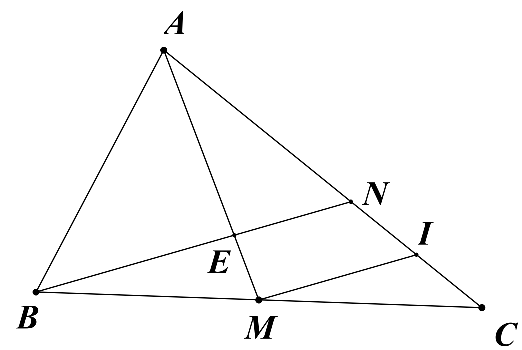
VD 1.5. Ta có AM là đường trung tuyến của ΔABC nên M là trung điểm của BC. Do đó $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{2}$



Kẻ $MI//BN$ với $I\in AC$.

Xét ΔBCN có $MI//BN$, áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{NI}{NC}=\frac{BM}{BC}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

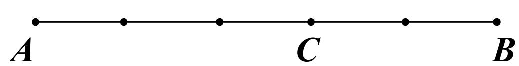
Xét ΔAMI có $EN//MI$, áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{AN}{NI}=\frac{AE}{EM}$$

Mà $AE=3.EM$ nên $\frac{AE}{EM}=3$. Do đó $\frac{AN}{NI}=3 \qquad (2)$

Nhân từng vế (1) và (2) ta được $\frac{AN}{AC}=\frac{3}{2}$.

VD 2.1.



a) *Cách 1:* Có $\frac{CA}{CB}=\frac{3}{2}$ nên $\begin{cases} CA=3t \\ CB=2t \end{cases} (t>0)$

Mà $AB=AC+CB$ nên $10cm=3t+2t=5t$. Suy ra $t=2cm$.

Vậy $CB=4cm$.

Cách 2: Có $\frac{CA}{CB}=\frac{3}{2}$ nên $\frac{CA}{3}=\frac{CB}{2}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{CA}{3}=\frac{CB}{2}=\frac{CA+CB}{3+2}=\frac{AB}{5}=\frac{10}{5}=2$$

Suy ra $CB=2.2=4cm$

Cách 3: Đặt $CB=x,\ CA=10-x$

Từ $\frac{CA}{CB}=\frac{3}{2}$ ta có $3CB=2CA$ hay $3x=2(10-x)$

$$3x=20-2x$$

$$5x = 20$$
$$x = 4$$

Vậy $CB = 4cm$

b) Từ $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2}$ có $\begin{cases} DA = 3t \\ DB = 2t \end{cases} \quad (t > 0)$

Mặt khác D thuộc tia đối của tia BA nên $AB = DA - DB$ hay $10 = 3t - 2t$.

Suy ra $t = 10$. Do đó $DB = 20cm$

Vậy $CD = DB + BC = 20 + 4 = 24cm.$

Do đó AB = 10cm = DA − DB = 3t − 2t => t = 10cm => DB = 20cm.

Vậy CD = 20 + 4 = 24cm.

VD 2.2.

a) ΔABC có $MN//BC$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{NA} \text{ hay } \frac{x}{4} = \frac{8,5 - 5}{5}.$$

Suy ra $x = \frac{3,5.4}{5} = 2,8.$

b) ΔDEF có $PQ//EF$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có:

$$\frac{PD}{PE} = \frac{DQ}{QF} \text{ hay } \frac{x}{10,5} = \frac{24 - 9}{9}.$$

Suy ra $x = \frac{10,5.15}{9} = 17,5.$

c) ΔOMN có $PQ//MN$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có:

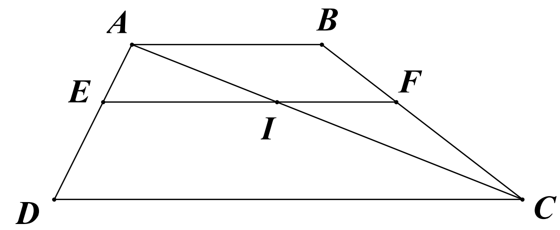
$$\frac{MP}{PO} = \frac{NQ}{QO} \text{ hay } \frac{16}{x} = \frac{20}{20 + 15}.$$

Suy ra $x = \frac{16.35}{20} = 28.$

VD 2.3. Gọi I là giao điểm của EF và AC.

Khi đó $EI//CD$ và $IF//AB.$

ΔADC có $EI//DC$ nên áp dụng định lí Talet ta có:



$$\frac{CI}{IA}=\frac{DE}{EA}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

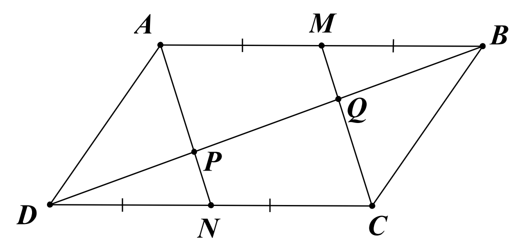
ΔABC có $FI//AB$ nên áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{CI}{IA}=\frac{CF}{FB} \text{ hay } \frac{1}{2}=\frac{CF}{6}.$$

Vậy $CF=\frac{6.1}{2}=3cm.$

VD 3.1. Ta có: $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$ và $AB=CD.$

M là trung điểm của AB nên $AM=MB=\frac{1}{2}AB$



N là trung điểm của AC nên $CN=ND=\frac{1}{2}CD$

Suy ra $AM=NC$ và $AM//NC$.

Tứ giác $AMNC$ có $AM=NC$ và $AM//NC$ nên $AMNC$ là hình bình hành.

Do đó $AN//CM.$ Mà $P\in AN,Q\in CM$ nên $MQ//AP,PN//QC.$

ΔAPB có $MQ//AP$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có: $\frac{BQ}{QP}=\frac{BM}{AM}=1.$

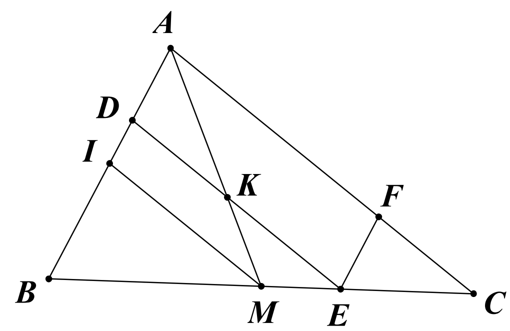
Do đó: $BQ=QP$ $\quad\quad (1)$

ΔDQC có $NP//CQ$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có: $\frac{DP}{PQ}=\frac{DN}{NC}=1.$

Do đó: $DP=QP$ $\quad\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $DP=PQ=DB.$

VD 3.2. Qua M kẻ đường thẳng song song với DE cắt AB tại I. Khi đó ta có $IM//DE//AC$.



AM là trung tuyến của ΔABC nên M là trung điểm của BC. Do đó $MB = MC$.

ΔABC có $IM//AC$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có:

$\frac{IA}{IB} = \frac{MC}{MB} = 1.$

Suy ra $IA = IB = \frac{1}{2}AB.$

ΔABC có $EF//AB$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có: $\frac{CF}{AC} = \frac{EF}{AB}$

Tứ giác $AFED$ có $EF//AD$ và $DE//FA$ nên $AFED$ là hình bình hành. Do đó $EF = AD$

.

Suy ra $\frac{CF}{AC} = \frac{AD}{AB}$ $\quad (1)$

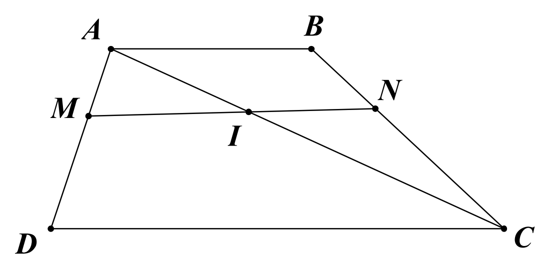
ΔAIM có $DK//IM$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có:

$\frac{DK}{IM} = \frac{AD}{AI}$, suy ra $\frac{DK}{2IM} = \frac{AD}{2AI}$, tức là $\frac{DK}{AC} = \frac{AD}{AB}$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CF}{AC} = \frac{DK}{AC}$, do đó $CF = DK$.

VD 4.1.

a) Gọi I là giao điểm của đường chéo AC và MN.



ΔACD có $MI//CD$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AI}{IC} \quad (1)$$

ΔACB có $IN//AB$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có:

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AI}{IC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$.

b) ΔACD có $MI//CD$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có:

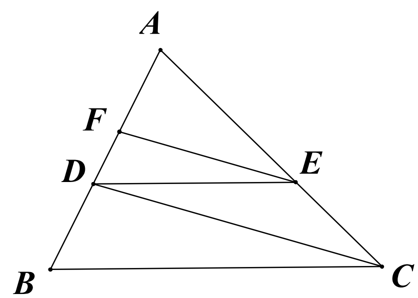
$$\frac{AM}{AD}=\frac{AI}{AC} \qquad (3)$$

ΔACB có $IN//AB$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có:

$$\frac{CN}{CC}=\frac{CI}{CA} \qquad (4)$$

Cộng theo vế các đẳng thức (3) và (4) ta được:

$$\frac{AM}{AD}+\frac{CN}{CB}=\frac{CI+AI}{CA}=\frac{CA}{CA}=1$$



VD 4.2. Xét ΔADC có $EF//DC$ nên áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{AF}{AD}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow AD=\frac{AF.AC}{AE} \qquad (1)$$

ΔABC có $DE//BC$ nên áp dụng định lí Talet ta có:

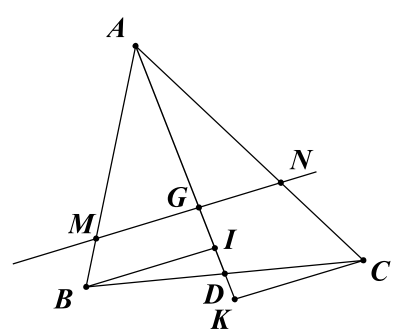
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow AD=\frac{AB.AE}{AC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) nhân vế theo vế ta được $AD^2=AB.AF$

VD 4.3.

Kẻ $BI//CK//MN\left(I,K\in AD\right)$

Có AD là trung tuyến của ΔABC nên D là trung điểm của BC hay $DB=DC$.



Xét ΔBDI và ΔCDK có:

$BD=CD$

$\widehat{IBD}=\widehat{KCD}$ (2 góc so le trong)

$\widehat{IDB}=\widehat{KDC}$ (2 góc đối đỉnh)

Do đó $\Delta BDI=\Delta CDK$ (g – c – g). Suy ra $DI=DK$.

ΔABI có $MG//BI$ nên áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{AB}{AM}=\frac{AI}{AG}$$

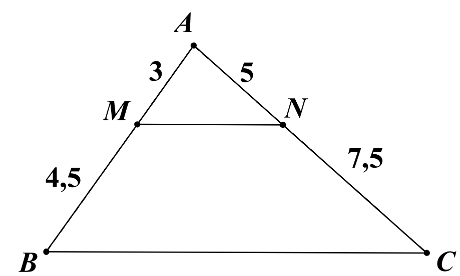
ΔACK có $GN//CK$ nên áp dụng định lí Talet ta có: $\frac{AC}{AN}=\frac{AK}{AG}$.

Suy ra $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{AI+AK}{AG}=\frac{AD-DI+AD+DK}{AG}=\frac{2AD}{AG}$

Mà G là trọng tâm của ΔABC nên $AG=\frac{2}{3}AD$.

Suy ra $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{2AD}{\frac{2}{3}AD}=3$.

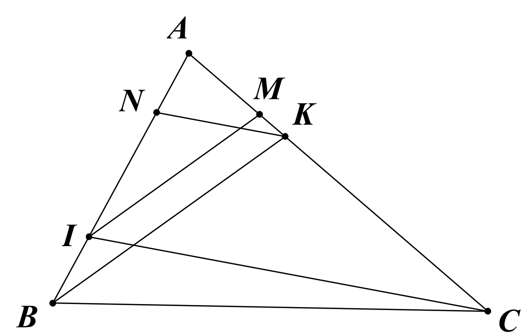
VD 5.1.



Trong ΔABC có: $\frac{AM}{MB}=\frac{3}{4,5}=\frac{2}{3};\frac{AN}{NC}=\frac{5}{7,5}=\frac{2}{3}$

Vì $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{2}{3}$ nên $MN//EF$ (định lí talet đảo).

VD 5.2.



ΔACI có $NK//IC$ nên áp dụng định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{AN}{AI}=\frac{AK}{AC} \qquad (1)$$

ΔAKB có $IM//BK$ nên áp dụng định lí Ta-lét ta có:

$$\frac{AI}{AB}=\frac{AM}{AK} \qquad (2)$$

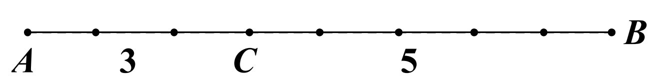
Nhân theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được:

$\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}$

Suy ra $MN//BC$ (theo định lý Ta-lét đảo).

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.



C thuộc đoạn AB và chia AB theo tỉ số $\frac{3}{5}$ nên $\frac{CA}{CB}=\frac{3}{5}$

Suy ra $\begin{cases} CA=3t \\ CB=5t \end{cases}$ $(t>0)$. Do đó $AB=AC+CB=3t+5t=8t$.

Vậy $\frac{AB}{AC}=\frac{8t}{3t}=\frac{8}{3}$ và $\frac{AB}{CB}=\frac{8t}{5t}=\frac{8}{5}$.

Bài 2.

a) Do AM, MN, NP và PB lần lượt tỉ lệ với $10, 2, 3, 5$ nên ta có $\frac{AM}{10}=\frac{MN}{2}=\frac{NP}{3}=\frac{PB}{5}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{AM}{10}=\frac{MN}{2}=\frac{NP}{3}=\frac{PB}{5}=\frac{AM+MN+NP+PB}{10+2+3+5}=\frac{44}{20}=2,2$$

Suy ra $AM=2,2.10=22dm$

$MN=2,2.2=4,4dm$

$NP=2,2.3=6,6dm$

$PB=2,2.5=11dm$.

b) Từ câu a ta có $\frac{MA}{MN}=\frac{22}{4,4}=5$; $\frac{PA}{PN}=\frac{33}{6,6}=5$.

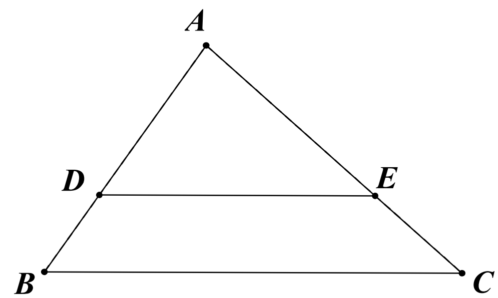
Do đó $\frac{MA}{MN}=\frac{PA}{PN}$

Vậy hai đoạn thẳng MA và MN có tỉ lệ với hai đoạn thẳng PA và PN.

c) Từ câu a ta có $\frac{AM}{AP}=\frac{22}{33}=\frac{2}{3}$; $\frac{NM}{NP}=\frac{4,4}{6,6}=\frac{2}{3}$. Do đó $\frac{AM}{AP}=\frac{NM}{NP}$.

Vậy đoạn thẳng AM và AP tỉ lệ với đoạn thẳng NM và NP.

Bài 3.



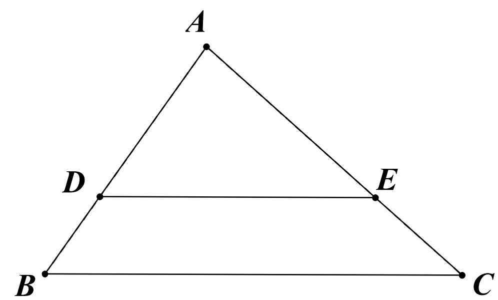
a) Theo tính chất của tỉ lệ thức, ta có:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{AD}{AB-AD}=\frac{AE}{AC-AE}\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}.$$

b) Ta có $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{5}{3}=\frac{9}{EC}\Rightarrow EC=\frac{9.3}{5}=5,4\,cm.$

$AC=AC+EC=9+5,4=14,4cm.$

Bài 4.



a) Theo tính chất của tỉ lệ thức, ta có:

$\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$ nên $\frac{AB-AD}{AB}=\frac{AC-AE}{AC}$

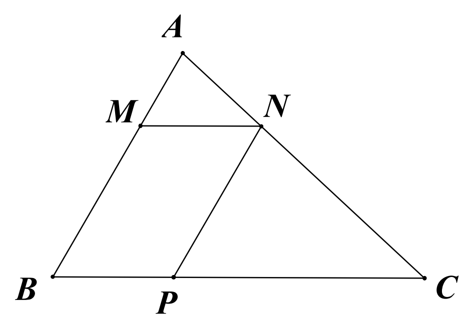
Hay $1-\frac{AD}{AB}=1-\frac{AE}{AC}$. Suy ra $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

b) Ta có $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$ hay $\frac{2}{1}=\frac{4}{EC}$. Suy ra

$EC=\frac{4.1}{2}=2cm.$

Vậy $AC=AC+EC=4+2=6cm.$

Bài 5. Xét ΔABC có:



$MN//BC$ nên $\frac{CN}{NA}=\frac{BM}{MA}=2$ (định lí Ta-let)

$NP//AB$ nên $\frac{CP}{PB}=\frac{CN}{NA}=2$ (định lí Ta-let)

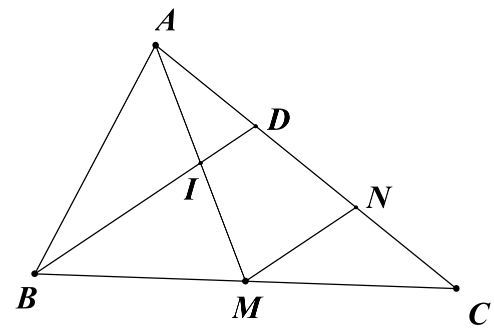
Suy ra $PB=\frac{CP}{2}=\frac{6}{2}=3cm.$

Vậy $BC=CP+PB=6+3=9cm.$

Bài 6. Ta có AM là đường trung tuyến của ΔABC nên M là trung điểm của BC.

Do đó $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{2}$

Kẻ $MN//BD$ với $N \in AC$.



Xét ΔBCD có $MN//BD$, áp dụng định lí Talet ta có:

$\frac{DN}{DC} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$ (1)

Xét ΔAMN có $ID//MN$, áp dụng định lí Talet ta có:

$\frac{AD}{DN} = \frac{AI}{IM}$

Mà I là trung điểm của AM nên $\frac{AI}{AM} = 1$. Do đó $\frac{AD}{DN} = 1$ (2)

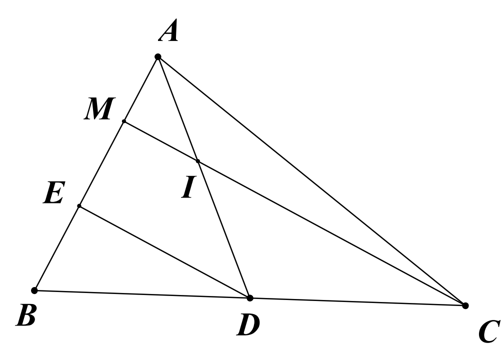
Nhân từng vế (1) và (2) ta được $\frac{DN}{DC} \cdot \frac{AD}{DN} = \frac{1}{2} .1 = \frac{1}{2}$. Vậy $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$.

Bài 7. Ta có AD là đường trung tuyến của ΔABC nên D là trung điểm của BC. Do đó $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$

Kẻ $DE//CM$ với $M \in AB$.

Xét ΔAED có $MI//ED$, nên áp dụng định lí Talet ta có:

$\frac{AM}{ME} = \frac{AI}{ID} = \frac{3}{4}$. Suy ra $\begin{cases} AM = 3t \\ ME = 4t \end{cases} (t > 0)$



Xét ΔBMC có $ED//MC$,nên áp dụng định lí Talet ta có:

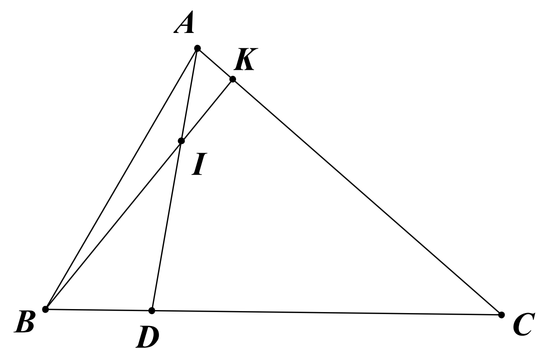
$\frac{BM}{ME} = \frac{BC}{DC} = 2$. Suy ra $BM = 2ME = 2.4t = 8t$.

Vậy $\frac{AM}{MB} = \frac{3t}{8t} = \frac{3}{8}$.

Bài 8. Kẻ $DE//BK$ thì $DE//IK$.

ΔADE có $IK//DE$ nên áp dụng đinh lí Ta-let ta có:

$\dfrac{AK}{KE}=\dfrac{AI}{ID}=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $\begin{cases} AK=t \\ KE=2t \end{cases} (t>0)$



ΔBCK có $DE//BK$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có:

$$\dfrac{KC}{KE}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{4}{1}.\text{ Suy ra } KC=4KE=4.2t=8t$$

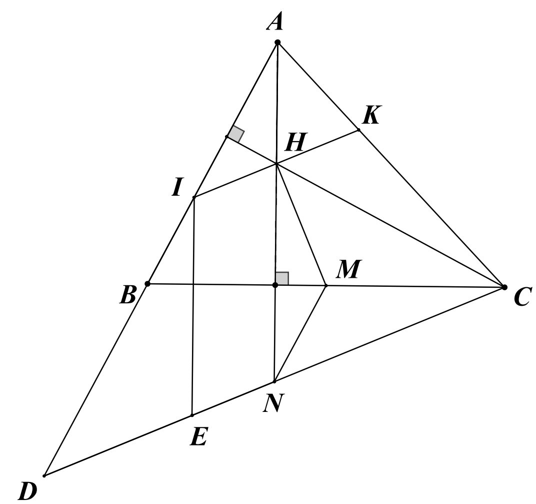
Vậy $\dfrac{AK}{KC}=\dfrac{t}{8t}=\dfrac{1}{8}$.

Bài 9.

a) Có H là trực tâm của ΔABC nên $CH\perp AB$ và $AH\perp BC$. Do đó $CH\perp AD$ và $CM\perp HN$

Có $IK//CD$ (gt), $HM\perp IK$ (gt) nên $HM\perp CD$ hay $HM\perp CN$.

ΔCHN có $HM\perp CN$ và $CM\perp HN$ nên H là trực tâm.



Suy ra $NM\perp CH$.

Mà $CH\perp AD$ nên $NM//AD$. Do đó $NM//DB$.

ΔCBD có $NM//DB$ nêp áp dụng định lí Ta-let ta có:

$$\dfrac{CN}{DN}=\dfrac{MC}{MB}=1 \text{ (do } M \text{ là trung điểm của } BC\text{)}.$$

Suy ra $CN=DN$.

b) Ta có $IK//CD$ nên $IH//DN$ và $HK//NC$.

Qua I kẻ đường thẳng song song với HN, cắt BC tại E.

Tứ giác $IHNE$ có $IH//NE$ và $IE//HN$ nên $IHNE$ là hình bình hành. Do đó $IH=EN$.

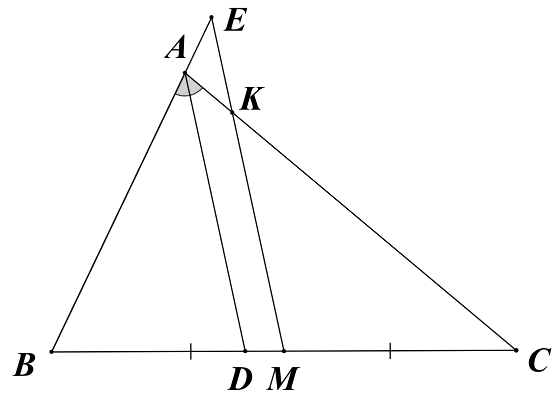
ΔADN có $IE//AN$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có: $\dfrac{NE}{ND}=\dfrac{AI}{AD}$ nên $\dfrac{IH}{ND}=\dfrac{AI}{AD}$

ΔADN có $IH//DN$ nên áp dụng định lí Ta-let ta có: $\dfrac{AI}{AD}=\dfrac{AH}{AN}$

Do đó $\dfrac{IH}{ND}=\dfrac{AH}{AN}$.

Chứng minh tương: $\dfrac{HK}{CN}=\dfrac{AH}{AN}$. Suy ra $\dfrac{IH}{ND}=\dfrac{HK}{CN}$. Mà $ND=CN$ nên $IH=HK$

Bài 10.



a) Có AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$

.

Có $AD//ME$ nên $\widehat{BAD}=\widehat{BEM}$ (hai góc đồng vị)

và $\widehat{CAD}=\widehat{AKE}$ (hai góc so le trong)

Suy ra $\widehat{AKE}=\widehat{AEK}$. Do đó ΔAKE cân tại A.

Suy ra $AE=AK$.

b) Đặt $BM=MC=a$ và $AE=AK=b$.

ΔBEM có $AD//EM$ nên áp dụng định lí Ta-lét ta có:

$\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{BM}{DM}$ hay $\dfrac{BE}{b}=\dfrac{a}{DM}$

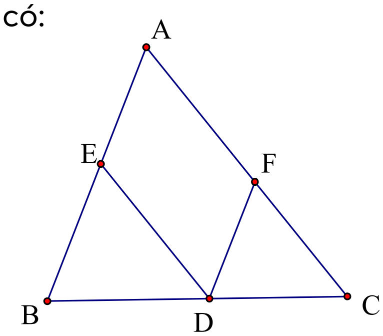
ΔACD có $AD//KM$ nên áp dụng định lí Ta-lét ta có:

$$\frac{CK}{KA}=\frac{CM}{MD} \text{ hay } \frac{CK}{b}=\frac{a}{DM}$$

Suy ra $\dfrac{BE}{b}=\dfrac{CK}{b}$. Vậy $BE=CK$.

Bài 11.

ΔABC có $DE//AC$ và $DF//AB$ nên ap dụng định lý Ta lét ta có:



$$\begin{cases}\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{CD}{CB} & (1)\\ \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{BD}{BC} & (2)\end{cases}$$

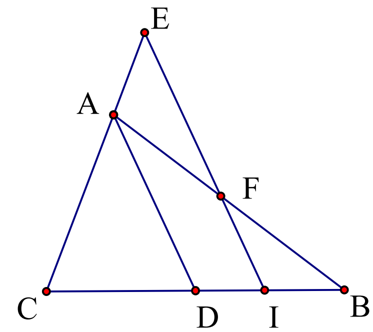
Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2) ta được:

$$\frac{AE}{AB}+\frac{AF}{AC}=\frac{CD+BD}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$$

Bài 12. Đặt $BD=DC=a$ thì $BC=2a$. Gọi I là giao điểm của d và BC.

ΔCEI có $AD//EI$ nên áp dùng định lí Talet ta có:

$$\frac{CE}{CA}=\frac{CI}{CD} \text{ hay } \frac{CE}{CA}=\frac{CI}{a} \qquad (1)$$



ΔADB có $AD//FI$ nên áp dùng định lí Talet ta có:

$$\frac{BF}{BA}=\frac{BI}{BD} \text{ hay } \frac{BF}{BA}=\frac{BI}{a} \qquad (2)$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được:

$$\frac{BF}{AB}+\frac{CE}{AC}=\frac{CI+BI}{a}=\frac{CB}{a}=\frac{2a}{a}=2$$

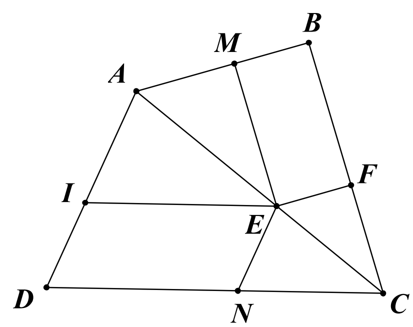
Bài 13.

Từ E kẻ $EM//BC$ và $EN//AD$. Khi đó:

Tứ giác $EFBM$ có $EF//BM$ và $EM//BF$ nên $EFBM$ là hình bình hành. Do đó $EF=BM$.

Tứ giác $DIEN$ có $DI//EN$ và $EI//DN$ nên $DIEN$ là hình bình hành. Do đó $EI=DN$.

ΔABC có $EM//BC$ nên áp dụng định lí Talet ta có:



$$\frac{BM}{AB}=\frac{EC}{AC} \text{ hay } \frac{EF}{AB}=\frac{EC}{AC} \qquad (1)$$

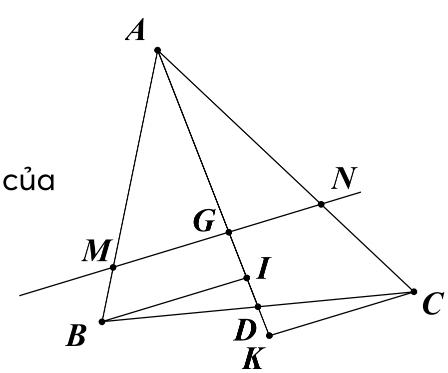
ΔADC có $EN//AD$ nên áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{DN}{DC}=\frac{AE}{AC} \text{ hay } \frac{EI}{DC}=\frac{AE}{AC} \qquad (2)$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được:

$$\frac{EF}{AB}+\frac{EI}{CD}=\frac{EC+AE}{AC}=\frac{AC}{AC}=1.$$

Bài 14.



Kẻ $BI//CK//MN\left(I,K\in AD\right)$

Có AD là trung tuyến của ΔABC nên D là trung điểm của BC hay $DB=DC$.

Xét ΔBDI và ΔCDK có:

$BD=CD$

$\widehat{IBD}=\widehat{KCD}$ (2 góc so le trong)

$\widehat{IDB} = \widehat{KDC}$ (2 góc đối đỉnh)

Do đó $\Delta BDI = \Delta CDK$ (g – c – g). Suy ra $DI = DK$.

ΔABI có $MG // BI$ nên áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{BM}{AM} = \frac{GI}{AG}$$

ΔACK có $GN // CK$ nên áp dụng định lí Talet ta có:

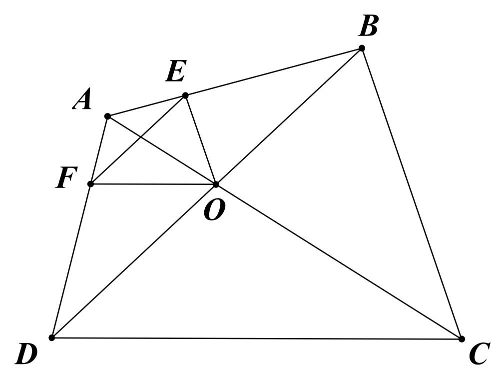
$$\frac{CN}{AN} = \frac{KG}{AG}.$$

Suy ra $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = \frac{GI + KG}{AG} = \frac{GD - ID + GD + DK}{AG} = \frac{2GD}{AG}$.

Mà G là trọng tâm của ΔABC nên $GD = \frac{1}{2}GA$

Suy ra $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = \frac{2.\frac{1}{2}GA}{AG} = 1$

Bài 15.



ΔABC có $EO // BC$ nên theo định lí Ta-let ta có:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AO}{OC}$$

ΔACD có $OF // CD$ nên theo định lí Talet ta có:

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AO}{OC}$$

Do đó $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD}$

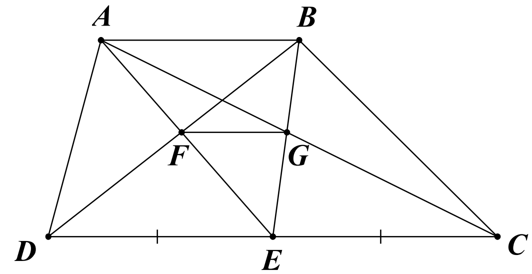
Suy ra $EF // DB$ (theo định lí Talet đảo).

Bài 16.

a) ΔFDE có $AB // GE$ nên theo hệ quả của định lí Ta-let ta có: $\frac{FE}{FA} = \frac{DE}{AB}$

Lại có $ED = EC$ (E là trung điểm của DC) nên

$\frac{FE}{FA} = \frac{EC}{AB}$ (1)



Suy ra $FE.AB = FA.EC$

ΔGEC có $AB//EC$ nên theo hệ quả của định lí

Talet ta có: $\frac{GE}{GB} = \frac{EC}{AB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{GE}{GB} = \frac{FE}{FA}$. Do đó $FE.GB = GE.FA$.

b) Ta có $\frac{GE}{GB} = \frac{FE}{FA}$ (cmt) nên $FG//AB$ (theo định lí Talet đảo).

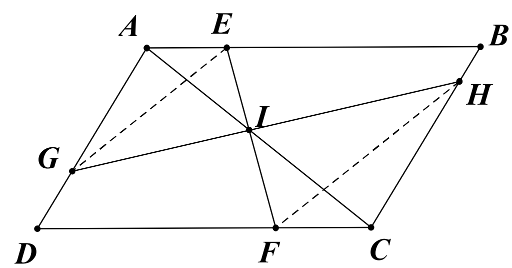
Mà $AB//CD$ do đó $FG//CD$.

Bài 17.

$ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$ và $AD//BC$

Suy ra $AE//FC$, $AG//HC$.

ΔIFC có $AE//FC$ nên theo hệ quả của định lí Talet ta có:



$\frac{EI}{IF} = \frac{AI}{IC}$

ΔIHC có $AG//HC$ nên THEO hệ quả của định lí Talet ta có:

$\frac{GI}{IH} = \frac{AI}{IC}$

Do đó $\frac{EI}{IF} = \frac{GI}{IH}$

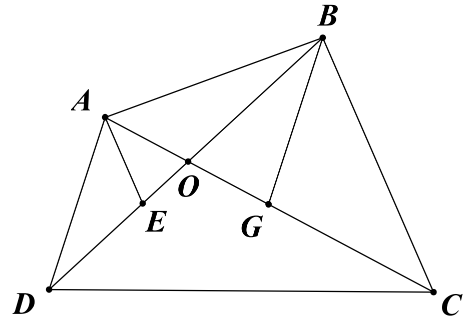
Suy ra $EG//FH$ (theo định lí Talet đảo)

Bài 18.

ΔOBC có $AE//CD$ nên theo hệ quả của định lí Ta-let ta có:

$\frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC}$ (1)

ΔOAD có $BG//AD$ nên theo hệ quả của định lí Ta-let ta có: $\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{OG}{OA}$ (2)



Nhân theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được:

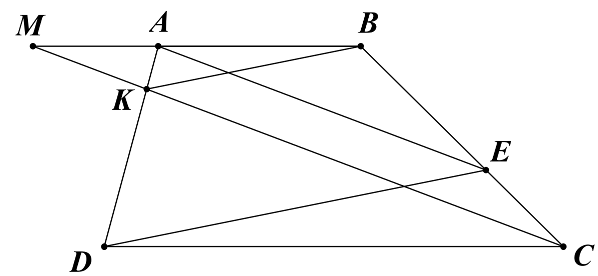
$\dfrac{OE}{OD}=\dfrac{OG}{OC}$

Suy ra $EG//DC$ (theo định lí Ta-lét đảo).

Bài 19.

Gọi I, M lần lượt là giao điểm của AE với BK và CK với AB.

ΔBMK có $AI//MK$ nên theo định lí Ta-lét ta có:



$\dfrac{AI}{MK}=\dfrac{BI}{BK}$

ΔBMC có $IE//MC$ nên theo định lí Ta-let ta có:

$\dfrac{BI}{BK}=\dfrac{IE}{KC}$

Do đó $\dfrac{AI}{MK}=\dfrac{IE}{KC}$ hay $\dfrac{AI}{IE}=\dfrac{MK}{KC}$ (1)

ΔKDC có $MA//DC$ nên theo hệ quả của định lí Ta-lét ta có:

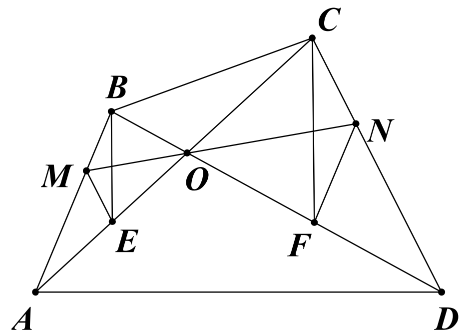
$\dfrac{MK}{KC}=\dfrac{AK}{KD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AI}{IE}=\dfrac{AK}{KD}$.

Do đó $KI//DE$, hay $KB//DE$ (theo định lí Ta-lét đảo).

Bài 20.

Gọi giao điểm của AC và BD là O.



Từ giả thiết $ME//CD$ và $NF//AB$ suy ra $ME//CN$, $NF//BM$.

ΔOCN có $ME//CN$ nên theo hệ quả của định lí Ta-let ta có: $\dfrac{EO}{OC} = \dfrac{MO}{ON}$

ΔOBM có $NF//BM$ nên theo định lí Ta-let ta có: $\dfrac{BO}{OF} = \dfrac{MO}{ON}$

Do đó $\dfrac{EO}{OC} = \dfrac{BO}{OF}$

Suy ra $BE//CF$ (theo định lí Ta-let đảo).

BÀI 16. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

VD 1.1.

a) ΔABC có $MA = MB$ và $NA = NC$ nên MN là đường trung bình của ΔABC.

Do đó $MN = \frac{1}{2}BC$ hay $12,5 = \frac{1}{2}x$.

Vậy $x = 12,5.2 = 25cm.$

b) Ta có $BA \perp AC$ và $DE \perp AC$ nên $DE//AB$ (từ vuông góc đến song song).

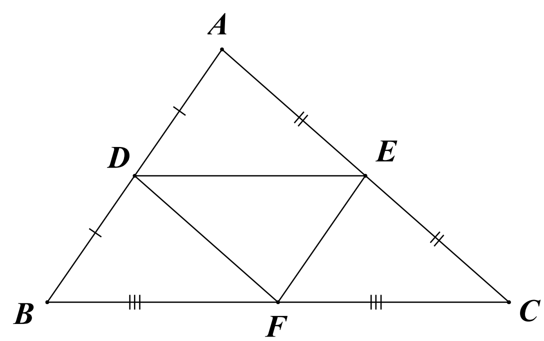
ΔABC có D là trung điểm của BC và $DE//AB$ nên E là trung điểm của AC.

Do đó DE là đường trung bình của ΔABC.

Suy ra $DE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.15 = 7,5$

Vậy $x = 7,5cm.$

VD 1.2. ΔABC có D, E, F lần lượt trung điểm các cạnh AB, BC, CA nên DE, EF và DF là các đường trung bình của ΔABC.



Do đó $DE = \frac{1}{2}BC, EF = \frac{1}{2}AB, DF = \frac{1}{2}AC.$

Suy ra $DE + EF + DF = \frac{1}{2}(BC + AB + AC)$

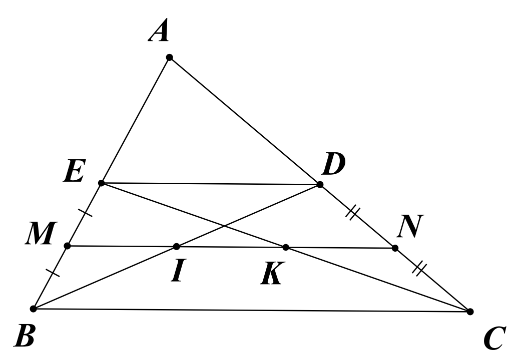
Do chu vi ΔDEF là $16cm$ nên $DE + EF + DF = 16$

Suy ra $BC + AB + AC = 16.2 = 32$

Vậy chu vi ΔABC

VD 2.1.

Xét ΔBED có $ME = BM$ và $MI \parallel ED$ nên $ID = IB$.



Do đó MI là đường trung bình của ΔBED

Suy ra $MI = \frac{1}{2}ED$ $\qquad (1)$

Xét ΔCED có $NC = ND$ và $NK \parallel ED$ nên $KE = KC$.

Do đó NK là đường trung bình của ΔCED

Suy ra $NK = \frac{1}{2}ED$

ΔABC có BD và CE là trung tuyến nên D là trung điểm của AC và E là trung điểm của AB.

Do đó ED là đường trung bình của ΔABC

Suy ra $ED = \frac{1}{2}BC$ $\quad (2)$

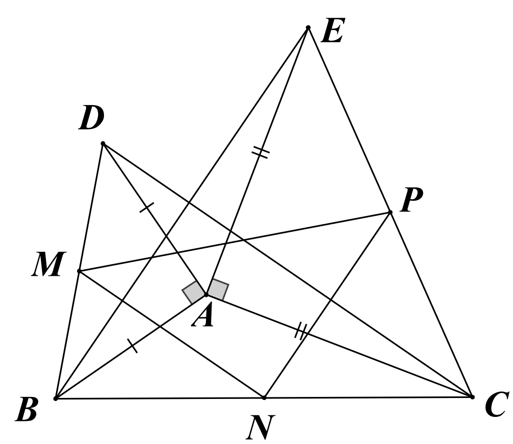
ΔEBC có $ME = MB$ và $MK // BC$ nên $KE = KC$. Do đó MK là đường trung bình của ΔEBC.

Suy ra $MK = \frac{1}{2}BC$

Ta có $IK = MK - MI = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}DE = DE - \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}DE$. $\quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $MI = IK = KN$.

VD 2.2. Do ΔABD và ΔACE vuông cân tại A nên $AB = AD$ và $AC = AE$.



Có $\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^\circ$ nên $\widehat{BAD} + \widehat{DAE} = \widehat{CAE} + \widehat{DAE}$ hay $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$.

Xét ΔABE và ΔADC có: $AB = AD$, $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ và $AE = AC$ nên $\Delta ABE = \Delta ADC$.

Suy ra $BE = DC$ (hai cạnh tương ứng). $\quad (1)$

Xét ΔBCD có M là trung điểm của BD, N là trung điểm của BC nên MN là đường trung bình.

Suy ra $MN = \frac{1}{2}DC$ $\quad (2)$

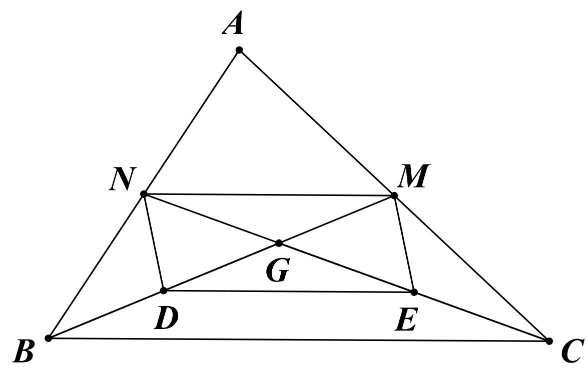
Xét ΔBCE có N là trung điểm của BC và P là rung điểm của CE nên NP là đường trung bình.

Suy ra $NP = \frac{1}{2}BE$ $\quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $MN = NP$.

Do đó ΔMNP cân tại N.

VD 3.1. Xét ΔABC có BM, CN là các đường trung tuyến nên M và N lần lượt là trung điểm của AC và AB.



Do đó MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN \parallel BC$

ΔGBC có D và E lần lượt là trung điểm của GB và GC nên

DE là đường trung bình. Do đó $DE \parallel BC$

.

Suy ra $MN \parallel DE$ $\quad (1)$

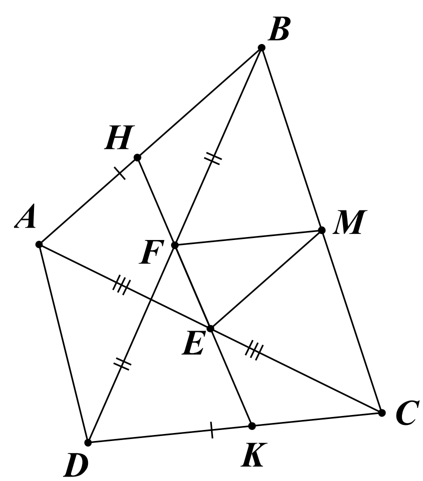
Xét ΔABG có $NA = NB$ và $DG = DB$ nên ND là đường trung bình. Do đó $ND \parallel AG$.

Xét ΔACG có $MA = MC$ và $EG = EC$ nên ta có ME là đường trung bình. Do đó $ME \parallel AG$.

Suy ra $ND \parallel ME$ $\quad (2)$

Tứ giác $MNDE$ có $MN \parallel DE$ và $ND \parallel ME$ nên tứ giác $MNDE$ là hình bình hành.

VD 3.2. Gọi M là trung điểm của BC



ΔABC có E là trung điểm của AC, F là trung điểm của BD nên EM là đường trung bình.

Do đó $EM = \frac{1}{2}AB$ và $EM // AB$.

Suy ra $\widehat{MEF} = \widehat{AHK}$ (hai góc so le trong) (1)

ΔBCD có F là trung điểm của BD, M là trung điểm của BC nên FM là đường trung bình.

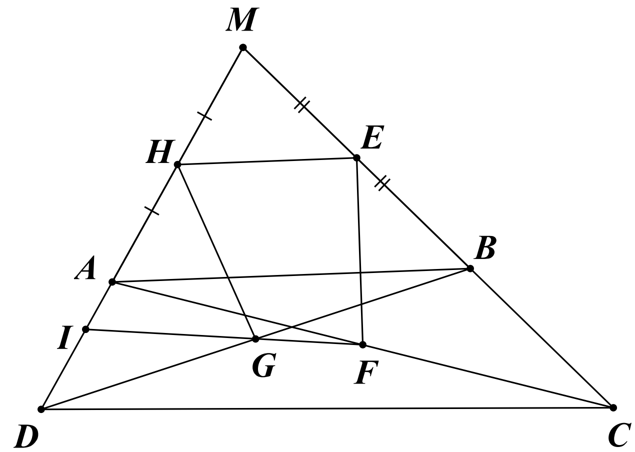
Do đó $FM = \frac{1}{2}CD$ và $FM // DC$

Suy ra $\widehat{EFM} = \widehat{HKD}$ (hai góc so le trong) (2)

Do $EM = \frac{1}{2}AB$, $FM = \frac{1}{2}CD$ và $AB = CD$ nên $EM = FM$. Do đó ΔFME cân tại M.

Suy ra $\widehat{MEF} = \widehat{EFM}$ $\quad (3)$

VD 3.3.



a) Ta có $GI \parallel AB$ và $AB \parallel CD$ nên $GI \parallel CD$.

Xét ΔDAB có G là trung điểm của BD, $GI \parallel AB$ nên I là trung điểm của AD (định lý về đường trung bình)

Xét ΔACD có nên I là trung điểm của AD và F là trung điểm của AC nên FI là đường trung bình của ΔACD

Do đó $\text{IF} \parallel \text{CD}$.

Qua I có $IF \parallel CD, GI \parallel CD$ nên GI trùng IF (theo tiên đề Ơ-clit.

Do đó ba điểm F, G, I thẳng hàng.

b) Do F, G, I thẳng hàng mà $GI // AB$ nên $GF \parallel AB \parallel CD$ (1)

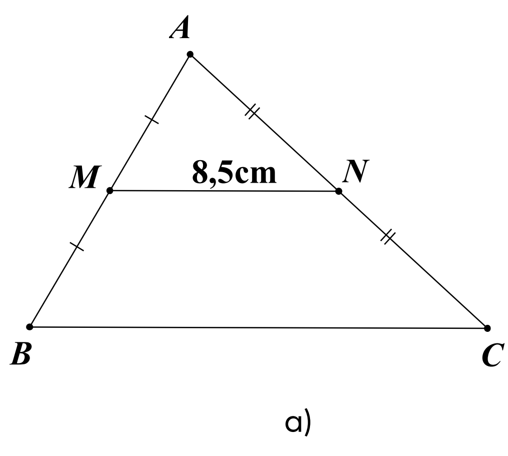
Xét ΔAMB có H là trung điểm của MA, E là trung điểm của MB nên HE là đường trung bình.

Do đó $HE \parallel AB$ (2)

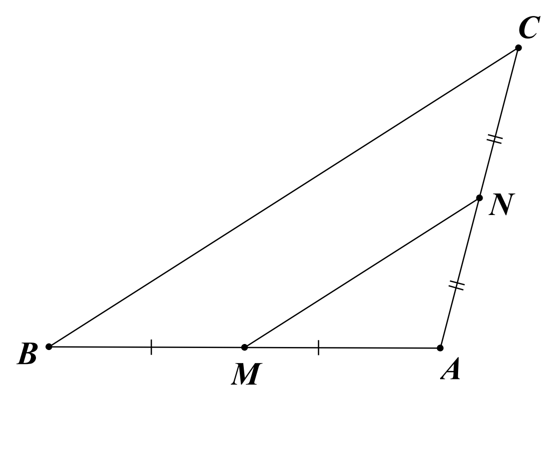
Từ (1) và (2) suy ra $HE \parallel GF$. Do đó tứ giác $HEFG$ là hình thang.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.



a)

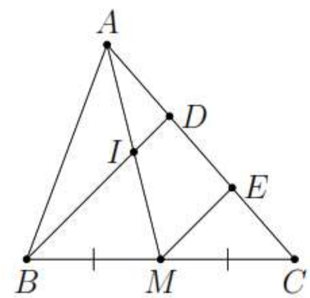


b)

Lời giải

a) Xét tam giác ABC, ta có M là trung điểm của AB; N là trung điểm của AC. Do đó MN là đường trung bình của ΔABC . Suy ra $MN = \frac{1}{2}BC \Rightarrow x = 7(cm)$.	b) Xét tam giác ABC, ta có M là trung điểm của AB; N là trung điểm của AC. Do đó MN là đường trung bình của ΔABC . Suy ra $MN = \frac{1}{2}BC \Rightarrow x = 7,5(cm)$.

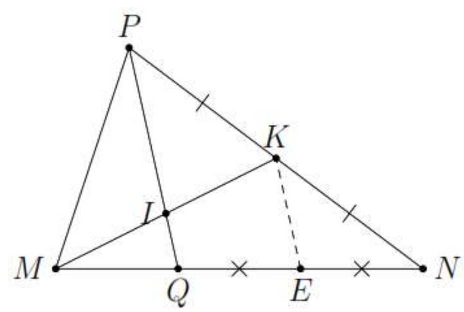
Bài 2.



a) Xét ΔCBD có $EC = ED$ và $MC = MB$ nên ME là đường trung bình của ΔBCD. Do đó $ME \parallel BD$.

b) Xét ΔAEM có $AD = DE$ và $ID \parallel ME$ nên $IA = IM$.

Bài 3.



Gọi E là trung điểm QN, khi đó ta có $NQ = 2EQ$ mà $NQ = 2MQ$ nên $QM = QE$.

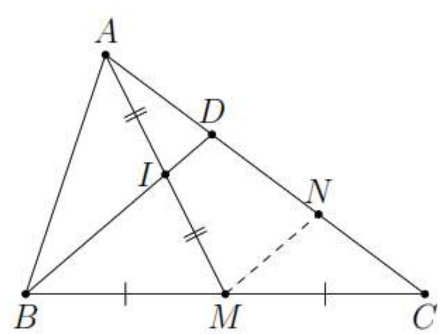
ΔPNQ có K là trung điểm của NP và E là trung điểm của QN nên KE là đường trung bình. Do đó $KE \parallel PQ$.

Suy ra $IQ // KE$.

ΔMKE có $QM = QE$ và $IQ // KE$ nên $IM = IK$.

Vậy I là trung điểm của MK.

Bài 4.



a) Kẻ $MN \parallel BD$, $N \in AC$.

AM là trung tuyến của ΔABC nên M là trung điểm của BC.

ΔBCD có M là trung điểm của BC và $MN // BD$ nên N là trung điểm của DC. Do đó $ND = NC$ (1)

ΔAMN có I là trung điểm của AM và $ID//MN$ nên D là trung điểm của AN. Do đó $ND = DA$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $ND = NC = DA$. Do đó $AD = \frac{1}{2}DC$.

b) ΔAMN có I là trung điểm của AM và D là trung điểm của AN nên ID là đường trung bình.

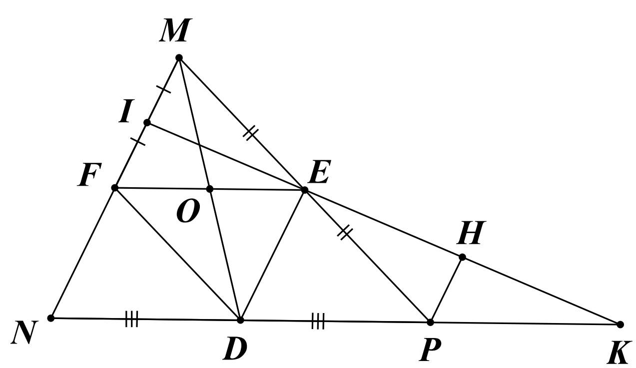
Do đó $ID = \frac{1}{2}MN$ $\quad (3)$

ΔBDC có M là trung điểm của BC và N là trung điểm của DC nên MN là đường trung bình.

Do đó $MN = \frac{1}{2}BD$ $\quad (4)$

Vậy $ID = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}BD = \frac{1}{4}BD$.

Bài 5.



a) ΔMNP có E là trung điểm của MP và F là trung điểm của MN nên EF là đường trung bình. Do đó $EF \parallel NP$ và $EF = \frac{1}{2}NP$.

ΔMDN có F là trung điểm của MN và $FO//ND$ nên O là trung điểm của MD

Do đó FO là đường trung bình của ΔMDN

Suy ra $FO = \frac{1}{2}ND$ $\quad (1)$

Tương tự với ΔMDP có: $EO = \frac{1}{2}PD$ $\quad (2)$

Mà $ND = PD$ $\quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $OE = OF$

Vậy O là trung điểm của EF.

b) ΔMNP có D, E, F lần lượt trung điểm các cạnh NP, MP, MN nên DE, EF và DF là các đường trung bình của ΔABC.

Do đó $DE = \frac{1}{2}MN, EF = \frac{1}{2}NP, DF = \frac{1}{2}MP.$

Suy ra $DE + EF + DF = \frac{1}{2}(MN + MP + NP)$

Do chu vi ΔDEF là $12cm$ nên $DE + EF + DF = 12$

Suy ra $MN + MP + NP = 12.2 = 24$

Vậy chu vi ΔMNP là 24cm.

c) Qua P kẻ đường thẳng song song với MN cắt KI tại H.

Xét ΔMEI và ΔPEH có: $\widehat{IME} = \widehat{EPH}$ (so le trong), $ME = EP$ (gt), $\widehat{MEI} = \widehat{PEH}$ (đối đỉnh)

Nên $\Delta MEI = \Delta PEH$ (g.c.g). Suy ra $PH = IM = \frac{1}{2}MF$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $IM = IF$ nên $PH = IF$.

Xét ΔEIF và ΔKHP có:

$\widehat{FIE} = \widehat{PHK}$ (đồng vị, $PH // MN$),

$IF = PH$ (cmt),

$\widehat{IFE} = \widehat{HPK}$ $(= \widehat{N}$, đồng vị)

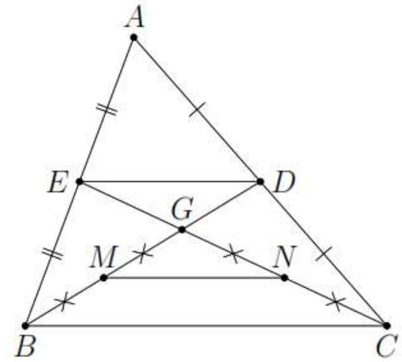
Do đó $\Delta EIF = \Delta KHP$ (g.c.g). Suy ra $FE = PK$ (hai cạnh tương ứng)

Lại có $EF = \frac{1}{2}NP = DP$ (cmt) nên $DP = PK$

Bài 6.

Xét ΔABC *có* các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G nên D là trung điểm của AC, E là trung điểm của AB và G là trọng tâm.

Do đó ED là đường trung bình của ΔABC.



Suy ra $ED \parallel BC$ và $ED = \frac{1}{2}BC$

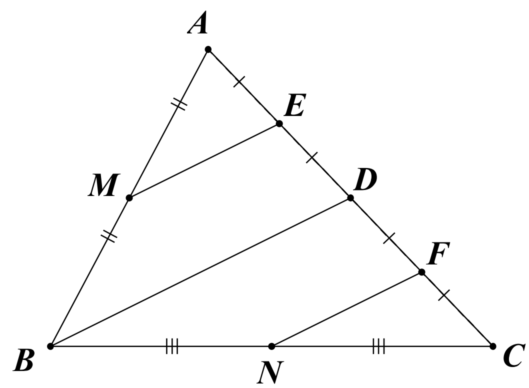
ΔGBC có M là trung điểm của GB, N là trung điểm của GC nên MN là đường trung bình. Do đó

Xét $\triangle GBC$ có $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

Suy ra $ED \parallel MN$ và $ED = MN$

Tứ giác $MNDE$ có $ED \parallel MN$ và $ED = MN$ nên $MNDE$ là hình bình hành.

Bài 7.



Xét $\triangle ABD$ có $\begin{cases} MA = MB \\ EA = ED \end{cases}$ nên ME là đường trung bình.

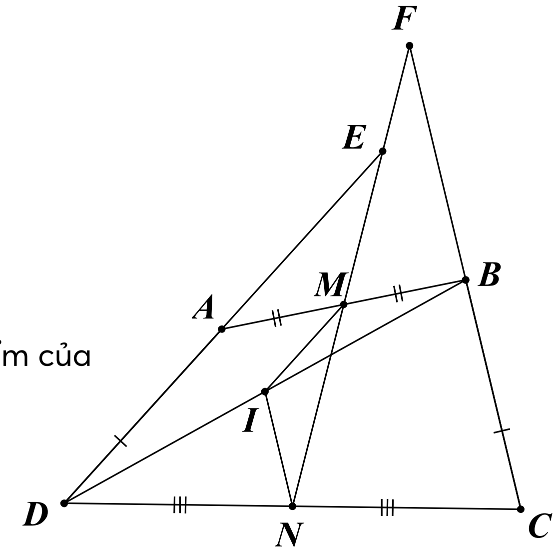
Do đó $\begin{cases} ME \parallel BD \\ ME = \frac{1}{2}BD \end{cases}$ (1)

Xét $\triangle CBD$ có $\begin{cases} NB = NC \\ FC = FD \end{cases}$ nên NF là đường trung bình.

Do đó $\begin{cases} NF \parallel BD \\ NF = \dfrac{1}{2}BD \end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} ME \parallel NF \\ ME = NF \end{cases}$

Bài 8.



Gọi I là trung điểm BD.

ΔABD có M là trung điểm của AB và I là trung điểm của BD nên MI là đường trung bình.

Do đó $MI = \dfrac{1}{2}AD$ và $IM // AD$

ΔBDC có N là trung điểm của DC và I là trung điểm của BD nên NI là đường trung bình.

Do đó $NI = \dfrac{1}{2}BC$ và $IN // BC$

Mà $AD = BC$ nên $MI = NI$.

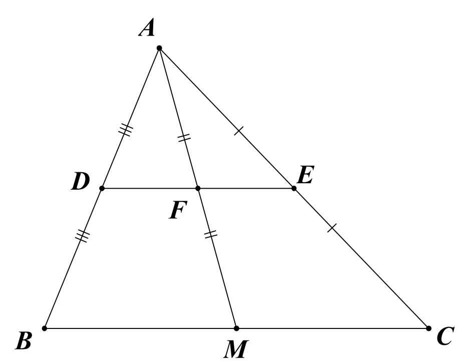
Do đó ΔMNI cân tại N. Suy ra $\widehat{IMN} = \widehat{INM}$

Mặt khác ta có: $\widehat{IMN} = \widehat{AEM}$ (đồng vị và $IN // AD$)

$\widehat{INM} = \widehat{MFB}$ (so le trong và $IN // CF$).

Do vậy: $\widehat{AEM} = \widehat{MFB}$.

Bài 9.



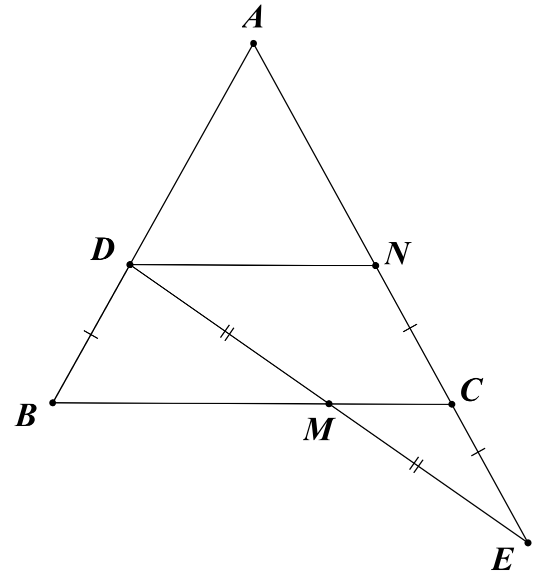
a) Xét $\triangle ABM$ có DF là đường trung bình nên $DF \parallel BM$ hay $DF \parallel BC$. (1)

Xét $\triangle ABC$ có DE là đường trung bình nên $DE \parallel BC$, (2)

Từ (1) và (2) suy ra D, E, F thẳng hàng.

b) Chứng minh $DE = FE$ (bằng $\dfrac{1}{2}$ của hai đoạn thẳng bằng

Bài 10.



Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho: $NC = CE = BD$

Xét ΔEND có: $NC = CE,\ ME = MD$ nên MC là đường trung bình. Do đó $MC \parallel DN$

Do ΔABC cân ở A nên $\widehat{ABC} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2}$ (1) và

$AB = AC$

Mà $BD = NC$ nên $AB - BD = AC - NC$ hay $AD = AN$

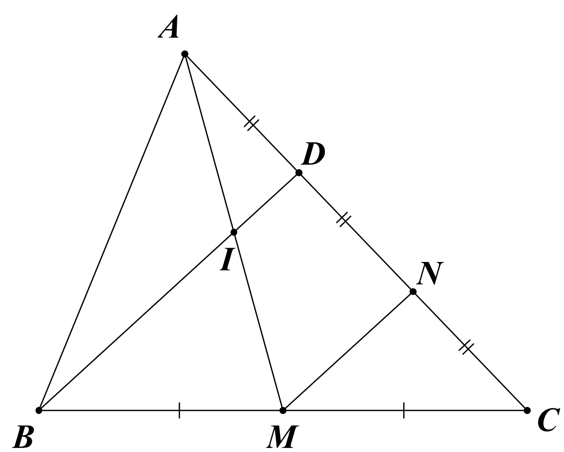
Do đó ΔADN cân tại A. Suy ra $\widehat{ADN} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{ADN} = \widehat{ABC}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $DN \parallel BC$

Qua C ta có $BC // DN$ và $MC // DN$ nên BC trùng MC (theo tiên đề Ơ-clit)

Vậy ba điểm $B,\ M,\ C$ thẳng hàng.

Bài 11.



a) Gọi N là trung điểm của DC

$\Rightarrow ND = NC = \dfrac{1}{2}DC$

Mà $AD = \dfrac{1}{2}DC$ (gt) $\Rightarrow AD = DN = NC$

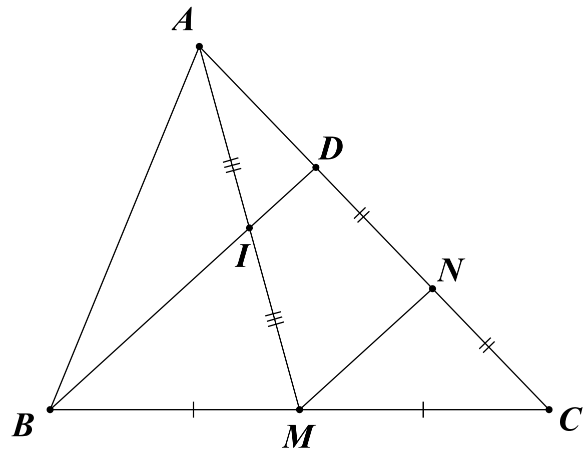
Xét ΔBCD có: $ND = NC, MB = MC$

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình

$\Rightarrow MN \parallel BD, MN = \dfrac{1}{2}BD$ (tính $AD = \dfrac{1}{2}DC$ chất đường trung bình)

Xét ΔANM có $MN \parallel BD$, $AD = DN$ nên $IM = IA$

b) CMTT ý a ta có $MN \parallel BD, MN = \frac{1}{2}BD$



Xét ΔANM có $MN \parallel BD, BD \cap AM = \{I\}$, AI = IM

$\Rightarrow AD = DN$ (đ/ lý 1 về đường TB của tam giác)

Mà $ND = NC = \frac{1}{2}DC \Rightarrow AD = \frac{1}{2}DC$ (đpcm)

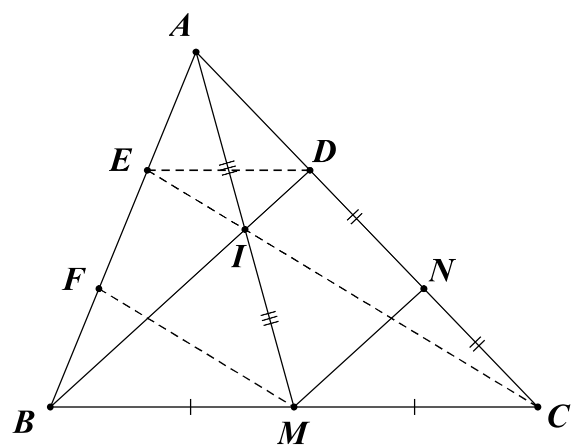
+) Do AI = IM (gt), AD = DN (cmt) $\Rightarrow ID$ là đường trung bình của $\Delta ANM \Rightarrow ID = \frac{1}{2}MN$

Mà $MN = \frac{1}{2}BD$ (cmt) $\Rightarrow ID = \frac{1}{4}BD$ (đpcm)

c) Có $BE + EA = AB \Rightarrow BE + EA = 3AE \Rightarrow BE = 2AE$

Gọi F là trung điểm của BE

$\Rightarrow BF = FE = \frac{1}{2}BE = AE$



Dễ thấy MF là đường trung bình của ΔBCE

$\Rightarrow MF \parallel CE$

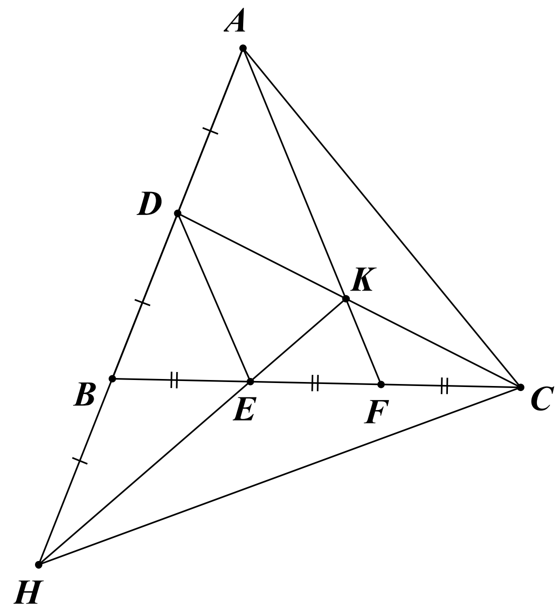
Tương tự với $\Delta FMA \Rightarrow MF \parallel EI$

Qua E ta có $MF \parallel CE$, $MF \parallel EI \Rightarrow$ EI và CE trùng nhau hay C, I, C thẳng hàng.

Mà $BD \cap AM = \{I\}$

Vậy BD, CE, AM đồng quy.

Bài 12. Gọi K là giao điểm của AF và CD.



ΔABF có $BD = DA$ và $EB = EF$ nên DE là đường trung bình. Do đó $DE \parallel AF$ hay $DE \parallel KF$

ΔCDE có $FC = FE$ và $DE \parallel KF$ nên $KC = KD$

ΔCDH có: $KC = KD$ và $BH = BD$ nên HK, CB là các đường đường trung tuyến

Mà $BE = EF = FC$ và $BE + EF + FC = BC$ nên $CE = \dfrac{2}{3}BC$

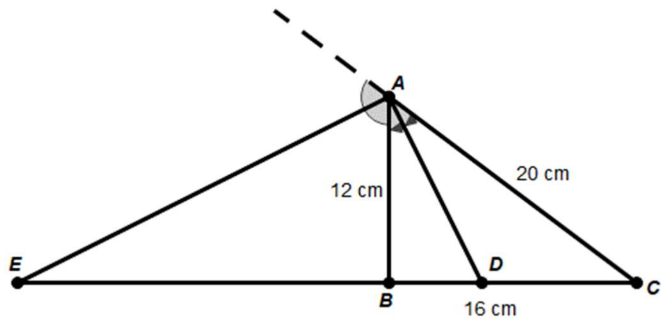
Do đó E là trọng tâm ΔCDH. Suy ra $E \in HK$

Vậy ba đường thẳng AF, CD và HE đồng quy tại K là trung điểm của CD.

BÀI 17. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

VD 1.1

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có:



$\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$ (do AD là phân giác trong góc A).

$\dfrac{EB}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$ (do AE là phân giác ngoài góc A).

$\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{EB}{EC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$.

Ta có: $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\dfrac{DB}{DB+DC}=\dfrac{3}{3+5}\Rightarrow\dfrac{DB}{BC}=\dfrac{3}{8}$.

$\Rightarrow BD=\dfrac{3}{8}.BC=\dfrac{3}{8}.16=6\,\text{cm}$.

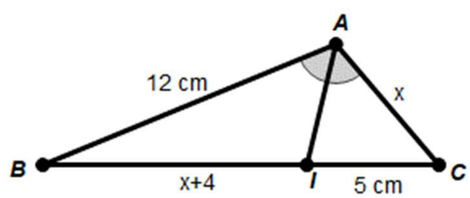
$\Rightarrow DC=BC-BD=16-6=10\,\text{cm}$.

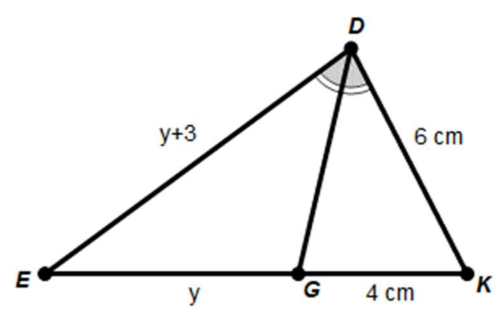
Ta có: $\dfrac{EB}{EC}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\dfrac{EB}{EC-EB}=\dfrac{3}{5-3}\Rightarrow\dfrac{EB}{BC}=\dfrac{3}{2}$.

$\Rightarrow EB=\dfrac{3}{2}BC=\dfrac{3}{2}.16=24\,\text{cm}$.

$\Rightarrow EC=EB+BC=24+16=40\,\text{cm}$.

VD 1. 2.





+ Xét tam giác ABC có AI là đường phân giác trong góc A.

$\Rightarrow\dfrac{IB}{IC}=\dfrac{AB}{AC}\Leftrightarrow\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{12}{x}\Leftrightarrow x\left(x+4\right)=12.5\Leftrightarrow x^2+4x-60=0$

$\Leftrightarrow x^2+10x-6x-60=0$.

$\Leftrightarrow\left(x-6\right)\left(x+10\right)=0\Leftrightarrow x-6=0$ (do $x+10>0$) $\Leftrightarrow x=6\,\text{cm}$.

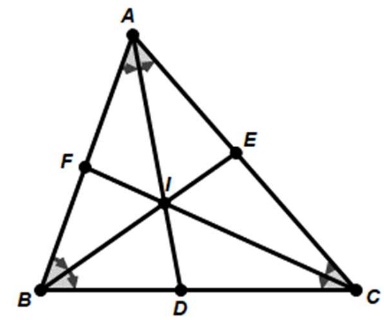
+ Xét ΔDEK có DG là đường phân giác trong góc D.

$\Rightarrow \frac{GE}{GK} = \frac{DE}{DK} \Leftrightarrow \frac{y}{4} = \frac{y+3}{6} \Leftrightarrow 6y = 4(y+3) \Leftrightarrow 2y = 12 \Leftrightarrow y = 6\,\text{cm}$.

VD 2.1.

Do I là giao của ba đường phân giác trong tam giác ABC nên:

+ BI là đường phân giác của $\Delta BAD \Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA}$.



+ CI là đường phân giác của $\Delta CAD \Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{CD}{CA}$.

$\Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$.

$\Rightarrow \frac{ID}{ID+IA} = \frac{BD}{BD+BA} = \frac{CD}{CD+CA}$ (tính chất tỉ lệ thức).

$\Rightarrow \frac{ID}{AD} = \frac{BD+CD}{BD+BA+CD+CA}$ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau).

$\Rightarrow \frac{ID}{AD} = \frac{BC}{BC+BA+CA}$ (điều phải chứng minh). (1)

Chứng minh tương tự câu a, ta được:

$\frac{IE}{BE} = \frac{CA}{BC+BA+CA}$ (2)

$\frac{IF}{CF} = \frac{AB}{BC+BA+CA}$ (3)

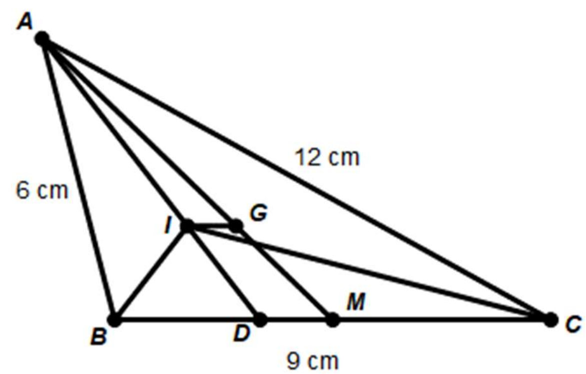
Cộng từng vế (1), (2), (3), ta được:

$\frac{ID}{AD} + \frac{IE}{BE} + \frac{IF}{CF} = \frac{AB+BC+CA}{BC+BA+CA} = 1$ (điều phải chứng minh).

VD 2.2.

a) Gọi D là chân đường phân giác góc A của ΔABC.

Ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ (tính chất đường phân giác).



$\Rightarrow \frac{DB}{DB+DC} = \frac{1}{1+2}$.

$\Leftrightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow DB = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}.9 = 3\text{cm}$.

Ta có BI là phân giác trong góc B của ΔABD.

$\Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{6}{3} = 2$.

$\Rightarrow \frac{IA}{IA+ID} = \frac{2}{2+1} \Leftrightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{2}{3}$.

Gọi $AG \cap BC = \{M\}$. Do G là trọng tâm của ΔABC nên $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$.

Do đó, ta có: $\frac{AG}{AM} = \frac{AI}{AD} = \frac{2}{3}$.

Xét ΔADM có $\frac{AG}{AM} = \frac{AI}{AD} = \frac{2}{3}$, nên theo định lý Ta-let đảo, ta có $IG // DM$ hay $IG // BC$.

Do AM là đường trung tuyến của ΔABC nên M là trung điểm của BC.

$\Rightarrow BM = CM = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2}\text{cm}$.

$\Rightarrow DM = BM - BD = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}\text{cm}$.

Xét ΔADM có $IG // DM$

$\Rightarrow \frac{IG}{DM} = \frac{AI}{AD} = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow IG = \frac{2}{3}.DM = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1\text{cm}$.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

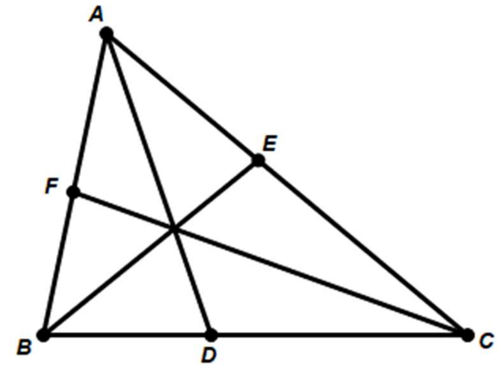
Bài 1.

a) Xét tam giác ABC có AD là đường phân giác trong

$\Rightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5}$.

$\Rightarrow \dfrac{DB + DC}{DC} = \dfrac{4+5}{5} \Leftrightarrow \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{9}{5}$.

$\Leftrightarrow DC = \dfrac{5.BC}{9} = \dfrac{5.18}{9} = 10\,\text{cm}$.



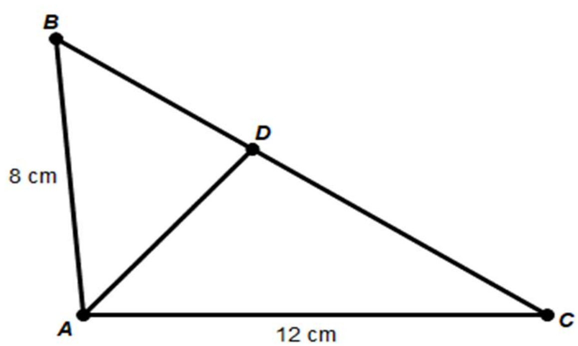
b) Ta có BE là đường phân giác trong góc B của ΔABC.

$\Rightarrow \dfrac{EA}{EC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{4}{7}$.

$\Rightarrow \dfrac{EA + EC}{EC - EA} = \dfrac{4+7}{7-4} \Leftrightarrow \dfrac{AC}{6} = \dfrac{11}{3}$.

$\Leftrightarrow AC = \dfrac{6.11}{3} = 22\,\text{cm}$.

Bài 2.



Xét ΔABC có AD là đường phân giác trong góc A.

Suy ra $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow \dfrac{DB}{2} = \dfrac{DC}{3}$.

Theo giả thiết các cạnh DB, DC có độ dài là các số nguyên nên ta có $\dfrac{DB}{2} = \dfrac{DC}{3} = k$ với $k \in \mathbb{Z}$.

và $BC = BD + DC = 5k$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức tam giác, ta có:

$AC - AB < BC < AC + AB$

$\Leftrightarrow 4 < BC < 20 \Leftrightarrow 4 < 5k < 20 \Leftrightarrow \dfrac{4}{5} < k < 4$.

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên đoạn BC có độ dài lớn nhất khi $k = 3$. Khi đó, $BC = 5k = 5.3 = 15\,\text{cm}$.

Xét ΔABC có AD là đường phân giác trong góc A.

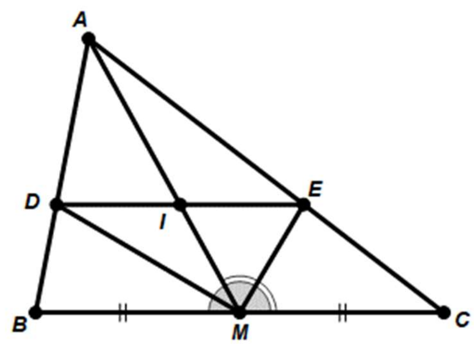
Suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow \frac{DB}{2} = \frac{DC}{3}$.

Theo giả thiết các cạnh DB, DC có độ dài là các số nguyên nên ta có $\frac{DB}{2} = \frac{DC}{3} = k$ với $k \in \mathbb{Z}$.

=

Bài 3.



a) Xét ΔABM có MD là đường phân giác trong góc AMB.

$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{DB}{DA}$.

(1)

Có ME là đường phân giác trong góc AMC của ΔAMC.

$\Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{EC}{EA}$. (2)

Mà $MB = MC$ (do M là trung điểm của BC) nên từ (1), (2) suy ra $\frac{DB}{DA} = \frac{EC}{EA}$.

Xét ΔABC có $\frac{DB}{DA} = \frac{EC}{EA}$ $\Rightarrow DE // BC$ (định lý Ta-let đảo).

b) Áp dụng định lý Ta-let, ta có:

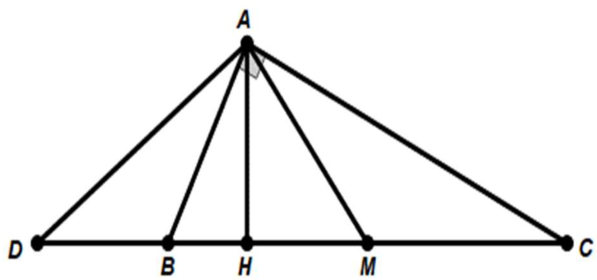
+ ΔABM có $DI // BM$ $\Rightarrow \frac{ID}{BM} = \frac{AI}{AM}$.

+ ΔACM có $IE // CM$ $\Rightarrow \frac{IE}{CM} = \frac{AI}{AM}$.

Do đó, ta có $\Rightarrow \frac{ID}{BM} = \frac{IE}{CM}\left(= \frac{AI}{AM}\right)$. Mà $MB = MC$ nên $ID = IE$.

Vậy, I là trung điểm của đoạn BC.

Bài 4.



a) Ta có AM là trung tuyến của tam giác vuông ΔABC

$\Rightarrow AM = BM = CM = \frac{BC}{2}$.

$\Rightarrow \Delta MAB$ cân đỉnh M và $\widehat{MAB} = \widehat{MBA}$.

Ta có: $\widehat{DAB} + \widehat{BAM} = \widehat{DAM} = 90^\circ$ (do $AD \perp AM$).

$\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ$ (do ΔABH vuông tại H).

$\Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{BAM} = \widehat{BAH} + \widehat{ABH}$.

Mà $\widehat{MAB} = \widehat{MBA}$ (chứng minh trên) hay $\widehat{BAM} = \widehat{ABH}$

$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{BAH}$.

Do đó, AB là tia phân giác của $\widehat{DAH}$.

b) Ta lại có $AC \perp AB$ (giả thiết).

Nên AC là tia phân giác góc ngoài đỉnh A của ΔADH.

Xét ΔADH có:

+ AB là phân giác trong góc DAH.

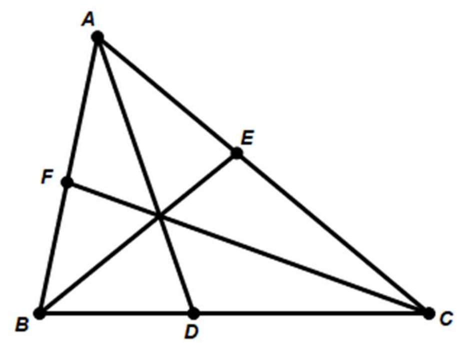
$\Rightarrow \frac{BD}{BH}=\frac{AD}{AH}$ (1).

+ AC là phân giác ngoài góc DAH.

$\Rightarrow \frac{CD}{CH}=\frac{AD}{AH}$ (2).

Từ (1) và (2), ta có: $\frac{BD}{BH}=\frac{CD}{CH}\Rightarrow BH.CD=BD.CH$ (điềuphải chứng minh).

Bài 5.



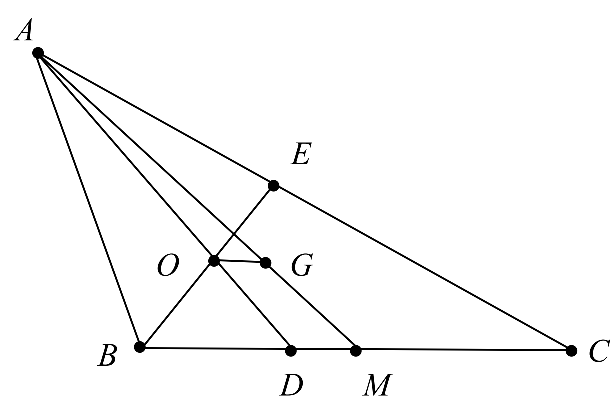
Xét ΔABC có AD, BE, CF là các đường phân giác, theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có

$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC};\frac{BC}{AB}=\frac{EC}{EA};\frac{AC}{BC}=\frac{FA}{FB}$.

Do đó $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{AB}{AC}.\frac{BC}{AB}.\frac{AC}{BC}=1$.

Bài 6.

Xét ΔABC có AD là đường phân giác nên



$$\frac{DB}{AB}=\frac{DC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{AB}=\frac{DB+DC}{AB+AC}.$$

Do đó $\frac{DB}{4}=\frac{6}{4+8}\Rightarrow DB=2cm$.

ΔABD có BO là đường phân giác nên:

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OD}{DB}\Rightarrow \frac{OA}{AD}=\frac{AB}{DB}$$

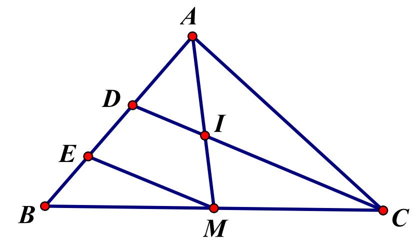
Gọi AM là đường trung tuyến của ΔABC, G là trọng tâm

$\Rightarrow G$ thuộc đoạn thẳng AM và $AG=2GM$.

Do đó $\frac{OA}{OD}=\frac{AG}{GM}$ (= 2). Áp dụng định lý Ta-lét đảo vào ΔADM, ta có $OG \parallel DM$.

Vậy $OG \parallel BC$.

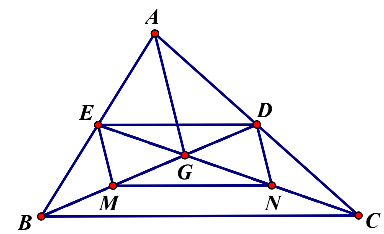
ÔN TẬP CHƯƠNG IV



Bài 1 . Xét ΔBDC có M là trung điểm BC ;E là trung điểm BD nên EM là đường trung bình $\Rightarrow EM//DC \Rightarrow EM//DI$

Xét ΔAEM có D là trung điểm AE ,$DI//EM$ nên DI là đường trung bình . Vậy I là trung điểm AM hay $AI = IM$

Bài 2.



a) Xét ΔABC có ED là đường trung bình nên

$ED//BC; ED = \frac{1}{2}BC$

ΔGBC có MN là đường trung bình nên $MN//BC; MN = \frac{1}{2}BC$

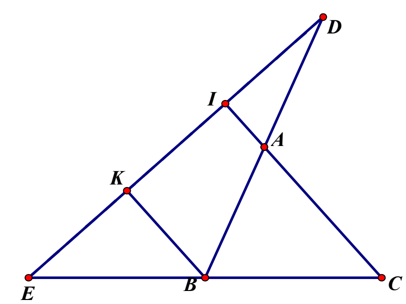
$\Rightarrow ED//MN; ED = MN$

Tương tự ta có $EM//DN//AG; EM = DN = \frac{1}{2}AG$

Vậy tứ giác $MNDE$ có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau thì tứ giác $MNDE$ là hình bình hành.

b) Để $MNDE$ là hình chữ nhật thì $EN = MD$ hay $EC = BD$. Suy ra ΔABC cân tại A.

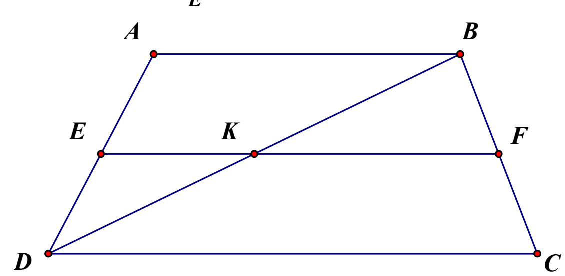
Bài 3.



Gọi K là trung điểm EI lại có B trung điểm EC nên BK là đường trung bình của $\Delta EIC \Rightarrow KB//IC$

ΔDKB có $AB = AD; AI//KB \Rightarrow AI$ là đường trung bình nên I là trung điểm DK $\Rightarrow EK = KI = ID \Rightarrow DI = \frac{DE}{3}$

Bài 4.



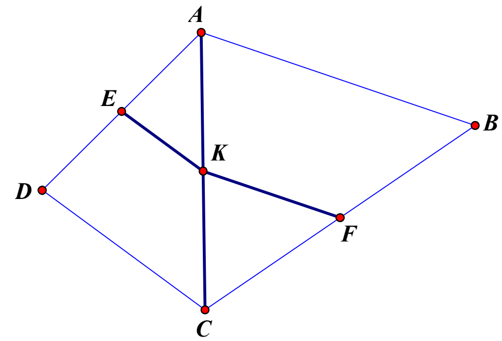
Ta có $KE//AB$ do KE là đường trung bình của tam giác ABD

Ta có $KF//DC$ do KF là đường trung bình của tam giác BDC

Mặt khác AB//CD (theo giả thiết) từ đó suy ra $KF//AB$

Do $KE//AB$ và $KF//AB$ nên K, E, F thẳng hàng (Tiên đề Ơ-clit)

Bài 5.



a) Ta có: E, K lần lượt là trung điểm AD, AC

=> $EK = \frac{1}{2}DC => EK < CD$ (1)

Ta có: K, F lần lượt là trung điểm của AC,BC

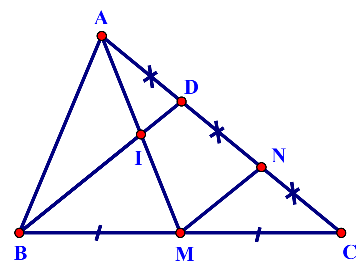
=> $KF = \frac{1}{2}AB => KF < AB$ (2)

b) Ta có: $EK + KF \geq EF$. Từ $(1)(2)$ => $EF \leq \frac{AB+CD}{2}$

c) $EF = \frac{AB+CD}{2} => EF = EK + KF$ => E, K, F thẳng hàng.

Mà ta có: $EK // DC$ và $KF // AB$ => $DC // AB$ => $ABCD$ là hình thang

Bài 6.



a) Gọi N là trung điểm của DC $\Rightarrow ND = NC = \frac{1}{2}DC$

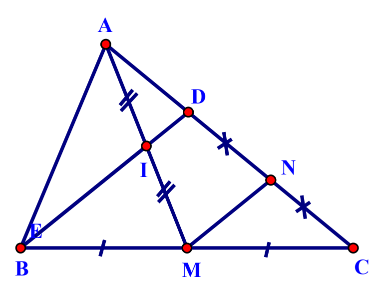
Mà $AD = \frac{1}{2}DC$ (gt) $\Rightarrow AD = DN = NC$

Xét ΔBCD có: $ND = NC, MB = MC$

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình

$\Rightarrow MN \parallel BD, MN = \frac{1}{2}BD$ (tính $AD = \frac{1}{2}DC$ chất đường trung bình)

Xét ΔANM có $MN \parallel BD$, AD = DN, $BD \cap AM = \{I\} \Rightarrow IM = IA$ (đ/ lý 1 về đường TB của tam giác)



b) CMTT ý a ta có $MN \parallel BD, MN = \frac{1}{2}BD$

Xét ΔANM có $MN \parallel BD, BD \cap AM = \{I\}$, AI = IM

$\Rightarrow AD = DN$ (đ/ lý 1 về đường TB của tam giác)

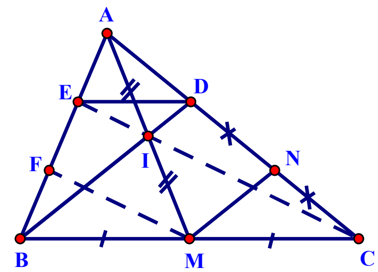
Mà $ND = NC = \frac{1}{2}DC \Rightarrow AD = \frac{1}{2}DC$ (đpcm)

+) Do AI = IM (gt), AD = DN (cmt) $\Rightarrow ID$ là đường trung bình của ΔANM

$\Rightarrow ID = \frac{1}{2}MN$

Mà $MN = \frac{1}{2}BD$ (cmt) $\Rightarrow ID = \frac{1}{4}BD$ (đpcm)

c) Có $BE + EA = AB \Rightarrow BE + EA = 3AE \Rightarrow BE = 2AE$



Gọi F là trung điểm của BE $\Rightarrow BF = FE = \frac{1}{2}BE = AE$

Dễ thấy MF là đường trung bình của ΔBCE

$\Rightarrow MF \parallel CE$

Tương tự với $\Delta FMA \Rightarrow MF \parallel EI$

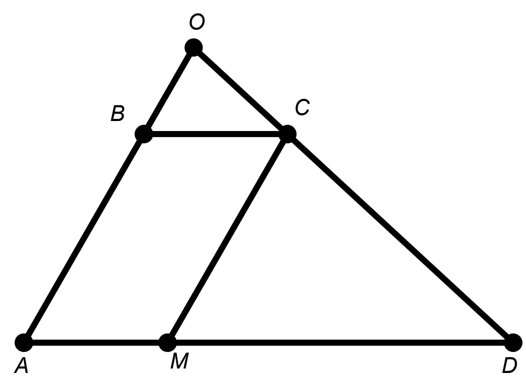
Qua E ta có $MF \parallel CE$, $MF \parallel EI \Rightarrow$ EI và CE trùng nhau hay C, I, C thẳng hàng.

Mà $BD \cap AM = \{I\}$

Vậy BD, CE, AM đồng quy.

Bài 7.

a) Xét ΔOBC, ta có:



$BC // AD$ (gt)

$\Rightarrow \frac{OB}{BA} = \frac{OC}{CD}$ (ĐL Ta-let)

b) Ta có $\frac{OB}{BA} = \frac{OC}{CD}$ (cmt)

$\Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{3}{CD}$

$\Rightarrow CD = 9cm$

Ta có : $OD = OC + CD = 3 + 9 = 12cm$.

c) Xét tứ giác $ABCM$, ta có:

$BC // AM$ (gt)

$AB // CM$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABCM$ là hình bình hành vì có 2 cặp cạnh đối song song.

$\Rightarrow AM = BC = 4cm$

Xét ΔOBC, ta có:

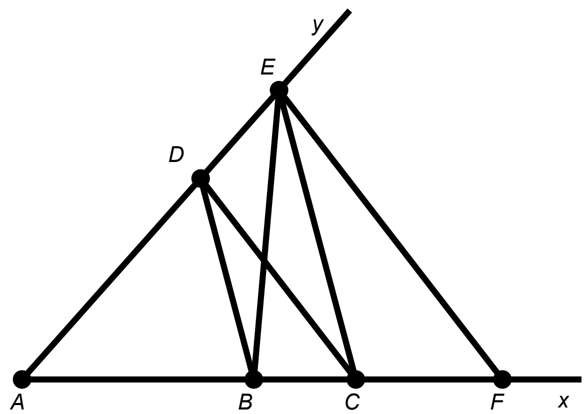
$CM // OA$ (gt)

$\Rightarrow \frac{DM}{MA} = \frac{DC}{CO}$ (ĐL Ta-let)

$\Rightarrow \frac{DM}{4} = \frac{9}{3}$

$\Rightarrow DM = 12cm.$

Bài 8.



a) Xét ΔADC, ta có:

$BD // CE$ (gt)

$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ (ĐL Ta-let) (1)

b) Xét ΔAEF, ta có:

$DC // EF$ (gt)

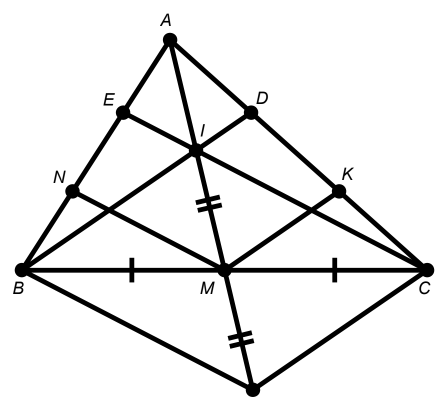
$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AF}$ (ĐL Ta-let) (2)

c) Từ (1) và (2) suy ra :

$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AF}\left(= \frac{AD}{AE}\right)$

$\Rightarrow AC^2 = AB.AF$

Bài 9.



a) Chứng minh: $\frac{CK}{DK} = \frac{EN}{NB}$.

Xét ΔCBD, ta có:

$MK // BD$ (gt)

$\Rightarrow \frac{CK}{DK} = \frac{CM}{BM}$ (ĐL Ta-let) (1)

Xét ΔCBE, ta có: $MN // CE$ (gt)

$\Rightarrow \frac{EN}{NB} = \frac{CM}{BM}$ (ĐL Ta-let) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{CK}{DK} = \frac{EN}{NB}\left(= \frac{CM}{BM}\right)$.

b) Chứng minh: $\frac{DK}{DC}+\frac{EN}{EB}=1$.

Xét ΔCBD, ta có: $MK // BD$ (gt)

$\Rightarrow \frac{DK}{DC}=\frac{BM}{BC}$ (ĐL Ta-let) (1)

Xét ΔCBE, ta có: $MN // CE$ (gt)

$\Rightarrow \frac{EN}{EB}=\frac{CM}{CB}$ (ĐL Ta-let) (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được :

$$\frac{DK}{DC}+\frac{EN}{EB}=\frac{BM}{BC}+\frac{CM}{CB}=\frac{BM+CM}{CB}=\frac{BC}{BC}=1.$$

c) Chứng minh: $\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$.

Dựng điểm N đối xứng với I qua M.

Xét tứ giác $BICN$, ta có:

M là trung điểm của BC (gt)

M là trung điểm của IN (gt)

$\Rightarrow$ tứ giác $BICN$ là hình bình hành vì có 2 đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường $\Rightarrow \begin{cases} CI // BN \\ BI // CN \end{cases}$

Xét ΔABN, ta có: $IE // BN$ (gt)

$\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AI}{AN}$ (ĐL Ta-let) (3)

Xét ΔACN, ta có: $ID // CN$ (gt)

$\Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{AI}{AN}$ (ĐL Ta-let) (4)

Từ (3) và (4) suy ra : $\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}\left(=\frac{AI}{AN}\right)$.

Bài 10.

a) Vì AD là đường phân giác trong tam giác ABC nên ta có:

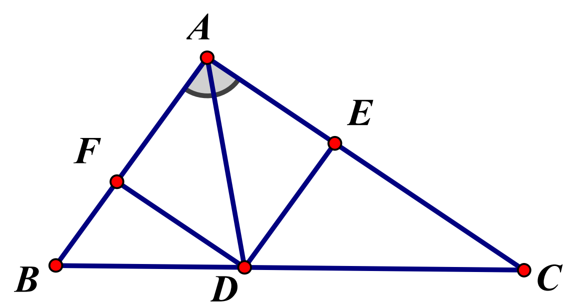
$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{DB}{2}=\frac{DC}{3}$$

Mà DB + DC = 50

Áp dụng tính chất của dãy các tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{DB}{2}=\frac{DC}{3}=\frac{DB+DC}{2+3}=\frac{50}{5}=10$$

$DB=20cm; DC=30cm$



b) Ta có AEDF là hình thoi và $\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{BC}\Rightarrow\frac{DE}{30}=\frac{30}{50}\Rightarrow DE=18cm$

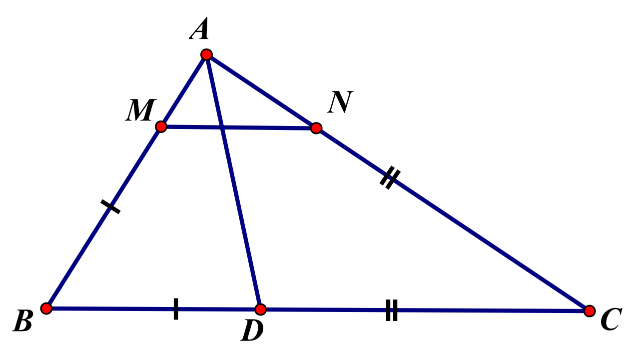
Vậy cạnh của hình thoi là 18cm.

Bài 11.

Vì AD là tia phân giác nên ta có

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{CA}\Rightarrow\frac{BM}{CN}=\frac{BA}{CA}\Rightarrow MN//BC$$

(theo định lí Talet đảo)



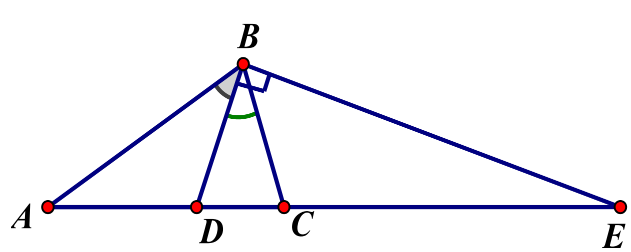
Bài 12.

a) Ta có BD là đường phân giác trong ΔABC

nên $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{AD}{AD+CD}=\frac{AB}{AB+BC}$

$$\Rightarrow\frac{AD}{15}=\frac{15}{15+10}\Rightarrow AD=9cm, CD=6cm$$

b) Ta có $BE\perp BD\Rightarrow BE$ là đường phân giác ngoài tại B.

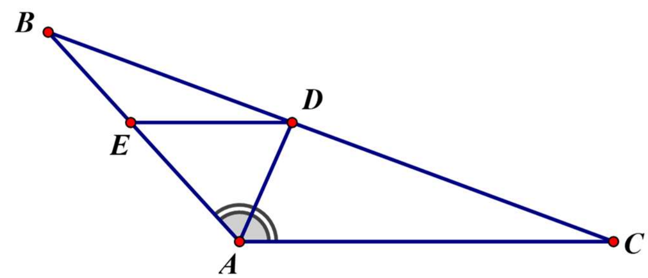


Khi đó ta có:

$$\frac{EC}{EA}=\frac{BC}{BA}\Rightarrow\frac{EC}{EC+AC}=\frac{BC}{BA}$$

$$\frac{EC}{EC+15}=\frac{10}{15}\Rightarrow EC=30cm$$

Bài 13.



Kẻ $DE//AC$ ta có $\frac{DE}{AC}=\frac{BE}{AB}$

Mà ΔDEA đều (tam giác có 3 góc đều bằng 60^0)

$\Rightarrow DE=AE=AD$

$$\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AB-AE}{AB}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=1-\frac{AD}{AB}$$

$$\Rightarrow AD\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right)=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}$$

CHƯƠNG 5

BÀI 18. THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

VD 1.1.

a) Dữ liệu về dân số Việt Nam trong 10 năm trở lại đây: Thu thập gián tiếp thông qua việc sử dụng Internet để tìm thông tin

b) Dữ liệu về sự thay đổi cân nặng của bản thân trong 30 ngày liên tiếp: Thu thập trực tiếp bằng việc ghi chép lại thông tin qua từng ngày.

c) Dữ liệu về mục tiêu trong năm học này của các bạn lớp mình: Thu thập thông tin trực tiếp thông qua phiếu khảo sát gửi tới các bạn.

d) Dữ liệu về chỉ số GDP Việt Nam trong 8 quý gần đây: Thu thập gián tiếp thông qua việc sử dụng Internet để tìm thông tin.

VD 1.2.

a) Hoàng đo đạc chiều cao của từng bạn trong lớp: Trực tiếp.

b) Hoàng sử dụng google tìm kiếm xếp hạng FIFA của bóng đá nam Việt Nam từ năm 2017 tới nay: Gián tiếp.

c) Hoàng tra cứu giá đồng tiền Bitcoin tại các mốc tháng 8 hàng năm tính từ lúc Bitcoin bắt đầu xuất hiện: Gián tiếp.

d) Hoàng bấm giờ và ghi lại thời gian các bạn lớp mình hoàn thành một vòng bơi 100m: Trực tiếp.

VD 1.3.

a) Tên 10 đồng tiền có mệnh giá lớn nhất thế giới: Tra cứu trên Internet.

b) Loại vật nuôi mà các bạn trong lớp đang có: Làm khảo sát thông tin.

c) Nhiệt độ ngoài trời trong ngày hôm nay qua từng giờ: Đo đạc và ghi chép lại số liệu nhiệt độ.

d) Top 10 quốc gia có trữ lượng dầu lớn nhất thế giới: Tra cứu trên Internet.

VD 1.4. Học sinh thực hành.

VD 2.1.

1. Cân nặng (kg): 51; 55,5; 63; 48,2; 50; 71,1; 49,8; 39.