 \cdot (n-1) \cdot 3 \cdot (n+1) = 21(n^2-1) : 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) (5n-2)^2 - (2n-5)^2 &= [(5n-2) + (2n-5)][(5n-2) - (2n-5)] \\ &= (7n-7) \cdot (3n+3) = 7 \cdot (n-1) \cdot 3 \cdot (n+1) = 21(n^2-1) : 21 \end{aligned}$$

$$e) n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

Vì n là số tự nhiên lẻ nên $(n-1)$ và $(n+1)$ là hai số tự nhiên chẵn liên tiếp, nên một trong hai số chia hết cho 2 và số còn lại chia hết cho 4

$$\text{Suy ra } (n-1)(n+1) \text{ chia hết cho } 2 \cdot 4 = 8. \text{ Vậy: } n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) : 8.$$

PHẦN 3. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử

VD 1.1.

a) $3x^2 + 5y - 3xy + (-5x).$

c) $x^2 - (a + b)x + ab.$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5y - 3xy + (-5x) &= 3x^2 - 3xy + 5y - x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - ax - bx + ab \\ &= 3x(x - y) - 5(x - y) = x(x - a) - b(x - a) \\ &= 3x(x - y) - 5(x - y) = x(x - a) - b(x - a) \\ &= (x - y)(3x - 5). \qquad \qquad \qquad = (x - a)(x - b). \end{aligned}$$

b) $a^4 - 9a^3 + a^2 - 9a.$

d) $4x^2 - 4xy + y^2 - 9z^2.$

$$\begin{aligned} a^4 - 9a^3 + a^2 - 9a &= a(a^3 - 9a^2 + a - 9) \qquad 4x^2 - 4xy + y^2 - 9z^2 = (2x + y)^2 - (3z)^2 \\ &= a(a^2(a - 9) + a - 9) \qquad \qquad \qquad = [(2x + y) - 3z][(2x + y) + 3z] \\ &= a(a - 9)(a^2 + 1). \qquad \qquad \qquad = (2x + y - 3z)(2x + y + 3z) \end{aligned}$$

VD 1.2.

a) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 - z^3.$

b) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$

$$\begin{aligned} &= (x - y)^3 - z^3 \qquad \qquad \qquad = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \\ &= [(x - y) - z][(x - y)^2 + z(x - y) + z^2] = (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc \\ &= [x - y - z][x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - yz + z^2] = [(a + b) + c][(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab[a + b + c] \\ & \qquad \qquad \qquad = [a + b + c][(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab] \\ & \qquad \qquad \qquad = [a + b + c][a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac]. \end{aligned}$$

VD 2.1.

a) $47^2 + 48^2 - 25 + 94.48.$

b) $-64 + 104^3 - 12.104^2 + 48.104 - 100^3.$

$$\begin{aligned} &= 47^2 + 2.47.48 + 48^2 - 5^2 \\ &= (47 + 48)^2 - 5^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 104^3 - 3.104^2.3 + 3.104.4^2 - 4^3 - 100^3 \\ &= (104 - 4)^3 - 100^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(47+48)-5][(47+48)+5] \\
&= 90.100 \\
&= 9000.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (104-4)^3 - 100^3 \\
&= 100^3 - 100^3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
15.64 + 25.100 + 36.15 + 60.100 &= (15.64 + 36.15) + (25.100 + 60.100) = 15(64 + 36) + 100(25 + 60) \\
&= 15.100 + 100.85 = 100(15 + 85) = 100.100 = 10000.
\end{aligned}$$

VD 2.2.

a) $108.95 + 92.95 - 25.90 - 75.90 = 95.100 - 90.100 = 500.$

b) $(57 + 43)^2 - 400 = 100^2 - 400 = 9600.$

VD 3.1.

a) $3x^4 - 9x^3 = -9x^2 + 27x.$

$$3x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 27x = 0$$

$$3x^3(x-3) + 9x(x-3) = 0$$

$$(x-3)(3x^3 + 9x) = 0$$

$$(x-3)(3x(x+3)) = 0$$

$$3x(x-3)(x+3) = 0$$

- Với $3x = 0$

$$x = 0.$$

- Với $x-3 = 0$

$$x = 3.$$

- Với $x+3 = 0$

$$x = -3.$$

Vậy $x \in \{-3; 0; 3\}.$

b) $x^2(x+8) + x^2 = -8x.$

$$x^2(x+8) + x^2 + 8x = 0$$

c) $(x+3)(x^2-3x+8) = x^2 + 3x.$

$$(x+3)(x^2-3x+8) - x^2 - 3x = 0$$

$$(x+3)(x^2-3x+8) - x(x+3) = 0$$

$$(x+3)(x^2-3x+8-x) = 0$$

$$(x+3)(x^2-4x+8) = 0$$

- Với $x+3 = 0$

$$x = -3.$$

- Với $x^2-4x+8 = 0$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 + 4 = 0$$

Điều này là vô lý.

Vậy $x \in \{-3\}.$

d) $x^4 - 9x^2 = 4x^2 - 36.$

$$x^4 - 9x^2 + 36 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x+8) + x^2 + 8x = 0$$

$$x^2(x+8) + x(x+8) = 0$$

$$(x+8)(x^2+x) = 0$$

$$x(x+8)(x+1) = 0$$

- Với $x = 0$.

- Với $x+8 = 0$

$$x = -8.$$

- Với

$$x+1 = 0$$

$$x = -1.$$

$$\text{Vậy } x \in \{-8; -1; 0\}.$$

$$x^4 - 9x^2 + 36 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 9) - 4(x^2 - 9) = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$$

$$(x-2)(x+2)(x-3)(x+3) = 0$$

- Với $x-2 = 0$

$$x = 2.$$

- Với $x+2 = 0$

$$x = -2.$$

- Với $x-3 = 0$

$$x = 3.$$

- Với $x+3 = 0$

$$x = -3.$$

$$\text{Vậy } x \in \{-3; -2; 2; 3\}.$$

VD 3.2.

a) $x^3 - 4x - 15x - 30 = 0$

$$x(x^2 - 4) - 15(x+2) = 0$$

$$x(x-2)(x+2) - 15(x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$(x+2)(x^2 + 3x - 5x - 15) = 0$$

$$(x+2)(x+3)(x-5) = 0$$

$$\begin{cases} x+2=0 \\ x+3=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-2; -3; 5\}.$$

c) $5x^3 - 7x^2 - 15x + 21 = 0$

$$5x(x^2 - 3) - 7(x^2 - 3) = 0$$

$$5x(x^2 - 3) - 7(x^2 - 3) = 0$$

$$(5x-7)(x^2-3) = 0$$

b) $x^3 + 27 + (x+3)(x-9) = 0$

$$(x^3 + 3^3) + (x+3)(x-9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 - 3x + 9) + (x+3)(x-9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 - 2x) = 0$$

$$(x+3).x.(x-2) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x+3=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{0; -3; 2\}.$$

d) $x + x^2 - x^3 - x^4 = 0$

$$x(1+x) - x^3(1+x) = 0$$

$$(1+x)(x-x^3) = 0$$

$$x(1+x)(1-x^2) = 0$$

$$x(1+x)(1-x)(1+x) = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 - x = 0 \Rightarrow \\ 1 + x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{0; 1; -1\}$.

Vậy $x \in \left\{ \frac{7}{5}; \sqrt{3}; -\sqrt{3} \right\}$.

VD 4.1.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } 100 - (7n+3)^2 &= 10^2 - (7n+3)^2 = [10 - (7n+3)][10 + (7n+3)] \\ &= [7 - 7n][13 + 7n] = 7[1 - n][13 + 7n]. \end{aligned}$$

Vi $7[1-n][13+7n]$ chia hết cho 7 nên $100 - (7n+3)^2$ luôn chia hết cho 7 với mọi số tự nhiên n .

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } (3n-1)^2 - 4 &= (3n-1)^2 - 2^2 = [(3n-1) - 2][(3n-1) + 2] \\ &= [3n-3][3n+1] = 3[n-1][3n+1]. \end{aligned}$$

Vi $3[n-1][3n+1]$ chia hết cho 3 nên $(3n-1)^2 - 4$ chia hết cho 3.

VD 4.2.

$$\text{a) Ta có: } x^2 + z^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 + z^2$$

Vi $(x+y)^2 \geq 0$ với mọi x, y ; $z^2 \geq 0$ với mọi z

Suy ra $x^2 + z^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 + z^2 \geq 0$ với mọi x, y, z

$$\text{b) Ta có } x^2 + 2023 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 + 2023$$

Vi $(x-y)^2 \geq 0$ với mọi x, y

Suy ra: $x^2 + 2023 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 + 2023 > 0$ với mọi x, y

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1.

$$\text{a) } (x-3)(x+y).$$

$$\text{b) } (x-y)(3x-5).$$

$$\text{c) } (x-y-z+t)(x-y+z-t).$$

$$\text{d) } 3(x+y-z)(x+y+z).$$

$$\text{e) } (3x-2y)^3.$$

$$\text{f) } (a-1)(a+3)^2.$$

Bài 2.

$$a) x^2 - y^2 - 2x + 2y = (x + y)(x - y) - 2(x - y) = (x - y)(x + y - 2)$$

Thay $x = 2024$, $y = 2023$ vào biểu thức đã rút gọn ta được:

$$(2024 - 2023)(2024 + 2023 - 3) = 4045$$

$$b) \text{Ta có } x^2 - 2023x - y^2 - 2023y = (x + y)(x - y) - 2023(x + y) = (x + y)(x - y - 2023)$$

Thay $x = 3732$; $y = 1709$ vào biểu thức đã rút gọn ta được:

$$(3732 + 1709)(3732 - 1709 - 2023) = 0$$

$$c) \text{Ta có: } x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz = (x + y)^2 - z(x + y) = (x + y)(x + y - z)$$

Thay $x + y = 2024$; $z = 2023$ vào biểu thức đã rút gọn ta được:

$$2024 \cdot (2024 - 2023) = 2024$$

$$d) \text{Ta có: } x^3 + 3x^2y + x + 3xy^2 + y + y^3 = (x + y)^3 + (x + y) = (x + y) \cdot [(x + y)^2 + 1]$$

Thay $x + y = 10$ vào biểu thức đã thu gọn ta được: $10 \cdot (10^2 + 1) = 10 \cdot 101 = 1010$

Bài 3. Tìm x

$$a) (x + 2)(x - 3)(x + 3) = 0. \text{ Nên } x \in \{-3; -2; 3\}.$$

$$b) (1 - x)(7 - x) = 0. \text{ Nên } x \in \{1; 7\}.$$

$$c) (x - 7)(2x + 5) = 0 \text{ nên } x \in \left\{7; -\frac{5}{2}\right\}.$$

$$d) (x - 3)(x - 7) = 0 \text{ nên } x \in \{7; 3\}$$

$$e) (x - 2)(x^2 + 1) = 0 \text{ nên } x = 2$$

$$f) (x - 5)(x^2 - 1) = 0 \text{ nên } x \in \{5; 1; -1\}$$

Bài 4.

$$a) \text{Ta có } A = 4x^2 + 5x + 9 = \left(2x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{119}{16} \text{ nên } A \geq \frac{119}{16}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi}$$

$$x = -\frac{5}{8}.$$

b) Ta có : $B = x^2 + 4x + 2023 = (x + 2)^2 + 2019$ nên $B \geq 2019$. Dấu bằng xảy ra khi $x = -2$.

Bài 5.

a) Ta có $C = -x^2 + 4x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$ nên $C \leq 1$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

b) Ta có $D = -x^2 + 6x + 20 = -(x - 3)^2 + 29$ nên $D \leq 29$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 3$.

Bài 6. Ta có $xy(x + y) + yz(y + z) + xz(x + z) + 2xyz$

$$\begin{aligned} &= [xy(x + y) + xyz] + [yz(y + z) + xyz] + xz(x + z) \\ &= xy(x + y + z) + yz(x + y + z) + xz(x + z) \\ &= y(x + y + z)(x + z) + xz(x + z) = (x + z)(xy + y^2 + yz + xz) = (x + z)(x + y)(y + z). \end{aligned}$$

Bài 7.

a) Ta có $n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n = n^3(n + 3) - n(n + 3) = (n + 3)(n^3 - n) = n(n + 3)(n - 1)(n + 1) : 6$

(Vì $n(n - 1)(n + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp)

$$b) \text{ Ta có : } (2n - 1)^3 - 2n + 1 = (2n - 1)^3 - (2n - 1) = (2n - 1) \left[(2n - 1)^2 - 1 \right]$$

$$= (2n - 1)(2n - 1 + 1)(2n - 1 - 1) = (2n - 1).2n.(2n - 2) = 4n(2n - 1)(n - 1)$$

Chứng minh $(2n - 1).n(n - 1) : 6$

Có $n(n - 1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp thì $n(n - 1) : 2$

Nếu $n : 3$ thì $(2n - 1).n(n - 1) : 6$

Nếu n chia 3 dư 1 thì $(n - 1) : 3$ thì $(2n - 1).n(n - 1) : 6$

Nếu n chia 3 dư 2 thì $(2n - 1) : 3$ thì $(2n - 1).n(n - 1) : 6$

Vậy: $4(2n - 1)n(n - 1) : 24$

PHẦN 4. Phối hợp nhiều phương pháp

VD 1.1.

a) $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2$.

c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3$.

$$\begin{aligned} x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 &= x^4(x^2 - 1) + 2x^2(x + 1) \\ &= x^4(x - 1)(x + 1) + 2x^2(x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^4(x-1)(x+1) + 2x^2(x+1) \\
&= 2x^2(x+1)(x^2(x-1)+2) \\
&= 2x^2(x+1)(x^3-x^2+2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3 \\
&= x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1 - 1^3 - y^3 \\
&= (x-1)^3 - y^3
\end{aligned}$$

b) $x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy$.

$$\begin{aligned}
x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy &= x^2 + 2xy + y^2 - (2xy)^2 \\
&= (x+y)^2 - (2xy)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x+y)^2 - (2xy)^2 \\
&= [(x+y) - 2xy][(x+y) + 2xy] \\
&= [x+y-2xy][x+y+2xy].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(x-1) - y][(x-1)^2 - (x-1)y + y^2] \\
&= [x-y-1][(x-1)^2 - (x-1)y + y^2].
\end{aligned}$$

d) $x^3 - y^3 + x^2 - 2xy + y^2$.

$$\begin{aligned}
&x^3 - y^3 + x^2 - 2xy + y^2 \\
&= x^3 - y^3 + (x-y)^2 \\
&= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + (x-y)^2 \\
&= (x-y)(x^2 + xy + y^2 + x - y) \\
&= (x-y)(x^2 + y^2 + x - y + xy).
\end{aligned}$$

VD 1.2.

a) $x^2 - 5x + 6$.

$$\begin{aligned}
x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 3x - 2x + 6 \\
&= x(x-3) - 2(x-3) \\
&= (x-3)(x-2).
\end{aligned}$$

c) $3x^2 - 5x + 2$.

$$\begin{aligned}
3x^2 - 5x + 2 &= 3x^2 - 3x - 2x + 2 \\
&= 3x(x-1) - 2(x-1) \\
&= (x-1)(3x-2).
\end{aligned}$$

b) $x^2 - 4xy + 3y^2$.

$$\begin{aligned}
x^2 - 4xy + 3y^2 &= x^2 - xy - 3xy + 3y^2 \\
&= x(x-y) - 3y(x-y) \\
&= (x-y)(x-3y).
\end{aligned}$$

d) $x^2 - 7xy + 10y^2$.

$$\begin{aligned}
x^2 - 7xy + 10y^2 &= x^2 - 2xy - 5xy + 10y^2 \\
&= x(x-2y) - 5y(x-2y) \\
&= (x-2y)(x-5y).
\end{aligned}$$

VD 1.3.

a) $x^4 + 2x^3 + 6x - 9$.

c) $x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y$.

$$\begin{aligned}
x^4 + 2x^3 + 6x - 9 &= x^4 - 9 + 2x^3 + 6x & x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y \\
&= (x^2)^2 - 3^2 + 2x^3 + 6x & = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x - y. \\
&= (x^2 - 3)(x^2 + 3) + 2x(x^2 + 3) & = (x + y)^3 - (x + y) \\
&= (x^2 + 3)(x^2 - 3 + 2x) & = (x + y)\left[(x + y)^2 - 1\right] \\
&= (x^2 + 3)(x^2 - x + 3x - 3) & = (x + y)\left[(x + y)^2 - 1^2\right] \\
&= (x^2 + 3)(x(x - 1) + 3(x - 1)) & = (x + y)(x + y - 1)(x + y + 1). \\
&= (x^2 + 3)(x - 1)(x + 3). & \text{d) } x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 8x + 16.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 8x + 16 &= x^3(x - 2) - 8x^2 + 8x + 16 \\
&= x^3(x - 2) - 8(x^2 - x - 2) \\
&= x^3(x - 2) - 8(x^2 - 2x - 2) \\
&= x^3(x - 2) - 8(x(x - 2) + 2) \\
&= x^3(x - 2) - 8(x - 2)(x + 2) \\
&= (x - 2)(x^3 - 8) \\
&= (x - 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)
\end{aligned}$$

VD 1.4.

a) $(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x + 3) - 15$. Đặt $t = x^2 + 2x + 3$ thay vào biểu thức ta có :

$$\begin{aligned}
(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x + 3) - 15 &= (x^2 + 2x + 3 + 2)(x^2 + 2x + 3) - 15 \\
&= (t + 2)t - 15 \\
&= t^2 + 2t - 15 \\
&= t^2 + 2t - 15 \\
&= t^2 + 5t - 3t - 15 \\
&= t(t + 5) - 3(t + 5) \\
&= (t + 5)(t - 3)
\end{aligned}$$

Thay $t = x^2 + 2x + 3$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 2x + 3 + 2)(x^2 + 2x + 3 - 3) \\
&= (x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x) \\
&= x(x + 2)(x^2 + 2x + 5).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 \\
&= [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] - 24 \\
&= [x^2 + x + 4x + 4][x^2 + 2x + 3x + 6] - 24 \\
&= [x^2 + 5x + 4][x^2 + 5x + 6] - 24
\end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$ thay vào biểu thức ta có :

$$\begin{aligned}
&= t[t+2] - 24 \\
&= t^2 - 2t - 24 \\
&= t^2 - 6t + 4t - 24 \\
&= t(t-4) + 4(t-4) \\
&= (t-4)(t+4)
\end{aligned}$$

Thay $t = x^2 + 5x + 4$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 5x + 4 - 4)(x^2 + 5x + 4 + 4) \\
&= (x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 4 + 4) \\
&= x(x+5)(x^2 + 5x + 8).
\end{aligned}$$

$$\text{c) } (x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2.$$

Đặt $x^2 + 4x + 8$ thay vào biểu thức ta có :

$$\begin{aligned}
(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 &= t^2 + 3tx + 2x^2 \\
&= t^2 + tx + 2tx + 2x^2 \\
&= t(t+x) + 2x(t+x) \\
&= (t+x)(t+2x)
\end{aligned}$$

Thay $x^2 + 4x + 8$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 4x + 8 + x)(x^2 + 4x + 8 + 2x) \\
&= (x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8).
\end{aligned}$$

VD 2.1.

$$\text{a) } A = x^2 - y^2 - 3x + 3y \text{ tại } x = 102, y = 101.$$

$$A = (x - y)(x + y) - 3(x - y) = (x - y)(x + y - 3)$$

Thay $x = 102, y = 101$ vào biểu thức A ta có :

$$A = (102 - 101)(102 + 101 - 3) = 1.200 = 200.$$

b) $B = x^2 - 3y - 3x + xy$ tại $x = 53, y = 47$.

$$B = x^2 + xy - 3(x + y) = x(x + y) - 3(x + y) = (x + y)(x - 3)$$

Thay $x = 53, y = 47$ vào biểu thức B ta có :

$$B = (53 + 47)(53 - 3) = 100.50 = 5000.$$

c) $C = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 - z^3$ tại $x = -2018, y = 2019, z = 2020$.

$$\begin{aligned} C &= x^3 + 3.x^2.2y + 3.x.(2y)^2 + (2y)^3 - z^3 = (x + 2y)^3 - z^3 \\ &= [(x + 2y - z)][(x + 2y)^2 + (x + 2y)z + z^2] = [x + 2y - z][(x + 2y)^2 + (x + 2y)z + z^2] \end{aligned}$$

Thay $x = -2018, y = 2019, z = 2020$ vào biểu thức C ta có :

$$\begin{aligned} C &= [-2018 + 2.2019 - 2020][(-2018 + 2.2019)^2 + (-2018 + 2.2019).2020 + 2020^2] \\ &= 0. [(-2018 + 2.2019)^2 + (-2018 + 2.2019).2020 + 2020^2] = 0. \end{aligned}$$

d) $D = x^3 + 8y^3 + (x + 2y)(x + 15y)$ tại $x = 96, y = -48$.

$$\begin{aligned} D &= x^3 + 8y^3 + (x + 2y)(x + 15y) = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) + (x + 2y)(x + 15y) \\ &= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2 + x + 15y) \end{aligned}$$

Thay $x = 96, y = -48$ vào biểu thức D ta có :

$$\begin{aligned} D &= (96 + 2(-48))(96^2 - 296.(-48) + 4(-48)^2 + 96 + 15.48) \\ &= 0.(96^2 - 296.(-48) + 4(-48)^2 + 96 + 15.48) = 0. \end{aligned}$$

VD 2.2.

a) $A = (x - 1)(x - 7)$ tại $x = 51$ thì $A = 2200$.

b) $B = x^2(x - 1)^2$ tại $x = 10$ thì $B = 8100$.

c) $C = (x + 2y - z)(x + 2y - z)$ tại $x = 5, y = 7$ và $z = 19$ thì $C = 0$.

d) Ta có $D = (m^3 - m)^2 + m^3 - m = m(m-1)(m+1)(m^3 - m + 1)$. Mà $m^3 - m + 1 = 0$ nên $D = 0$.

VD 3.1.

a) $3x(x-1) + x - 1 = 0$.

$$(x-1)(3x+1) = 0$$

- Với $x-1=0$
 $x = 1$.

- Với $3x+1=0$
 $x = -\frac{1}{3}$.

Vậy $x \in \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$.

b) $(2x-1)^2 - 25 = 0$.

$$(2x-1)^2 - 5^2 = 0$$

$$(2x-1-5)(2x-1+5) = 0$$

$$(2x-6)(2x+4) = 0$$

- Với $2x-6 = 0$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

- Với $2x+4 = 0$

$$x = -4$$

$$x = -2$$

Vậy $x \in \{-2; 3\}$.

c) $x^3 + 27 = (x+3)(x+9)$

$$x^3 + 27 - (x+3)(x+9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 - 3x + 9) - (x+3)(x+9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 - 3x + 9 - (x+9)) = 0$$

$$(x+3)(x^2 - 3x + 9 - x - 9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 - 4x) = 0$$

$$x(x+3)(x-4) = 0$$

- Với $x = 0$.

- Với $x+3 = 0$

$$x = -3$$

- Với $x-4 = 0$

$$x = 4$$

Vậy $x \in \{-3; 0; 4\}$.

d) $(x-2)(x^2 + 2x + 7) = -2(x^2 - 4) + 5(x-2)$.

$$(x-2)(x^2 + 2x + 7) + 2(x^2 - 4) - 5(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 7) + 2(x-2)(x+2) - 5(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 7 + 2(x+2) - 5) = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$(x-2)(x+2)^2 = 0$$

- Với $x-2 = 0$

$$x = 2$$

- Với $(x+2)^2 = 0$

$$x+2 = 0$$

$$x = -2$$

Vậy $x \in \{-2; 2\}$.

VD 3.2.

a) $7x(x-4) - x + 4 = 0$

$7x(x-4) - (x-4) = 0$

$(x-4)(7x-1) = 0$

$x-4 = 0 \Rightarrow x = 4.$

$7x-1 = 0$

$7x = 1$

$x = \frac{1}{7}.$

Vậy $S = \left\{4; \frac{1}{7}\right\}.$

c) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$

$x^2(x-3) + (x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x^2+1) = 0$

Vì $x^2 \geq 0$ với mọi x

$\Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi x

Suy ra: $x-3 = 0$ hay $x = 3.$

Vậy $S = \{3\}.$

b) $(x^2 - 4x) - 5x + 20 = 0$

$x(x-4) - 5(x-4) = 0$

$(x-4)(x-5) = 0$

$x-4 = 0 \Rightarrow x = 4.$

$x-5 = 0 \Rightarrow x = 5.$

Vậy $S = \{4; 5\}.$

d) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

$x^2(x-2) - 9(x-2) = 0$

$(x-2)(x^2-9) = 0$

$(x-2)(x-3)(x+3) = 0$

$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$x-3 = 0 \Rightarrow x = 3.$

$x+3 = 0 \Rightarrow x = -3.$

Vậy $S = \{2; -3; 3\}.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 1.**

a) $(y-z)(x+1).$

c) $(x-3y)(3x-y).$

e) $(2x+2y-1)(4x+2y+1)..$

g) $x(x-3)(x^2-3x+7)$ (Đặt

$t = x^2 - 3x + 3).$

b) $(x-y)(3x-5).$

d) $(x-2)(2x-1).$

f) $(x+y-1)(-x+3y-1)..$

h) $4(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$

k) $(x+3)(3x-2)$

i) $(x+2)(x-1)$

m) $(x+2)(-10x+3)$

l) $(x+3)(8x+1)$

Bài 2.

a) $x^8 + 64 = x^8 + 16x^4 + 64 - 16x^4 = (x^4 + 8)^2 - 16x^4 = (x^4 + 8 - 4x^2)(x^4 + 8 + 4x^2);$

b)

$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$

c) $x^5 + x + 1 = x^5 - x^4 + x^2 - x^3 + x^4 + x^3 + x - x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$

d) $(x-1)^4 - 2(x^2 - 2x + 1)^2 + 1 = 1 - (x-1)^4 = x(2-x)(x^2 - 2x + 2).$

e) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = \left[(x^2 + 4x + 8) + \frac{3}{2}x \right]^2 - \frac{1}{4}x^2$

$= (x+2)(x+4)(x^2 + 5x + 8).$

f)

$x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 6x + 1 = x^4 + x^3 - x^2 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - x^2 - x + 1 = (x^2 + 5x - 1)(x^2 + x - 1).$

g) Đặt $x^2 + 4x + 8 = t$ khi đó đa thức đã cho trở thành

$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = t^2 + 3xt + 2x^2 = (2x + t)(x + t)$

$= (2x + x^2 + 4x + 8)(x + x^2 + 4x + 8) = (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 5x + 8) = (x+2)(x+4)(x^2 + 5x + 8)$

h) Đặt $x^2 + x + 1 = t$ khi đó đa thức đã cho trở thành

$t(t+1) - 12 = t^2 + t - 12 = (t+4)(t-3)$

$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = (x^2 + x + 5)(x^2 + x - 2) = (x^2 + x + 5)(x-1)(x+2)$

Bài 3. Tìm x

a) $(x+1)(x^2+1) = 0$. Nên $x \in \{-1\}$.

b) $4x(x-1) = 0$. Nên $x \in \{0; 1\}$.

c) $x(x-1)(x+2) = 0$. Nên $x \in \{-2; 0; 1\}$.

d) $(x-1)(x-2)(x-4) = 0$. Nên

$x \in \{1; 2; 4\}$

e) $(2x-5)(4x+12) = 0$. Nên $x \in \left\{-3; \frac{5}{2}\right\}$

f) $(x-1)(x-3) = 0$. Nên $x \in \{1; 3\}$

Bài 4.

a)

$$993.98 + 21.331 - 50.99,3 = 993.98 + 7.993 - 5.993 = 993.(98 + 7 - 5) = 993.100 = 99300$$

b) $93^3 + 21.93^2 + 3.49.93 + 343 = (93 + 7)^3 = 100^3 = 1000000.$

c) $73^2 - 13^2 - 10^2 + 20.13 = 73^2 - (13 - 10)^2 = 73^2 - 3^2 = 70.76 = 5320.$

d) $\frac{97^3 + 83^3}{180} - 97.83 = 97^2 - 2.97.83 + 83^2 = (97 - 83)^2 = 14^2 = 196.$

Bài 5.

a) $A = a(b + 3) - b(3 + b) = (b + 3)(a - b).$

Tại $a = 2003$ và $b = 1997$, ta có $A = (1997 + 3)(2003 - 1997) = 2000.6 = 12000.$

b) $B = b^2 - 8b - c(8 - b) = b(b - 8) + c(b - 8) = (b - 8)(b + c)$

Tại $b = 108$ và $c = -8$, ta có $B = (108 - 8)(108 - 8) = 100.100 = 10000.$

c) $C = xy(x + y) - 2x - 2y = (x + y)(xy - 2)$

Tại $xy = 8$ và $x + y = 7$, ta có $C = 7.(8 - 2) = 7.6 = 42.$

d) $D = x^5(x + 2y) - x^3y(x + 2y) + x^2y^2(x + 2y) = x^2(x + 2y)(x^3 - xy + y^2)$

Tại $x = 10$ và $y = -5$, ta có $D = 0.$

Bài 6.

a) $A = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}. \text{ Nên } A \geq \frac{3}{4}.$

b) $B = x^2 - 3x + 7 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}. \text{ Nên } B \geq \frac{19}{4}.$

Bài 7.

a) $C = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{65}{4}. \text{ Nên } C \leq \frac{65}{4}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = -\frac{5}{2}.$

b) $D = 10 - 3x - x^2 \leq \frac{49}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$. Nên $D \leq \frac{49}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = -\frac{3}{2}$.

Bài 8. Ta có : $a + b = 9$ Nên $(a + b)^2 = 81 \Rightarrow (a - b)^2 = 81 - 4ab$ mà $ab = 20$.

Từ đó suy ra $(a - b)^2 = 1$. Theo đề bài thì $a < b$. Vì vậy $a - b = -1$.

Do đó : $(a - b)^{2023} = (-1)^{2023} = -1$.

Bài 9. Ta có : $A = n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)$.

Là tích của bốn số nguyên liên tiếp. Do đó sẽ tồn tại những số chia hết cho 2,3,4 .Nên A chia hết cho 24 .

Bài 10.

a) Ta có : $P = (x - 2y + 1)^2 + (x - 2)^2 + 2018$. Nên $P \geq 2018$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$ và $y = \frac{3}{2}$.

b) Ta có :

$$Q = -3x^2 - 16y^2 - 8xy + 5x + 2$$

$$-Q = [x^2 + 8xy + 16y^2] + [2x^2 - 5x - 2] = (x + 4y)^2 + 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{41}{8}$$

Suy ra: $Q = -(x + 4y)^2 - 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} \leq \frac{41}{8}$. Nên $Q \leq \frac{41}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{5}{4}$ và $y = -\frac{5}{16}$.

Bài 11.

a) $A = x(x - 7)(x - 3)(x - 4) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$, Đặt $x^2 - 7x + 6 = t$, khi đó:

$$A = (t - 6)(t + 6) = t^2 - 36 \geq -36, \text{ Dấu "=" khi } t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

b) $B = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 5)$, Đặt $x^2 - 4x + 4 = 0$. Khi đó:

$$B = (t - 1)(t + 1) = t^2 - 1 \geq -1, \text{ Dấu "=" khi } t^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

c) $C = x(x+6)(x+2)(x+4) + 8 = (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 8$, Đặt $x^2 + 6x + 4 = t$. Khi đó:

$$C = (t-4)(t+4) + 8 = t^2 - 16 + 8 = t^2 - 8 \geq -8,$$

$$\text{Dấu "=" Khi đó: } t^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + \sqrt{5} \\ x = -3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

d) $D = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6)$, Đặt $x^2 + 5x = t$. Khi đó:

$$D = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36, \text{ Dấu "=" khi } t = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Bài 12.

a) Ta có: $-9x^2 + 6x - 5 = -(9x^2 - 6x + 1 + 4) = -(3x-1)^2 - 4 \leq -4$

$$\Rightarrow \frac{2}{6x-5-9x^2} \geq \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow A \geq \frac{-1}{2}, \text{ Dấu "=" khi } x = \frac{1}{3}$$

b) Ta có: $x^2 - 4x + 9 = (x-2)^2 + 5 \geq 5 \Rightarrow B = \frac{1}{x^2 - 4x + 9} = \frac{1}{(x-2)^2 + 5} \leq \frac{1}{5}$, Dấu "="

khi $x = 2$

c) Đặt $x-1=t \Rightarrow x=t+1 \Rightarrow x^2 = t^2 + 2t + 1$

$$C = \frac{3(t^2 + 2t + 1) - 8(t+1) + 6}{t^2} = \frac{3t^2 - 2t + 1}{t^2} = 3 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2},$$

Đặt: $\frac{1}{t} = a \Rightarrow C = a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow C \geq 3$. Dấu "=" khi $x = 2$