# CHƯƠNG III. TỨ GIÁC

## BÀI 10. TỨ GIÁC

I. KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Mô tả khái niệm tứ giác, tứ giác lồi.
- Giải thích định lí về tổng các góc trong một tứ giác lồi.

II. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. TỨ GIÁC LỒI

**Tứ giác lồi và các yếu tố của nó**

- Tứ giác $ABCD$ là hình gồm bốn đoạn thẳng $AB, BC, CD, DA$ trong đó không có hai đoạn thẳng nào nằm trên cùng một đường thẳng.
- Trong tứ giác $ABCD$, các điểm $A, B, C, D$ là các đỉnh; các đoạn thẳng $AB, BC, CD, DA$ là các cạnh.
- Tứ giác lồi là tứ giác mà hai đỉnh thuộc một cạnh bất kì luôn nằm về một phía của đường thẳng đia qua hai đỉnh còn lại.
- Trong tứ giác lồi $ABCD$, các góc $ABC, BCD, CDA$ và $DAB$ gọi là các góc của tứ giác. Kí hiệu đơn giản lần lượt là $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{A}$

**Chú ý**

- Từ nay, khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.
- Tứ giác $ABCD$ còn gọi tên là từ giác $BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD, BADC$

2. TỔNG CÁC GÓC CỦA MỘT TỨ GIÁC

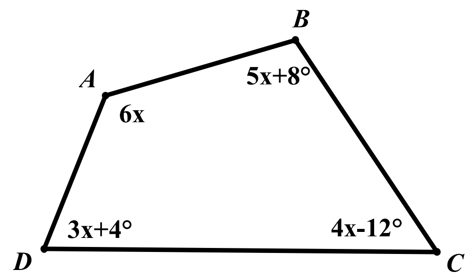
**Định lý:** Tổng các góc của một tứ giác bằng $360^0$.

III. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 1: Tính góc của tứ giác**

*Phương pháp giải:* Sử dụng tính chất của tổng các góc của tứ giác, của tam giác.

**VD 1.1.** Cho hình vẽ sau:




a) Tính các góc của tứ giác $ABCD$.

b) Góc kề bù với một góc của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác. Tính số đo bốn góc ngoài tại bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$.

c) Tính tổng số đo bốn góc ngoài tại bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$.

**Lời giải**

a) Ta có : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$ ( tổng 4 góc trong tứ giác ).

Thay số có:

$$6x+5x+8^\circ+4x-12^\circ+3x+4^\circ=360^\circ$$
$$18x=360^\circ.$$
$$x=20^\circ$$

Ta có $\widehat{A}=6x=120^\circ$.

$\widehat{B}=5x+8^\circ=108^\circ$.

$\widehat{C}=4x-12^\circ=68^\circ$.

$\widehat{D}=3x+4^\circ=64^\circ$.

b) Gọi 4 góc ngoài của các góc $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C},\widehat{D}$ lần lượt là $\widehat{A_1},\widehat{B_1},\widehat{C_1},\widehat{D_1}$.

Ta có :

$\widehat{A_1}=180^\circ-\widehat{A}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

$\widehat{B_1}=180-\widehat{B}=180^\circ-108^\circ=72^\circ$.

$\widehat{C_1}=180-\widehat{C}=180^\circ-68^\circ=112^\circ$.

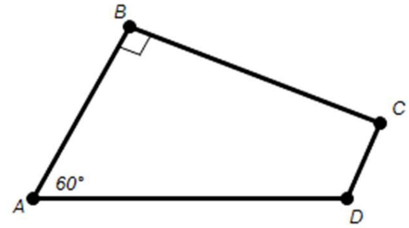
$\widehat{D_1}=180-\widehat{D}=180^\circ-64^\circ=116^\circ$.

c) Có $\widehat{A_1}+\widehat{B_1}+\widehat{C_1}+\widehat{D_1}=60^0+72^0+112^0+116^0=360^0$

***Nhận xét:*** Tổng bốn góc ngoài của tứ giác bằng $360^0$

**VD 1.2.**

a) Xét tứ giác ABCD, có:




$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$

$\Rightarrow \widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)=360^\circ-\left(60^\circ+90^\circ\right)=210^\circ(1)$

Mặt khác: $\widehat{C}-\widehat{D}=20^0$ (2)

Từ (1) và (2) , suy ra: $\widehat{C}=115^0;\widehat{D}=115^0-20^0=95^0$

b) Xét tứ giác ABCD, có: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$

$\Rightarrow \widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)=360^\circ-\left(60^\circ+90^\circ\right)=210^\circ(3)$

Mặt khác: $\widehat{C}=\dfrac{3}{4}\widehat{D}$ (4)

Từ (3) và (4) , suy ra: $\dfrac{7}{4}\widehat{D}=210^\circ \Rightarrow \widehat{D}=120^\circ;\widehat{C}=90^\circ$

**VD 1.3.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B}=60^0$, $\widehat{C}=120^0,\widehat{D}=80^0$.

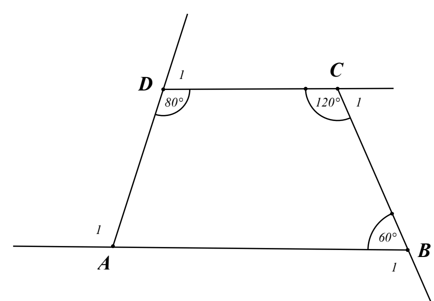
a) Tính số đo góc $A$.

b) Tính tổng các góc ngoài của tứ giác.

c) Chứng minh rằng các góc của tứ giác không thể đều là góc nhọn, không thể đều là góc tù.

**Hướng dẫn giải**

a) Tính số đo góc $A$.




Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^0$.

$\Rightarrow \widehat{A}+60^0+80^0+120^0=360^0 \Rightarrow \widehat{A}=100^0$.

b) Tính tổng các góc ngoài của tứ giác.

Xét tứ giác $ABCD$, Gọi các góc ngoài tại các đỉnh $A,B,C,D$ lần lượt là: $\widehat{A_1},\widehat{B_1},\widehat{C_1},\widehat{D_1}$.

Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^0$.

Mặt khác $\widehat{A}+\widehat{A}_1=180^0$ ,$\widehat{B}+\widehat{B}_1=180^0;\widehat{C}+\widehat{C}_1=180^0$;$\widehat{D}+\widehat{D}_1=180^0$ (hai góc kề bù).

Do đó $\widehat{A}+\widehat{A}_1+\widehat{B}+\widehat{B_1}+\widehat{C}+\widehat{C}_1+\widehat{D}+\widehat{D}_1=180^0+180^0+180^0+180^0=720^0$

$\Rightarrow \widehat{A}_1+\widehat{B}_1+\widehat{C}_1+\widehat{D}_1=360^0$.

c) Chứng minh rằng các góc của tứ giác không thể đều là góc nhọn, không thể đều là góc tù.

Giả sử bốn góc của một tứ giác đều là góc nhọn thì tổng bốn góc của tứ giác nhỏ hơn $360^0$, điều này vô lí vì tổng các góc của tứ giác bằng $360^0$.

Vậy bốn góc của tứ giác không thể đều là góc nhọn.

**VD 1.4.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}:\widehat{B}:\widehat{C}:\widehat{D}=6:5:4:3$. Tính các góc của tứ giác $ABCD$.

**Hướng dẫn giải**

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^0.$

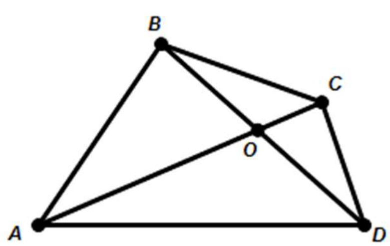
Mà $\widehat{A}:\widehat{B}:\widehat{C}:\widehat{D}=6:5:4:3$, do đó $\dfrac{\widehat{A}}{6}=\dfrac{\widehat{B}}{5}=\dfrac{\widehat{C}}{4}=\dfrac{\widehat{D}}{3}=\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}}{6+5+4+3}=\dfrac{360^0}{18}=20^0.$

- ✓ $\dfrac{\widehat{A}}{6}=20^0\Rightarrow\widehat{A}=120^0.$
- ✓ $\dfrac{\widehat{B}}{5}=20^0\Rightarrow\widehat{B}=100^0.$
- ✓ $\dfrac{\widehat{C}}{4}=20^0\Rightarrow\widehat{C}=80^0.$
- ✓ $\dfrac{\widehat{D}}{3}=20^0\Rightarrow\widehat{D}=60^0.$

**Dạng 2: Tính độ dài và hệ thức giữa các độ dài.**

***Phương pháp:*** Sử dụng định lí liên quan đến độ dài: như bất đẳng thức tam giác.

**VD 2.1.** Tứ giác $ABCD$ có đường chéo $AC$ và cạnh $AD$ có độ dài bằng nhau. Chứng minh rằng: $BC<BD$




Kẻ $AC$ cắt $BD$ tại $O$.

Ta có: $AC+BD=\left(OA+OD\right)+\left(OB+OC\right)$.

$OA+OD>AD$ (bất đẳng thức tam giác $AOD$).

$OB+OC>BC$ (bất đẳng thức tam giác $BOC$).

$\Rightarrow AC+BD>AD+BC$.

Mà $AC = AD$ (giả thiết)

Nên $BC < BD$.

Vậy nếu tứ giác $ABCD$ có đường chéo $AC$ và cạnh $AD$ có độ dài bằng nhau thì $BC < BD$.

**VD 2.2.** Chứng minh rằng tổng độ dài hai đường chéo của tứ giác:

a) Lớn hơn tổng độ dài hai cạnh đối nhau.

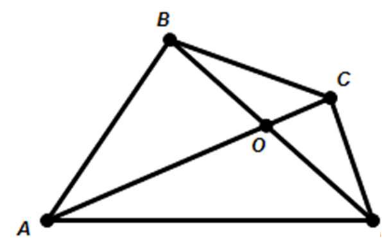
b) Lớn hơn nửa chu vi tứ giác.

c) Nhỏ hơn chu vi tứ giác.

- **Lời giải**

Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$ .

a)




Có: $AC + BD = AO + OC + OB + OD$

$= \left(OA + OD\right) + \left(OB + OC\right) > AD + BC$

$= \left(OA + OB\right) + \left(OC + OD\right) > AB + CD$

Vậy tổng độ dài hai đường chéo của một tứ giác lớn hơn tổng độ dài hai cạnh đối của tứ giác đó

b) Có: $AC + BD = AO + OC + OB + OD = \left(OA + OD\right) + \left(OB + OC\right) > AD + BC$

$AC + BD = AO + OC + OB + OD = \left(OA + OB\right) + \left(OC + OD\right) > AB + CD$

$\Rightarrow 2\left(AC + BD\right) > AD + BC + CD + DA \Rightarrow AC + BD > \dfrac{AD + BC + CD + DA}{2}$

Vậy tổng độ dài hai đường chéo của một tứ giác lớn hơn nửa chu vi của tứ giác đó

c) Trong $\Delta ABC$ và $\Delta ADC$ có:

$$\left.\begin{array}{l} AC < AB + AC \\ AC < AD + DC \end{array}\right\} \Rightarrow 2AC < AB + BC + CD + DA$$

Trong $\Delta ABD$ và $\Delta BCD$ có:

$$\left.\begin{array}{l} BD < AB + AD \\ BD < BC + CD \end{array}\right\} \Rightarrow 2BD < AB + BC + CD + DA$$

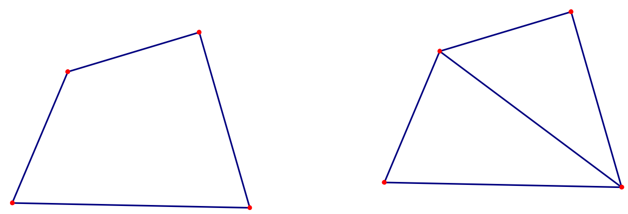
$\Rightarrow 2(AC+BD) < 2(AB+BC+CD+DA) \Rightarrow AC+BD < AB+BC+CD+DA$

Vậy tổng độ dài hai đường chéo của một tứ giác nhỏ hơn chu vi của tứ giác đó.

**Dạng 3. Toán thực tế.**

***Phương pháp :*** Sử dụng định nghĩa, tính chất tứ giác.

**VD 3.** Vì sao một tứ giác gồm bốn thanh gỗ khớp vít ở đầu (hình a) lại dễ biến dạng, còn nếu đặt thêm một thanh gỗ nữa bắt chéo (hình b) thì tứ giác có dạng cố định?



*Hình a* *Hình b*

**Hướng dẫn giải**

Muốn xác định một tứ giác, cần biết năm yếu tố của nó. Biết độ dài bốn cạnh, chưa xác định được tứ giác. Nếu biết thêm độ dài một đường chéo thì tứ giác được xác định.

## IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1.**

Xét tứ giác $ABCD$, có: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$ (định lý tổng 4 góc trong tứ giác).

Suy ra $120^\circ+90^\circ+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$

Vì $\widehat{C}=2\widehat{D}$.

Nên $3\widehat{D}=360^\circ-120^\circ-90^\circ$

Suy ra $\widehat{D}=50^\circ$, $\widehat{C}=100^\circ$.

**Bài 2.**

Xét tứ giác $ABCD$, có: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$ (định lý tổng 4 góc trong tứ giác).

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{\widehat{A}-1^\circ}{4}=\frac{\widehat{B}-2^\circ}{3}=\frac{\widehat{C}-3^\circ}{2}=\frac{\widehat{D}-4^\circ}{1}=\frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}-10^\circ}{4+3+2+1}=\frac{360^\circ-10^\circ}{10}=35^\circ$$

Suy ra $\begin{cases} \widehat{A} = 4.35^\circ + 1^\circ = 141^\circ \\ \widehat{B} = 3.35^\circ + 2^\circ = 107^\circ \\ \widehat{C} = 2.35^\circ + 3^\circ = 73^\circ \\ \widehat{D} = 1.35^\circ + 4^\circ = 39^\circ \end{cases}$.

**Bài 3.**

Xét tứ giác $ABCD$, có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$ (định lý tổng 4 góc trong tứ giác).

Vì $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ suy ra $3\widehat{A} + 120^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{360^\circ - 120^\circ}{3} = 80^\circ$

Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 80^\circ$.

**Bài 4.**

Hình a)

Áp dụng định lý tổng 4 góc trong tứ giác: $60^\circ + 110^\circ + 120^\circ + 2x = 360^\circ$

Suy ra $2x = 360^\circ - \left(60^\circ + 110^\circ + 120^\circ\right) \Leftrightarrow x = 35^\circ$

Áp dụng đính lý tổng 3 góc trong tam giác: $60^\circ + x + y = 180^\circ$

Thay $x = 35^\circ$ ta được $60^\circ + 35^\circ + y = 180^\circ$ suy ra $y = 180^\circ - \left(60^\circ + 35^\circ\right) = 85^\circ$.

Vậy $x = 35^\circ, y = 85^\circ$.

Hình b)

Áp dụng định lý tổng 4 góc trong tứ giác: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$

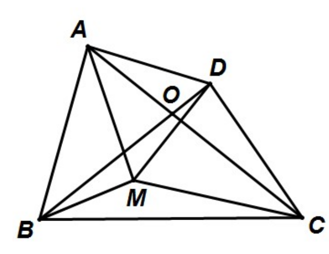
Suy ra $90^\circ + 90^\circ + 65^\circ + \widehat{D} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{D} = 360^\circ - \left(90^\circ + 90^\circ + 65^\circ\right) = 115^\circ$

Áp dụng định lý tổng 3 góc trong tam giác: $\widehat{A} + \widehat{D} + \widehat{E} = 180^\circ$

Suy ra $25^\circ + 115^\circ + x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 180^\circ - \left(25^\circ + 115^\circ\right) = 40^\circ$

Vậy $x = 40^\circ$.

**Bài 5.**




Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$.

Vì $M$ là điểm bất kì thuộc miền trong của tứ giác nên ta luôn có:

$MA + MC \geq AC$ (1) (bất đẳng thức trong tam giác $MAC$).

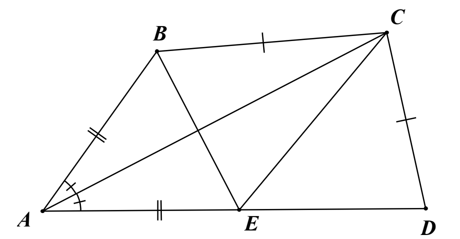
$MB + MD \geq BD$ (2) (bất đẳng thức trong tam giác $MBD$).

Từ (1) và (2) ta có: $MA + MB + MC + MD \geq AB + CD$.

Dấu "=" xảy ra khi dấu "=" ở (1) và (2) đồng thời xảy ra tức là $M$ thuộc $AC$ và $M$ thuộc $BD$ hay $M$ là giao điểm của $AC$ và $BD$.

hay $M \equiv O$.

**Bài 6.**




Có : $\Delta ABC = \Delta AEC (c.g.c)$ nên $\hat{B} = \widehat{AEC}$

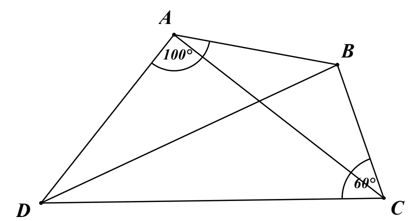
$\Delta ABC = \Delta AEC$ còn suy ra $BC = CE$.

Mà $BC = CD$ nên $CE = CD$.

$\Rightarrow \hat{D} = \widehat{CED}$.

Ta có : $\widehat{AEC} + \widehat{CED} = 180^0 \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = 180^0$

**Bài 7.**




a) Có $AB = AD, CB = CD$.

$\Rightarrow$ $A, C$ cách đều hai đầu mút đoạn thẳng $BD$.

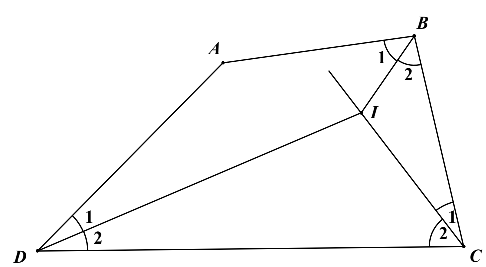
$\Rightarrow$ AC là đường trung trực của $BD$.

b) Xét $\Delta ABD$ có: $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2} = 40^0$.

Xét $\Delta CDB$ có: $\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = \dfrac{180^0 - \widehat{C}}{2} = 60^0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \widehat{ABD} + \widehat{CBD} = 40^0 + 60^0 = 100^0. \\ \hat{D} = \widehat{ADB} + \widehat{CDB} = 40^0 + 60^0 = 100^0. \end{cases}$$

**Bài 8.**




Theo tính chất góc ngoài của tam giác

Ta có $\widehat{B_2} = \hat{I_1} - \widehat{C_1}, \widehat{D_2} = \hat{I_2} - \widehat{C_2}$

Nên $\widehat{B_2} + \widehat{D_2} = \left(\hat{I_1} + \hat{I_2}\right) - \left(\widehat{C_1} + \widehat{C_2}\right) = \widehat{BID} - \hat{C}$

(1)

Tứ giác $ABID$ có

$\widehat{B_1} + \widehat{D_1} = 360^0 - \hat{A} - \widehat{BID}$ (2)

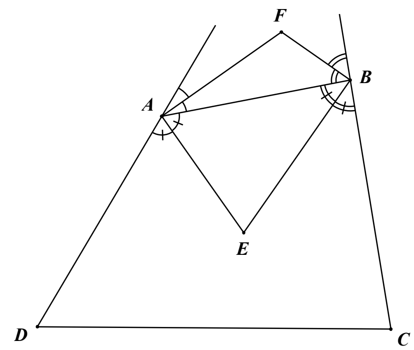
Do $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ và $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BID} - \widehat{C} = 360^0 - \widehat{A} - \widehat{BID}$

$\Rightarrow 2\widehat{BID} + \left(\widehat{A} - \widehat{C}\right) = 360^0.$

$\Rightarrow 2\widehat{BID} + 60^0 = 360^0 \Rightarrow \widehat{BID} = 150^0.$

**Bài 9.**

+) $\widehat{AEB} = \dfrac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$




Xét tứ giác $ABCD$ có:

$$\widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{DAB} + \widehat{CBA} = 360^0$$
$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{D} = 360^0 - \left(\widehat{DAB} + \widehat{CBA}\right) \quad (1)$$

Xét $\Delta EAB$ có:

$$\widehat{AEB} = 180^0 - \left(\widehat{EAB} + \widehat{EBA}\right)$$
$$= 180^0 - \left(\frac{\widehat{DAB}}{2} + \frac{\widehat{CBA}}{2}\right)$$
$$= \frac{360^0 - \left(\widehat{DAB} + \widehat{CBA}\right)}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEB} = \dfrac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$

+) $\widehat{AFB} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}.$

Kéo dài $DA$ tạo thành tia $Dx$, kéo dài $CB$ tạo thành tia $Cy$. Ta có:

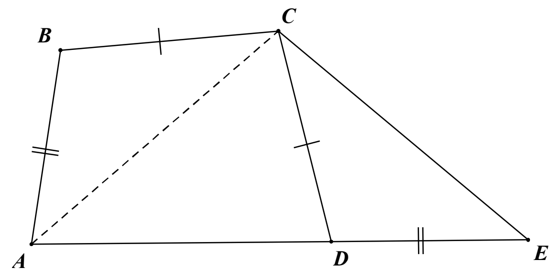
$$\widehat{DAB} + \widehat{BAx} = 180^0$$
$$\widehat{ABC} + \widehat{ABy} = 180^0$$
$$\Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 360^0 - \left(\widehat{BAx} + \widehat{ABy}\right) \text{ (3)}$$

Xét $\Delta AFB$ có:

$$\widehat{AFB} = 180^0 - \left(\widehat{FAB} + \widehat{FBA}\right) = 180^0 - \left(\frac{\widehat{BAx}}{2} + \frac{\widehat{ABy}}{2}\right) = \frac{360^0 - \left(\widehat{BAx} + \widehat{ABy}\right)}{2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suyra: $\widehat{AFB} = \dfrac{\widehat{DAB} + \widehat{ABC}}{2}$ hay $\widehat{AFB} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$

**Bài 10. Hướng dẫn giải**




a) Có: $\begin{cases} \hat{B} + \widehat{ADC} = 180^0 \\ \widehat{ADC} + \widehat{EDC} = 180^0 \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \widehat{EDC}.$

Xét $\Delta ABC$ và $\Delta EDC$ có:

$\left.\begin{array}{l} DE = AB \\ \widehat{B} = \widehat{EDC} \\ CB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta EDC\,(\text{c.g.c})$

b) Có :

$$\Delta ABC = \Delta EDC \Rightarrow \begin{cases} AC = CE \\ \widehat{BAC} = \widehat{E}\ (1) \end{cases}$$

Xét $\Delta CAE$ có: $AC = CE$ nên $\Delta CAE$ cân tại C, do đó $\widehat{CAD} = \widehat{E}$ (2)

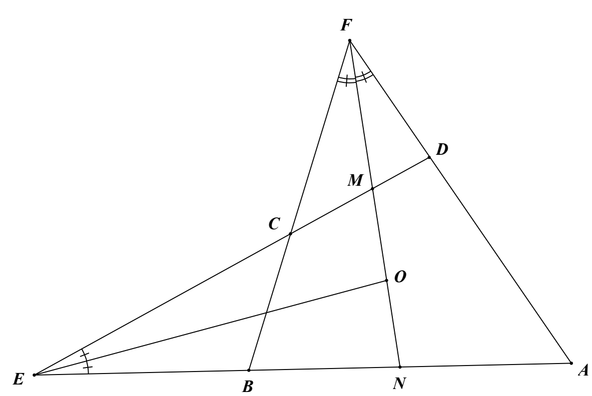
Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{CAD} = \widehat{BAC}$ hay AC là phân giác của góc A.

**Bài 11.** Cho tứ giác $ABCD$ biết số đo của các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ tỉ lệ thuận với $5;8;13$ và $10$.

a) Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.

b) Kéo dài hai cạnh $AB$ và $DC$ cắt nhau ở $E$, kéo dài hai cạnh $AD$ và $BC$ cắt nhau ở $F$. Hai tia phân giác của các $\widehat{AED}$ và $\widehat{AFB}$ cắt nhau ở $O$. Phân giác của $\widehat{AFB}$ cắt các cạnh $CD$ và $AB$ tại $M$ và $N$. Chứng minh $O$ là trung điểm của đoạn $MN$.

**Hướng dẫn giải**




a) Xét tứ giác $ABCD$ có các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ tỉ lệ thuận với $5;8;13;10$

$\Rightarrow \dfrac{\widehat{A}}{5} = \dfrac{\widehat{B}}{8} = \dfrac{\widehat{C}}{13} = \dfrac{\widehat{D}}{10}$ mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^0$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$\dfrac{\widehat{A}}{5} = \dfrac{\widehat{B}}{8} = \dfrac{\widehat{C}}{13} = \dfrac{\widehat{D}}{10} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{5+8+13+10} = \dfrac{360^0}{36} = 10'$

$\Rightarrow \widehat{A} = 50^0; \widehat{B} = 80^0; \widehat{C} = 130^0; \widehat{D} = 100^0$

b) Xét $\Delta EAD$ có $\widehat{EDA} = 100^0; \widehat{DAE} = 50^0 \Rightarrow \widehat{MEN} = 30^0$

Xét $\Delta FBA$ có $\widehat{FBA} = 80^0; \widehat{FAB} = 50^0 \Rightarrow \widehat{BFA} = 50^0$ mà $FN$ là phân giác $\widehat{BFA}$ nên $\widehat{BFN} = 25^0$

Xét $\Delta FBN$ có $\widehat{BFN} = 25^0; \widehat{FBN} = 80^0 \Rightarrow \widehat{BNF} = 75^0$

Xét $\Delta EMN$ có $\widehat{MEN} = 30^0; \widehat{ENM} = 75^0 \Rightarrow \widehat{EMN} = 75^0 \Rightarrow \Delta EMN$ cân tại E

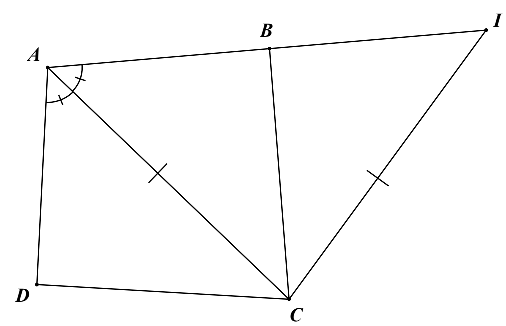
Mà $EO$ là phân giác nên $EO$ đồng thời là đường trung tuyến

$\Rightarrow O$ là trung điểm của $MN$ (đpcm)

**Bài 12.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{B} + \hat{D} = 180^0$, $AC$ là tia phân giác của góc $A$. Chứng minh $CB = CD$.

**Hướng dẫn giải**

Trên tia đối tia $BA$ lấy điểm $I$ sao cho $CI = CA$.




Ta có:

$\widehat{ABC} + \widehat{D} = 180^0; \widehat{ABC} + \widehat{CBI} = 180^0 \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{CBI}$

Lại có: $CI = CA \Rightarrow \Delta ACI$ cân tại $C \Rightarrow \hat{I} = \widehat{DAC} = \widehat{CAB}$

Xét $\Delta ADC$ và $\Delta BCI$ có:

$\widehat{CBI} = \widehat{D}; \hat{I} = \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{ICB} = \widehat{ACD}$

Xét $\Delta ADC$ và $\Delta IBC$ có:

$AC = CI$

$\widehat{ICB} = \widehat{ACD}$

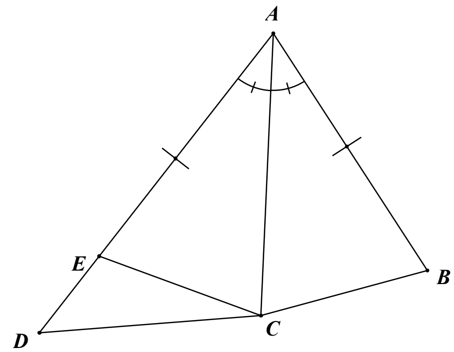
$\hat{I} = \widehat{CAD}$

$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta IBC\ (g-c-g) \Rightarrow CD = CB$ (đpcm)

**Bài 13.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} + \hat{B} = 180^0$ $AB < AD$, $AC$ là tia phấn giác của $\widehat{BAD}$. Trên cạnh $AD$ lấy $E$ sao cho $AE = AB$. Chứng minh rằng $BC = CE = CD$.

**Giải**

$\Delta AEC = \Delta ABC\left(c.g.c\right) \Rightarrow CE = BC,\ \angle AEC = \angle ABC$




Tứ giác ABCD có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$

Mà $\hat{A} + \hat{C} = 180^0$ (gt)

Suy ra $\hat{B} + \hat{D} = 180^0 \Rightarrow$

$\widehat{ABC} = \widehat{ACE}, \widehat{AEC} + \widehat{DEC} = 180^0$

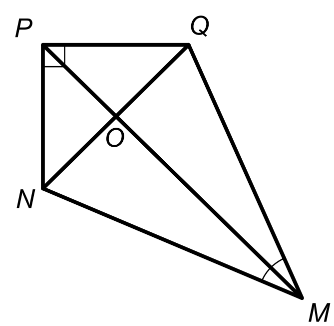
Ta có $\widehat{DEC} = \hat{D}$

$\Rightarrow \Delta CDE$ cân tại $C \Rightarrow CD = CE$.

**Bài 14.** Tứ giác $MNPQ$ có $MN = MQ$, $PN = PQ$, $\hat{P} = 90°, \widehat{M} = 52°$. Chứng minh $MP \perp NQ$ và tính góc ngoài đỉnh $Q$.

**Giải**

Ta có:




$PN = PQ$ (giả thiết)$\Rightarrow P$ thuộc đường trung trực của $NQ$

$MN = MQ$ (giả thiết)$\Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của $NQ$

$\Rightarrow MP$ là đường trung trực của $NQ \Rightarrow MP \perp NQ$ tại $O$.

Xét $\Delta NPQ$, có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{NPQ} = 90^0 \\ NP = PQ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta NPQ \text{ là tam giác vuông cân tại P}$$

$\Rightarrow \widehat{PQN} = 45^0$

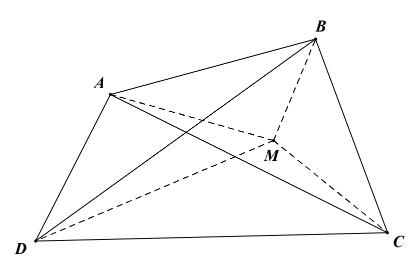
Xét $\Delta NMQ$, có: MN = MQ (gt) $\Rightarrow \Delta NMQ$ là tam giác cân tại $M$

$$\Rightarrow \widehat{MQN} = \frac{180^0 - 52^0}{2} = 64^0$$

Có : $\widehat{PQM} = \widehat{PQN} + \widehat{NQM} = 45^0 + 64^0 = 109^0$.

Suy ra góc ngoài đỉnh Q là $71^o$

**Bài 15.**




a) Xét ba điểm *M, A, C* có $MA + MC \geq AC$

Xét ba điểm *M, B, D* có $MB + MD \geq BD$

Do đó $MA + MB + MC + MD \geq AC + BD$, không đổi.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ *M* là giao điểm của *AC* và *BD*

b) Giả sử tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C} > \widehat{D}$

Tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$

Ta có $4\hat{A} > \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} > 4\hat{D} \Rightarrow 4\hat{A} > 360^\circ > 4\hat{D} \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ > \hat{D}$

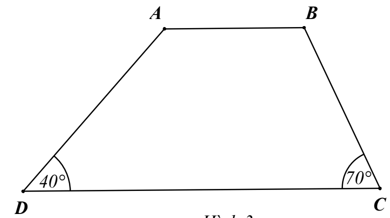
Do đó $\hat{A}$ tù và $\hat{D}$ nhọn.

# BÀI 11. HÌNH THANG CÂN

VD 1.1.

a) Tính góc $\widehat{A},\widehat{B}$ ?

Có $ABCD$ là hình thang $\Rightarrow$ $AB//CD$



Hình 3

$$\Rightarrow \begin{cases}\widehat{A}+\widehat{D}=180^0\\ \widehat{B}+\widehat{C}=180^0\end{cases}$$ (hai góc trong cùng phía)

$$\Rightarrow \begin{cases}\widehat{A}=180^0-40^0=140^0\\ \widehat{B}=180^0-70^0=110^0\end{cases}.$$

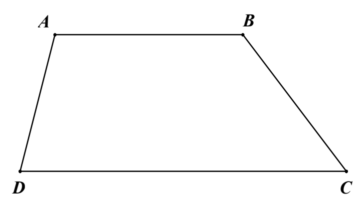
b) Xét hình thang $ABCD$ ( $AB//CD$ )

Ta có $\widehat{A}+\widehat{D}=180^0$ (hai góc trong cùng phía) nên $\widehat{A},\widehat{D}$ có nhiều nhất là một góc nhọn và nhiều nhất là một góc tù.

Ta có $\widehat{B}+\widehat{C}=180^0$ hai góc trong cùng phía) nên $\widehat{B},\widehat{C}$ có nhiều nhất là một góc nhọn và nhiều nhất là một góc tù.

$\Rightarrow$ hình thang có nhiều nhất có hai góc tù, có nhiều nhất là hai góc nhọn.

VD 1.2.



Hình 4

Có $AB//CD$ (gt) $\Rightarrow$ $\widehat{A}+\widehat{D}=180^0$ (hai góc trong cùng phía).

Lại có $\widehat{A}-\widehat{D}=20^0$

$$\Rightarrow \begin{cases}\widehat{A}=\dfrac{180^0+20^0}{2}=100^0\\ \widehat{D}=\dfrac{180^0-20^0}{2}=80^0\end{cases}$$

Ta cũng có $AB//CD$ (gt) $\Rightarrow$ $\widehat{B}+\widehat{C}=180^0$ (hai góc trong cùng phía) và $\widehat{B}=2\widehat{C}$ (gt)

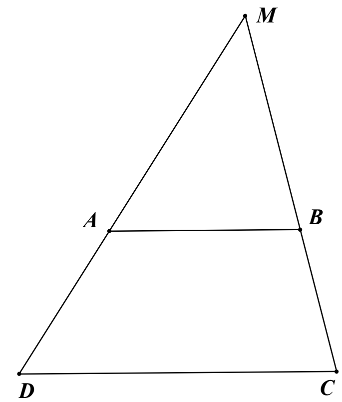
$$\Rightarrow 2\widehat{C}+\widehat{C}=180^0 \Rightarrow \widehat{C}=\frac{180^0}{3}=60^0$$

$$\Rightarrow \widehat{B}=2\widehat{C}=2.60^0=120^0.$$

Vậy $\widehat{A}=100^0;\ \widehat{B}=120^0;\ \widehat{C}=60^0;\ \widehat{D}=80^0$.

**VD 1.3.**

Vì $AB < CD$ nên $AD$ cắt $BC$. Gọi $M$ là giao điểm của $AD$ và $BC$.



*Hình 5*

Xét $\Delta MCD$ có $\widehat{DMC} + \widehat{MDC} + \widehat{MCD} = 180^0$ (tổng ba góc trong một tam giác).

$\Rightarrow$ $\widehat{MDC} + \widehat{MCD} = 180^0 - \widehat{DMC}$ $\Rightarrow$ $\widehat{MDC} + \widehat{MCD} < 180^0$ hay $\widehat{D} + \widehat{C} < 180^0$ (1).

Xét hình thang $ABCD$ có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{C} = 360^0$

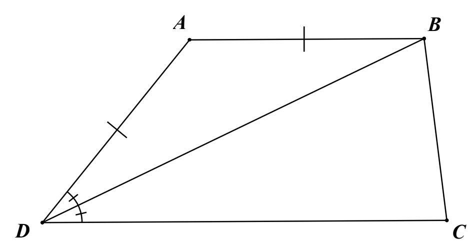
$\Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 360^0 - \left(\widehat{D} + \widehat{C}\right) > 360^0 - 180^0 = 180^0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} > 180^0$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\widehat{A} + \widehat{B} > \widehat{C} + \widehat{D}$ (đpcm).

**VD 2.1.**

Xét $\Delta ABD$ có $AB = AD$ (gt) $\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại $A \Rightarrow$ $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$.



*Hình 6*

Lại có $DB$ là tia phân giác $\widehat{ADC}$

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CDB}.$

$\Rightarrow$ $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ mà hai góc ở vị trí so le trong

$\Rightarrow AB // CD$.

Vậy tứ giác $ABCD$ là hình thang.

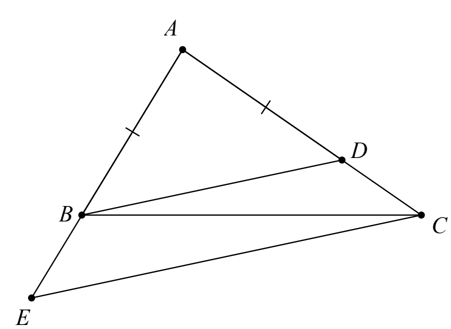
**VD 2.2.**

$AB = AD$ $\Rightarrow$ $\Delta ABD$ cân tại $A$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \dfrac{180° - \widehat{BAC}}{2}$ (1)

$AE = AC$ $\Rightarrow$ $\Delta AEC$ cân tại $A$

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{AEC} = \dfrac{180° - \widehat{BAC}}{2}$ (2)



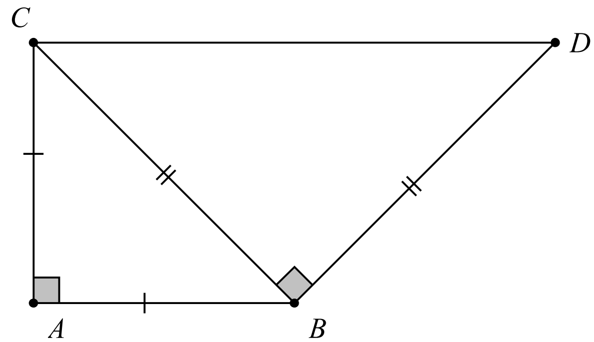
Từ $(1)$, $(2)$ $\Rightarrow$ $\widehat{AEC} = \widehat{ABD}$

$\Rightarrow$ $BD \parallel EC$

$\Rightarrow$ $BDCE$ là hình thang

VD 2.3.

$\Delta ABC$ vuông cân tại $A$




$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{BAC} = 90^\circ \\ \widehat{ABC} = 45^\circ \end{cases}$

$\Delta BCD$ vuông cân tại $B$

$\Rightarrow$ $\widehat{BCD} = 45^\circ$

$\Rightarrow$ $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} \left(= 45^\circ\right)$

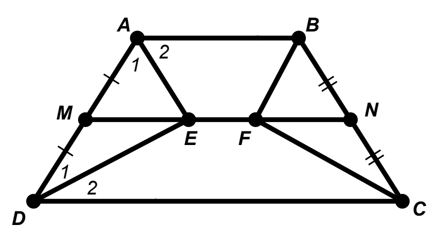
$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow$ $ABDC$ là hình thang

Mà $\widehat{BAC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ $ABDC$ là hình thang vuông

VD 2.4.




a) Xét $\Delta ADE$ có: $\widehat{A_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ$

Nên: $2\widehat{A_1} + 2\widehat{D_1} = 180^\circ$ hay $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$.

Suy ra: $AB // CD$.

Do đó: tứ giác $ABCD$ là hình thang.

b) Ta có: $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AD, BC$.

Nên: $MN$ là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

Suy ra: $MN // AB$.

Mà: $\Delta ADE$ có $EM$ là trung tuyến ứng với cạnh huyền

Nên: $EM = AM = DM$ $\Delta$ AME cân tại M $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$

$\Rightarrow \widehat{M_1} = 180^\circ - 2\widehat{A_1} = 180^\circ - \widehat{A} \Rightarrow \widehat{M_1} + \widehat{BAD} = 180^\circ$

$\Rightarrow ME//AB$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau)

Do đó: $E \in MN$ (theo tiên đề Ơ-clit).

Chứng minh tương tự ta cũng có: $F \in MN$

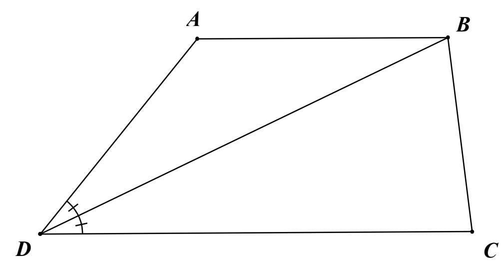
Vậy 4 điểm $M, E, F, N$ thẳng hàng

**VD 3.1.**

Có $AB//CD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ ( so le trong).

Mà $\widehat{ADB} = \widehat{BDC}$ ($DB$ là tia phân giác góc $ADC$). Do đó $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại $A$

$\Rightarrow AB = AD$.



*Hình 8*

**VD 3.2.**

Qua $B$ kẻ $BE \parallel AD$ $(E \in DC)$

Hình thang $ABCD$ có đáy $AB$ và $CD$

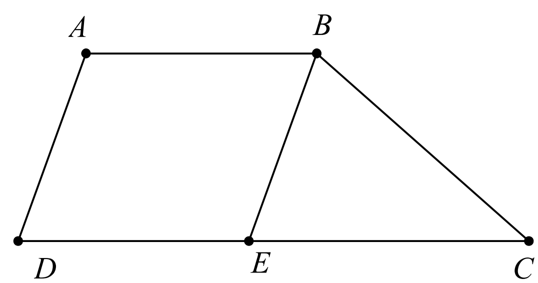
$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel DE$

$\Rightarrow ABED$ là hình thang

Mà $BE \parallel AD$

$\Rightarrow AD = BE$, $AB = DE$ (theo tính chất hình thang có hai cạnh bên song song)




Có $DC = DE + EC \Rightarrow DC - DE = EC \Rightarrow DC - AB = EC\left(DE = AB\right)$ (1)

a) Xét $\Delta BEC$ có $BE + BC > EC$ (bất đẳng thức tam giác) $\Rightarrow AD + BC > EC\left(BE = AD\right)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD + BC > DC - AB$

b) Xét $\Delta BEC$ có $BC - BE < EC$ (bất đẳng thức tam giác) $\Rightarrow BC - AD < EC\left(BE = AD\right)$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow BC - AD < DC - AB$

VD 4.1.

Có $\Delta ABD$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ABD} = 45^0$ và $AB = AD$ (tính chất tam giác vuông).

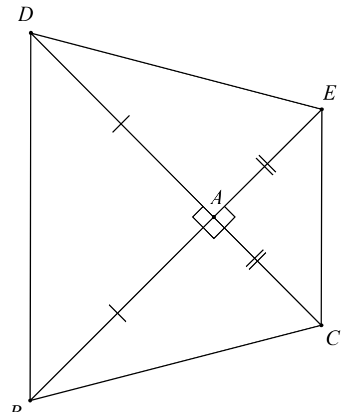
Có $\Delta ACE$ vuông cân tại A $\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{AEC} = 45^0$ và $AE = AC$ (tính chất tam giác vuông).

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACE}$ (cùng bằng $45^0$), mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow BD//EC \Rightarrow BDEC$ là hình thang (1)

Lại có $AB = AD$, $AE = AC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AD + AC = AE + AB \Rightarrow DC = BE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác $BDEC$ là hình thang cân.



Hình 1

VD 4.2.

Có $\Delta ABC$ cân tại A $\Rightarrow AB = AC$ và

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180^0 - \widehat{BAC}}{2}$

Có $AD = AE$ (gt) $\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại $A$

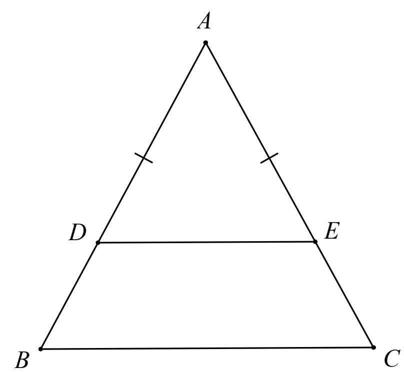
$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \dfrac{180^0 - \widehat{BAC}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow DE//$BC $\Rightarrow BDEC$ là hình thang.

Lại có $\Delta ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ hay $\widehat{DBC} = \widehat{ECB}$

$\Rightarrow BDEC$ là hình thang cân.



Hình 2

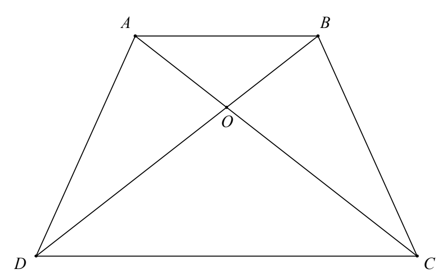
VD 5.1.

a) $\Delta ACD = \Delta BDC$.

Có $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases} AC = BD \\ AD = BC \end{cases}$ (tính chất hình thang cân).

Xét $\Delta ACD$ và $\Delta BDC$ có:

$AC = BD$ (chứng minh trên).



Hình 1

$AD = BC$ (chứng minh trên).

$DC$ chung.

$\Rightarrow\ \Delta ACD = \Delta BDC$ (c-c-c).

b) $OC = OD;\ OA = OB$.

Có $\Delta ACD = \Delta BDC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow\ \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$ hay $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$

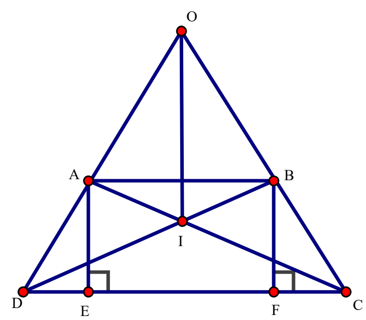
Xét $\Delta OCD$ có $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$

$\Rightarrow\ \Delta OCD$ cân tại $O \Rightarrow\ OC = OD$

Ta có $\begin{cases} OA = AC - OC \\ OB = OD - OC \end{cases}$ mà $OC = OD, AC = BD$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow\ OA = OB$.

VD 5.2.




a) Ta có: $ABCD$ là hình thang cân thì $\begin{cases} AD = BC \\ AC = BD \\ \widehat{ADC} = \widehat{BCD}; \widehat{DAB} = \widehat{ABC} \end{cases}$ (tính chất)

Có: $AE, BF$ là chiều cao hình thang cân $ABCD \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{BFC} = 90°$

Xét $\Delta AED$ và $\Delta BFC$ có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AED} = \widehat{BFC} = 90° \\ AD = BC \\ \widehat{ADE} = \widehat{BCF} (\widehat{ADC} = \widehat{BCD}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AED = \Delta BFC\,(ch - gn)$$

$\Rightarrow DE = CF$ (2 cạnh tương ứng)

b) Xét $\Delta ABD$ và $\Delta BAC$ có:

$$\left.\begin{array}{l} AB\,chung \\ \widehat{DAB} = \widehat{ABC} \\ BD = AC(cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD = \Delta BAC(c.g.c)$$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BAC}$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow \Delta BAI$ cân tại $I \Rightarrow IA = IB$

c) Có $\widehat{OAB} = \widehat{ADC}$, $\widehat{OBA} = \widehat{BCD}$ ( đồng vị) và $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$

Xét $\Delta OAB$ có $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta OAB$ cân tại $O$ (dhnb) $\Rightarrow$ $OA = OB$

$\Rightarrow$ Điểm O thuộc đường trung trực của AB.

Lại có $IA = IB$ (cmt) $\Rightarrow$ Điểm $I$ thuộc đường trung trực của $AB$.

$\Rightarrow OI$ là đường trung trực của $AB$ (1)

$$\left.\begin{array}{r} \text{Cã}: OA = OB \\ AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow OA + AD = OB + BC \text{ hay } OD = OC$$

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của $DC$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Cã}: AC = BD \\ IA = IB \end{array}\right\} \Rightarrow AC - IA = BD - IB \text{ hay } IC = ID$$

$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của $DC$

$\Rightarrow OI$ là đường trung trực của $DC$ (2)

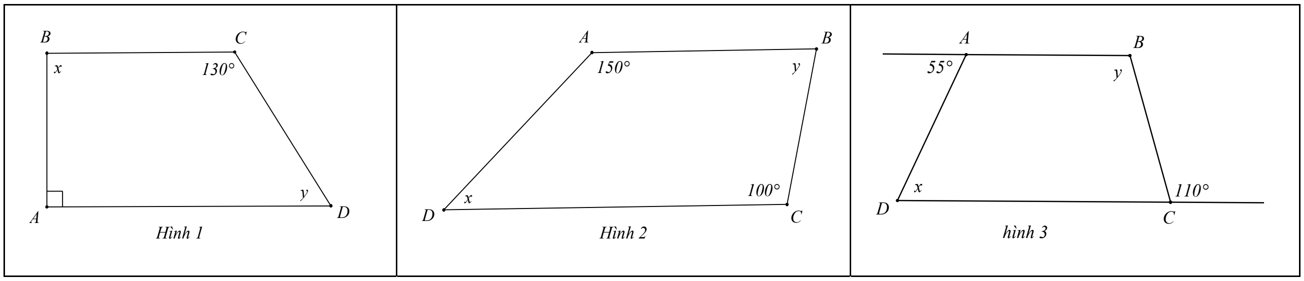
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $OI$ vừa là đường trung trực của $AB$, vừa là đường trung trực của $DC$.

d)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cã}: \widehat{ABC} = \widehat{DAB}(cmt) \\ \text{Mµ}\,\widehat{DAB} + \widehat{ADC} = 180^\circ \text{(2 gãc trong cïng phÝa)} \\ \qquad \widehat{ABC} - \widehat{ADC} = 80^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{DAB} = 130^\circ \\ \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 50^\circ \end{cases}$$

## IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

### Bài 1.

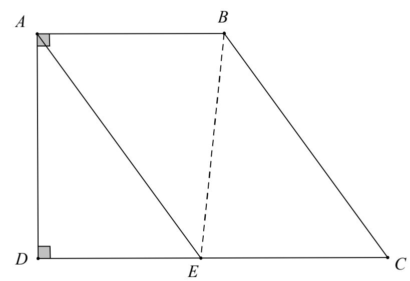



Hình 1: $x = 90^0$; $y = 50^0$

Hình 2: $x = 30^0$; $y = 80^0$

Hình 3: $x = 55^0$; $y = 110^0$

**Bài 2.**




Có $AB // CD(gt) \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{BEC}$ (so le trong).

Có $AE // BC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{EBC}$ (so le trong).

Xét $\Delta ABE$ và $\Delta CEB$ có:

BC chung

$\widehat{ABE} = \widehat{BEC}$ (cmt)

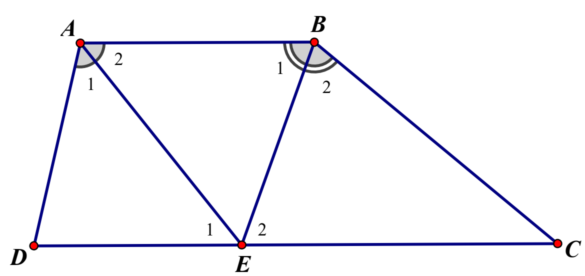
$\widehat{AEB} = \widehat{EBC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta CEB$ (g-c-g).

$\Rightarrow AE = BC$ (cặp cạnh tương ứng).

Ta có $AD \perp DE$ nên $AD < AE$ mà $AE = BC \Rightarrow AD < BC$.

**Bài 3.**




Ta có $\widehat{A_2} = \widehat{E_1}$ ( 2 góc so le trong của $AB//CD$)

Mà $\widehat{A_2} = \widehat{A_1}$ ($AE$ là tia phân giác của $\widehat{A}$)

$\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow \Delta DAE$ cân tại $D \Rightarrow DA = DE$

Chứng minh tương tự ta có $CB = CE$

Mặt khác $CD = DE + EC \Rightarrow CD = AD + BC$

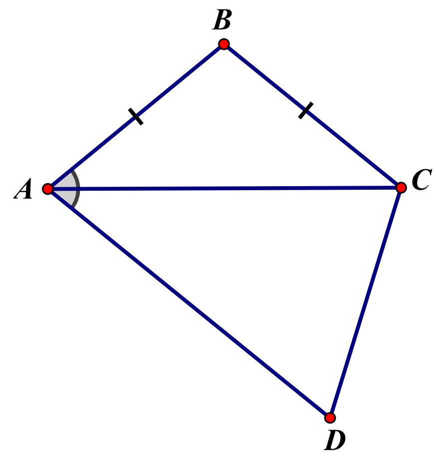
**Bài 4.**

Ta có $\Delta ABC$ cân tại B (gt) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$ ( $AC$ là tia phân giác của $\widehat{BAD}$ )

$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DAC} \Rightarrow BC // AD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình thang.



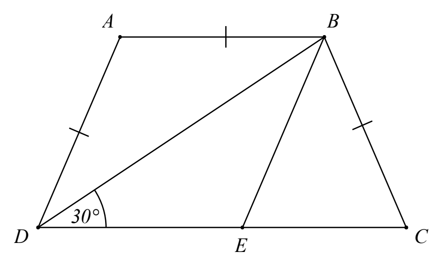

Bài 5.

Vì $AB = AD$ nên $\Delta ABD$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ADB}$

Lại có $AB//CD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (hai góc so le trong).

Theo giả thiết $\widehat{BDC} = 30^0 \Rightarrow$ $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = \widehat{ADB} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 60^0$.




Vì $AB = AD$ nên $\Delta ABD$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ADB}$

Lại có $AB//CD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (hai góc so le trong).

Theo giả thiết $\widehat{BDC} = 30^0 \Rightarrow$ $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = \widehat{ADB} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 60^0$.

Lại có $AB//CD \Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{DAB} = 180^0$ (trong cùng phía)$\Rightarrow$ $\widehat{DAB} = 120^0$.

Từ B kẻ đường thẳng song song với AD, cắt cạnh CD tại E $\Rightarrow$ $\widehat{BEC} = \widehat{ADC} = 60$ (đồng vị)

Tương tự bài 2. $\Rightarrow$ $AD = BE$ và $AB = DE$

Do $AB < CD \Rightarrow DE < CD \Rightarrow E \neq C$.

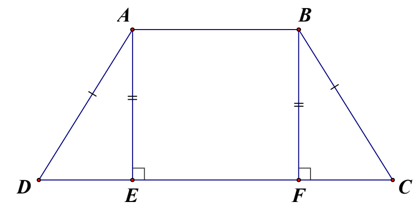
Có $AD = BE$ và $AD = BC \Rightarrow$ $BE = BC$ $\Rightarrow$ $\Delta BCE$ cân tại B$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BCD} \Rightarrow$ $\widehat{BCD} = 60^0$

Lại có $AB//CD \Rightarrow \widehat{DCB}+\widehat{ABC}=180^0$ (trong cùng phía) $\Rightarrow$ $\widehat{ABC}=120^0$.

Lại có $\widehat{BCD}+\widehat{ABC}=180^0 (do\ AB//CD) \Rightarrow \widehat{ABC}=120^0$

Vậy $\widehat{ADC}=60^0; \widehat{DAB}=120^0; \widehat{BCD}=60^0; \widehat{ABC}=120^0$.

**Bài 7.**



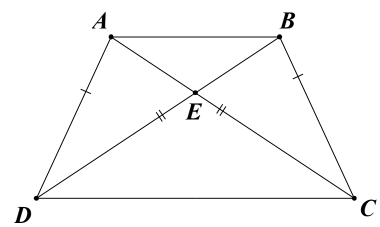

Xét hai tam giác vuông $ADE$ và $BCF$ có:

$\begin{cases} AD=BC \\ AE=BF \end{cases} \Rightarrow \Delta ADE=\Delta BCF$ (Cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow DE=BF$ (Hai cạnh tương ứng)

**Bài 8 .**

a) Xét $\Delta ACD$ và $\Delta BDC$ có:

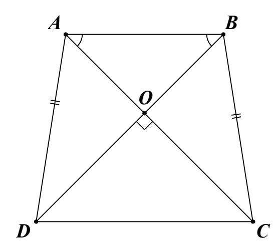



$\begin{cases} CD \text{ chung} \\ AD=BC \\ AC=BD \end{cases} \Rightarrow \Delta ACD=\Delta BDC (c.c.c) \Rightarrow \widehat{ACD}=\widehat{BDC}$

b) Có $\widehat{ACD}=\widehat{BDC} \Rightarrow \Delta EDC$ Cân tại $E$ $\Rightarrow ED=EC$; Có

$\begin{cases} ED=EC \\ AC=BD \end{cases} \Rightarrow EA=EB$

**Bài 9 .**



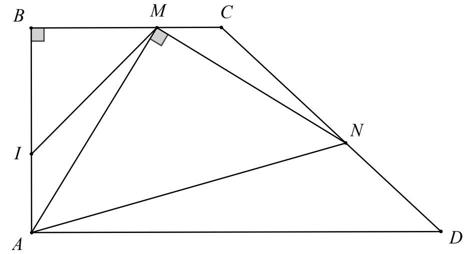

a) $\Delta ABC=\Delta BAD (c.c.c) \Rightarrow \widehat{CAB}=\widehat{DBA}=45^o$

Có: $\begin{cases} \widehat{CAB}=\widehat{ACD}=45^o \\ \widehat{DBA}=\widehat{BDC}=45^o \end{cases} (do\ AB//CD) \Rightarrow \Delta DOC$ vuông cân tại O

b) Diện tích hình thang:

$$S_{ABCD}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta CBD}=\frac{1}{2}BD.AO+\frac{1}{2}BD.CO=\frac{1}{2}BD.(AO+CO)=\frac{1}{2}BD.AC=\frac{1}{2}.6.6=18(cm^2)$$

**Bài 10.**




Trên BA lấy I sao cho $BI = BM$

$\Rightarrow IA = MC$

$\Delta BIM$ vuông cân tại B. $\Rightarrow \widehat{BIM} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{AIM} = 135^0$

Ta có: $\widehat{CMN} = \widehat{IAM}$ (cùng phụ với $\widehat{BMA}$)

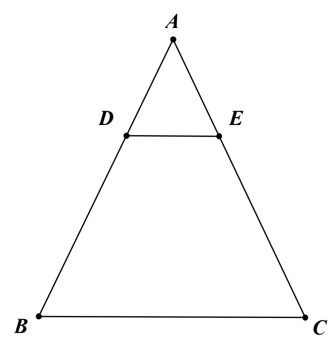
Vì $BC = BA = \dfrac{AD}{2} \Rightarrow \widehat{BCD} = 135^0$

nên $\widehat{AIM} = \widehat{BCD}$

Xét $\Delta IAM$ và $\Delta CMN$ có IA = MC, $\widehat{CMN} = \widehat{IAM}$, $\widehat{AIM} = \widehat{BCD}$

Nên $\Delta IAM = \Delta CMN$ nên MN = MA. Hay $\Delta AMN$ vuông cân tại M.

**Bài 11 .**




a) Ta có $\Delta ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2}$ (tính chất tam giác cân) (1)

Ta có $AD = AE$ (gt) $\Rightarrow \Delta$ ADE cân tại

$A \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{B}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow DE // BC \Rightarrow BDEC$ là hình thang (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow BDEC$ là hình thang cân.

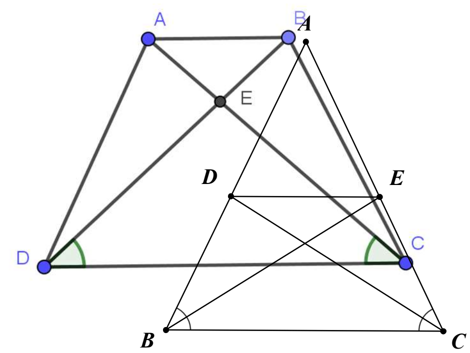
b) Ta có $\widehat{A} = 50^0 \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2} = \dfrac{180^0 - 50^0}{2} = 65^0$

Ta có $DE // BC \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{BDE} = 180^0$ (hai góc trong cùng phía)

$\Rightarrow 65^0 + \widehat{BDE} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BDE} = 115^0$

Vì $BDEC$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{DEC} \Rightarrow \widehat{DEC} = 115^0$

**Bài 12.**




Ta có $BE$ là tia phân giác của $\widehat{ABE}$

$\widehat{ABE} = \widehat{CBE} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$ (1)

Ta có $CD$ là tia phân giác của $\widehat{ACB}$

$\widehat{ACD} = \widehat{BCD} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$ (2)

Vì tam giác $ABC$ cân tại $A$ (gt) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2}$ và $AB = AC$ (3)

Từ (1); (2) và (3)$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACD}$

Xét $\Delta ABE$ và $\Delta ACD$ ta có

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}\ chung \\ AB = AC \\ \widehat{ABE} = \widehat{ACD} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACD\ (\text{g.c.g})$$

$\Rightarrow AD = AE$

$\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{ADE} = \dfrac{180^0 - \widehat{DAE}}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ mà 2 góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow DE // BC \Rightarrow BDEC$ là hình thang mà $\widehat{ABE} = \widehat{CBE}$ (cmt)

$\Rightarrow BDEC$ là hình thang cân (dhnb)

Ta có $DE // BC \Rightarrow \widehat{DEB} = \widehat{EBC};\ \widehat{EBC} = \widehat{EBD} \Rightarrow \widehat{DEB} = \widehat{DBE} \Rightarrow \Delta DBE$ cân tại $D$

$\Rightarrow DB = DE$

Vậy $BEDC$ là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.

**Bài 13.**

Ta có $ABCD$ là hình thang (gt)

$\Rightarrow AB // CD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (hai góc so le trong) và $\widehat{CAB} = \widehat{ACD}$

Mà $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$

$\Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{ECA} \Rightarrow \Delta EAC$ cân tại E $\Rightarrow EA = EB$ (1)

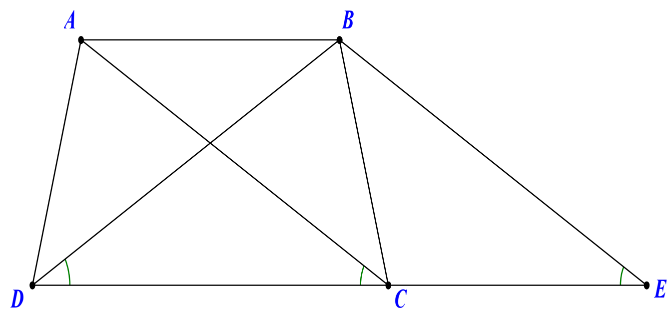
Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \Delta ECD$ cân tại $E$ $\Rightarrow EC = ED$ (2)

Ta có

$$\begin{matrix} AC = AE + EC \\ BD = BE + ED \end{matrix} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $AC = BD$ mà $ABCD$ là hình thang (gt)$\Rightarrow$ $ABCD$ là hình thang cân

**Bài 14.**




a) Ta có: $AB \,//\, DC$

$\Rightarrow AB//CE \;(do\ \mathrm{E} \in \mathrm{DC})$

Nên $ABEC$ là hình thang

Lại có $BE \,//\, AC\ (gt) \Rightarrow BE = AC$

Mà $AC = BD \Rightarrow BE = BD$

Do đó $\Delta BDE$ cân tại $B$

b) Ta có $\Delta BDE$ cân tại $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BEC}$

Mà $\widehat{ACD} = \widehat{BEC}$ ( hai góc đồng vị)$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BEC}$

DC là cạnh chung

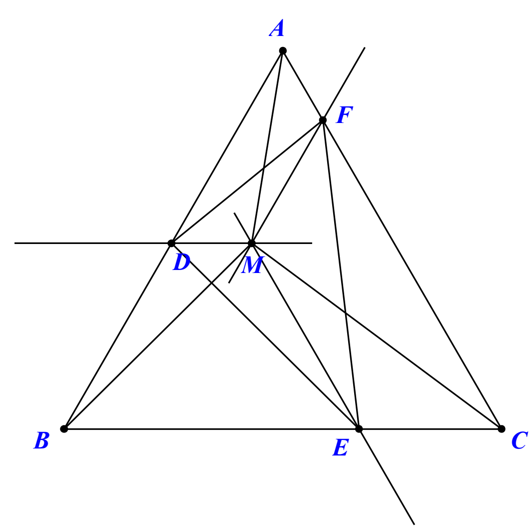
$AC = BD\ (gt)\ \Rightarrow \Delta ACD = \Delta BDC\,(c.g.c)$

b) Ta có $ABCD$ là hình thang (gt)

Lại có $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}\,(do\ \Delta ACD = \Delta BDC)$. Suy ra $ABCD$ là hình thang cân.

**Bài 15.**

a) Ta có: $DM \,//\, BC \Rightarrow DM \,//\, BE \ \Rightarrow BDME$ là hình thang $(1)$




Lại có: $\widehat{B} = \widehat{C}$ (do $\Delta ABC$ đều). Mà $\widehat{C} = \widehat{MEB}$ ( hai góc đồng vị )

Do đó $\widehat{B} = \widehat{MEB}\ (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra: $BDME$ là hình thang cân .

Chứng minh tương tự, ta được : $CEMF, ADMF$ là các hình thang cân.

b) $C_{\Delta DEF} = DF + FE + DE$

Ta có : $DF = MA$ ( $ADMF$ là hình thang cân)

$DE = MB$ ( $DMEB$ là hình thang cân )

$EF = MC$ ( $CEMF$ là hình thang cân )

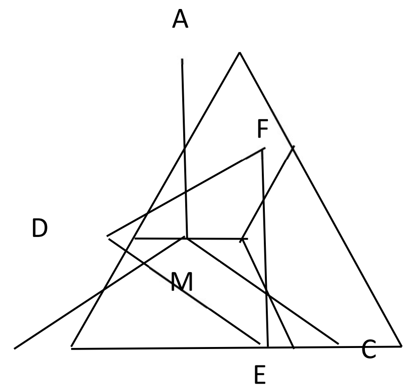
$\Rightarrow\ C_{\Delta DEF} = MA + MB + MC$

c) Ta có : $\widehat{DME} + \widehat{MEB} = 180^0$ ( $BDME$ là hình thang )

Mà $\widehat{MEB} = 60^0$ ($\Delta ABC$ đều , $\widehat{C} = \widehat{MEB}$) $\widehat{DME} = 180^0 - \widehat{MEB}$ = $120^o$

Chứng minh tương tự ta được : $\widehat{FME} = 120^0; \widehat{DMF} = 120^0 \Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{FME} = \widehat{DMF}$

**Bài 16.**




a) Ta có $\widehat{ADM} = \widehat{ABC}$ ( đồng vị và $MD \parallel BC$ ) và

$\widehat{DAF} = \widehat{ABC}$($\Delta ABC$ đều)

Suy ra $\widehat{ADM} = \widehat{DAF}$.

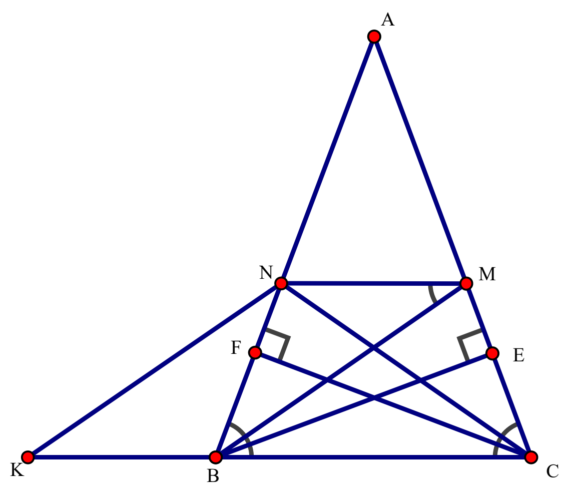
Hình thang $ADMF$ ($MF \parallel AD$) có $\widehat{ADM} = \widehat{DAF}$

nên là hình thang cân.

b) $MA = DF; MB = DE; MC = EF$. Xét $\Delta DEF$ có

$|DE - EF| < DF < DE + EF$.

**Bài 17 .**




a) Xét $\Delta ABC$ cân tại A (gt)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} (\text{tÝnh chÊt}) \\ \text{Mµ } \widehat{ABM} = \widehat{MBC} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} (BM \text{ lµ ph©n gi¸c } \widehat{ABC}) \\ \qquad \widehat{ACN} = \widehat{NCB} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2} (CN \text{ lµ ph©n gi¸c } \widehat{ACB}) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{NCB}$$

Xét $\Delta MBC$ và $\Delta NCB$ có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{MBC}=\widehat{NCB}(cmt)\\ BC\,chung\\ \widehat{MCB}=\widehat{NBC}\,(\widehat{ACB}=\widehat{ABC})\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta MBC=\Delta NCB\,(g.c.g)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}BN=MC\\ NC=BM\end{cases}\text{(2 cạnh tương ứng)}$$

Mà AB = AC ( $\Delta ABC$ cân tại A) $\Rightarrow$ AB – BN = AC – MC hay AN = AM

$\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A (dhnb)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{ANM}=\dfrac{\widehat{MAN}}{2}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}\\ \text{Mµ }\Delta ABC\text{ c©n t¹i }A\Rightarrow \widehat{ABC}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{ANM}=\widehat{ABC}\\ \text{Mµ hai gãc nµy ë vÞ trÝ ®ång vÞ}\end{array}\right\}\Rightarrow MN\,/\,/BC\,(dhnb)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \text{Tø gi¸c }BCMN\text{ lµ h×nh thang}\\ \text{Mµ }BM=NC\,(cmt)\end{array}\right\}\Rightarrow BCMN\text{ là hình thang cân}$$

b) Xét $\Delta ABE$ và $\Delta ACF$ có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AEB}=\widehat{AFC}=90^\circ\\ AB=AC\,(\Delta ABC\text{ c©n t¹i }A)\\ \widehat{BAC}\,chung\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABE=\Delta ACF(ch-gn)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}AE=AF\\ BE=CF\end{cases}\text{(2 tương ứng)}$$

Có: $AE=AF$ (cmt) $\Rightarrow \Delta AEF$ cân tại $A$ (dhnb)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{AEF}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}\\ \text{Mµ }\widehat{ANM}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{ANM}\\ \text{Mµ 2 gãc nµy ë vÞ trÝ ®ång vÞ}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \text{Tø gi¸c }EMNF\text{ lµ h×nh thang}\\ \text{Mµ }\widehat{AFE}=\widehat{AEF}\,(cmt)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Tứ giác }EMNF\text{ là hình thang cân.}$$

c) Tứ giác $BCMN$ là hình thang cân $\Rightarrow NB=MC$

$$\left.\begin{array}{l}\text{V×} BM \text{ lµ ph©n gi¸c } \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{MBC} \\ \text{Mµ } \widehat{MBC} = \widehat{NMB} \text{ (2gãc so le trong)}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{NMB} (= \widehat{MBC})$$

$\Rightarrow \Delta NBM$ cân tại $N$ (dhnb)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow NB = MN \\ \text{Mµ } NB = MC\,(cmt)\end{array}\right\} \Rightarrow NB = MN = MC$$

Mà $MN < BC \ (M \in AC; N \in AB) \Rightarrow MC + NB < MN + BC$ $\quad (1)$

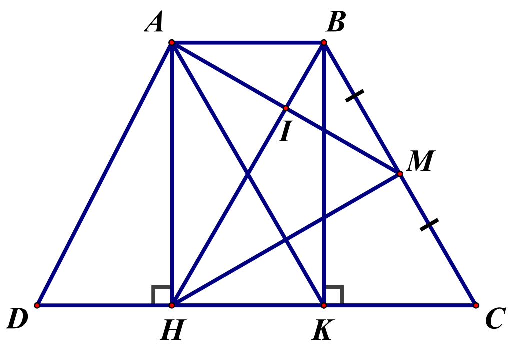
Kẻ $NK \,/\!/\, BM$ cắt $BC$ tại $K \Rightarrow NK = MB; MN = KB$

Xét $\Delta NKC$ có: $NK + NC > KC$ (bất đẳng thức tam giác)

$\Leftrightarrow MB + NC > KB + BC$ hay $MB + NC > MN + BC$ $\quad$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MC + NB < MN + BC < MB + NC$

**Bài 18.**




* Hạ $BK \perp CD = \{K\}$.

Ta có: $\Delta ABK = \Delta KHA \,(CH - GN) \Rightarrow AB = HK$ ( Hai cạnh tương ứng)

Tứ giác ABCD là hình thang cân(GT) $\Rightarrow \hat{C} = \hat{D}$ (TC)

$\Rightarrow \Delta AHD = \Delta BKC \,(CH - GN) \Rightarrow DH = CK$ (Hai cạnh tương ứng)

$AB = \dfrac{CD}{3} (GT)$ nên AB = DH = HK = CK

Xét $\Delta BHC$ có: KH = KC (CMT) $\Rightarrow$ BK là đường trung tuyến ứng với cạnh HC mà $BK \perp CD = \{K\}$ (Cách dựng ) $\Rightarrow \Delta BHC$ cân tại B(DHNB) $\Rightarrow BH = BC$ (ĐN)

Mà $BC = 2AB(GT); HB = 2AB\,(CMT) \Rightarrow BC = HB$

$\Rightarrow BC = HB = HC \Rightarrow \Delta BHC$ là tam giác đều(DHNB)

* Ta có $\Delta ABK = \Delta KHA\left(CH - GN\right) \Rightarrow AH = BK$

Mà HM và BK đều là đường cao của tam giác đều BHC nên HM = BK

$\Rightarrow AH = HM$ mà AB = BM$\left(=\dfrac{BC}{2}\right)$nên HB là đường trung trực của đoạn thẳng AM(TC)

$\Rightarrow HB \perp AM$

Gọi $HB \perp AM = \{I\} \Rightarrow \Delta AIH$ vuông tại I

Mà $\Delta BHC$ đều $\Rightarrow \widehat{BHC} = 60^\circ$

$\widehat{AHI} + \widehat{BHC} = \widehat{AHC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHI} = 30^\circ$

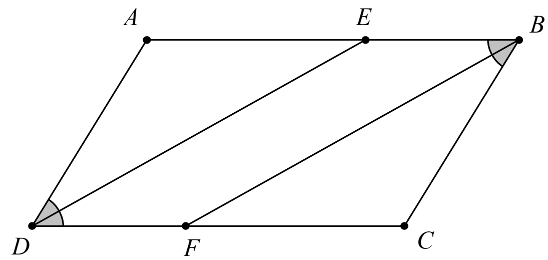
Xét $\Delta AIH$ vuông tại I có: $\widehat{AHI} + \widehat{HAI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HAI} = 60^\circ \; hay \; \widehat{HAM} = 60^\circ$

Xét $\Delta AHM$ có $AH = HM$ (CMT), $\widehat{HAM} = 60^\circ$ (CMT)

$\Rightarrow \Delta AHM$ là tam giác đều(DHNB)

## BÀI 12. HÌNH BÌNH HÀNH

**VD 1.1.**




a)

+ $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $AB \,//\, CD$; $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$

+ $DE$ là tia phân giác của $\widehat{DAC}$ $\Rightarrow$ $\widehat{ADE} = \widehat{EDF} = \dfrac{\widehat{ADC}}{2}$

$BF$ là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ $\Rightarrow$ $\widehat{EBF} = \widehat{FBC} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$

Mà $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow$ $\widehat{ADE} = \widehat{EDF} = \widehat{EBF} = \widehat{FBC}$ (1)

+ Có $AB \,//\, CD$ $\Rightarrow$ $\widehat{AED} = \widehat{EDF}$ (2 góc so le trong) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{EBF}$

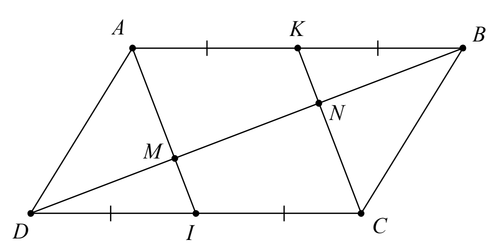
Mà 2 góc trên là 2 góc đồng vị

$\Rightarrow DE \,//\, BF$

b) Xét tứ giác $DEBF$ có: $DE \,//\, BF$; $DF \,//\, BE\left(AB \,//\, CD\right)$

$\Rightarrow DEBF$ là hình bình hành (dhnb)

**VD 1.2.**




a)

+ $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $AB \,//\, CD$; $AB = CD$

+ Có: $K$ là trung điểm của $AB$ $\Rightarrow$ $AK = BK = \dfrac{AB}{2}$

$I$ là trung điểm của $CD$ $\Rightarrow DI = CI = \dfrac{CD}{2}$

Mà $AB = CD$ $\Rightarrow AK = BK = DI = CI\left(=\dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2}\right)$

+ Xét tứ giác $AKCI$ có: $AK = CI$; $AK \,//\, CI\left(AB \,//\, CD\right)$

$\Rightarrow$ $AKCI$ là hình bình hành (dhnb) $\Rightarrow$ $AI \,//\, CK$

b) Có $ABCD$ là hình bình hành thì $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$, có $AKCN$ là hình bình hành thì $\widehat{IAK} = \widehat{KCI}$.

Mà $\widehat{DAM} = \widehat{DAB} - \widehat{IAK}; \widehat{BCN} = \widehat{BCA} - \widehat{KCI}$

Suy ra: $\widehat{DAM} = \widehat{NCB}$

Xét $\Delta ADM$ và $\Delta CBN$ có:

$AD = BC$

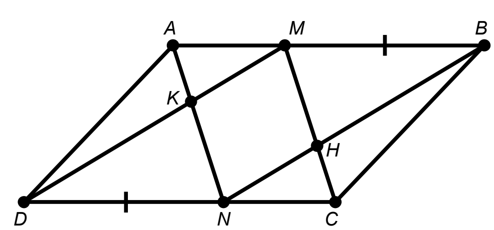
$\widehat{ADM} = \widehat{CBN}$ ( so le trong)

$\widehat{DAM} = \widehat{NCB}$ ( cmt).

$\Rightarrow \Delta ADM = \Delta CBN$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM = BN$ ( hai cạnh tương ứng)

**VD 1.3.**




a) Xét tứ giác $BMDN$, ta có:

$BM = DN$ (gt)

$BM // DN$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMDN$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

b) Ta có $AB = AC$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$BM = DN$ (gt)

$\Rightarrow AB - BM = AC - DN$

$\Rightarrow AM = CN$

Xét tứ giác $AMCN$, ta có:

$AM = CN$ (cmt)

$AM // CN$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMCN$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

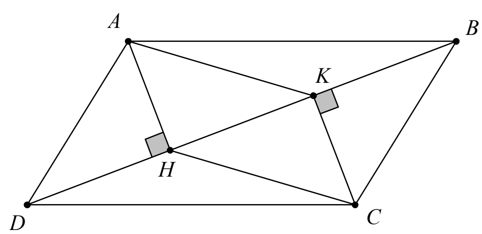
c) Xét tứ giác MKNH, ta có:

$KM // NH$ ( tứ giác $BMDN$ là hình bình hành)

$MH // KN$ (tứ giác $AMCN$ là hình bình hành)

$\Rightarrow$ Tứ giác $MKNH$ là hình bình hành vì có 2 cặp cạnh đối song song.

VD 2.1.




+ $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $AD // BC$; $AD = BC$

+ Có $AH \perp BD$ $\Rightarrow \widehat{AHD} = 90°$

$CK \perp BD$ $\Rightarrow \widehat{CKB} = 90°$

+ Có $AH \perp BD$ và $CK \perp BD \Rightarrow$ $AH // CK$

+ Xét $\Delta AHD$ vuông tại $H$ và $\Delta CKB$ vuông tại $K$ $\left(\widehat{AHD} = \widehat{CKB} = 90°\right)$ có:

$AD = BC$

$\widehat{ADH} = \widehat{CBK}\left(AD // BC\right)$

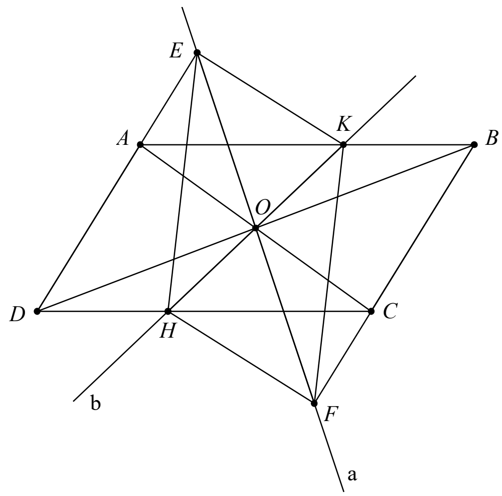
$\Rightarrow$ $\Delta AHD = \Delta CKB$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AH = CK$

+ Xét tứ giác $AHCK$ có: $AH // CK$ và $AH = CK$

$\Rightarrow$ $AHCK$ là hình bình hành.

VD 2.2.




+ $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$

+ $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $AC$ và $BD$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Mà $AC$ và $BD$ cắt nhau tại $O$

$\Rightarrow O$ là trung điểm của $AC$ và $BD$

$$\Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$$

+ Xét $\Delta ODH$ và $\Delta OBK$ có:

$\widehat{ODH} = \widehat{OBK} \left( AB \parallel CD \right)$

$OD = OB$

$\widehat{DOH} = \widehat{BOK}$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ODH = \Delta OBK$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ $OH = OK$

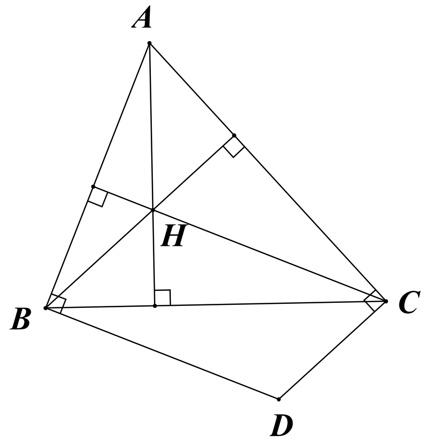
$\Rightarrow O$ là trung điểm của $HK$

+ Chứng minh tương tự có $O$ là trung điểm $EF$

+ Xét tứ giác $EKFH$ có $O$ là trung điểm của $HK$ và $EF$

$\Rightarrow$ $EKFH$ là hình bình hành (dhnb)

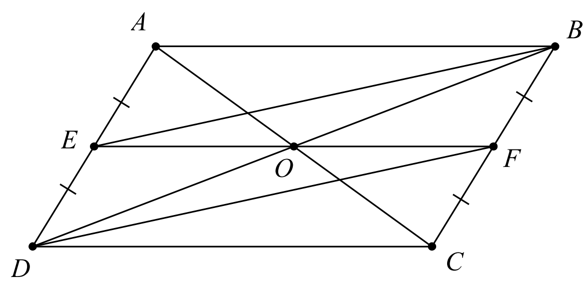
VD 2.3.




a) Tứ giác BDCH có BH//CD (vì cùng vuông góc với AC) và có HC//BD (vì cùng vuông góc với AB) nên là hình bình hành.

b) Xét tứ giác ABDC có $\widehat{BAC}+\widehat{BDC}=180^\circ$ mà $\widehat{BAC}=120^\circ$ nên $\widehat{BDC}=120^\circ$.

VD 3.1.




a)

+ $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $AB\ //\ CD$; $AB=CD$; $AD\ //\ BC$; $AD=BC$; $\widehat{DAB}=\widehat{BCD}$

+ Có: $E$ là trung điểm của $AD$ $\Rightarrow$ $AE=DE=\dfrac{AD}{2}$

$F$ là trung điểm của $BC$ $\Rightarrow BF=CF=\dfrac{BC}{2}$

Mà $AD=BC$

$\Rightarrow AE=DE=BF=CF\left(=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{BC}{2}\right)$

+ Xét $\Delta ABE$ và $\Delta CDF$ có:

$AE=CF$

$\widehat{EAB} = \widehat{FCD}$

$AB = CD$

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = DF$; $\widehat{ABE} = \widehat{CDF}$

b) Xét tứ giác $EBFD$ có: $DE = BF$; $DE \parallel BF\left(AD \parallel BC\right)$

$\Rightarrow EBFD$ là hình bình hành (dhnb)

c)

+ $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AC$ và $BD$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Gọi giao điểm của $AC$ và $BD$ là $O$

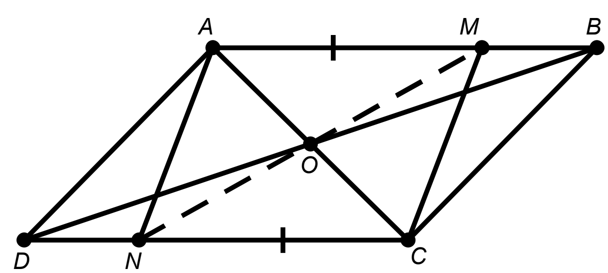
$\Rightarrow$ $O$ là trung điểm của $AC$ và $BD$ (1)

+ $EBFD$ là hình bình hành $\Rightarrow EF$ và $BD$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Mà $O$ là trung điểm của $BD$ $\Rightarrow$ $O$ là trung điểm của $EF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $AC$; $BD$; $EF$ đồng quy tại $O$.

VD 3.2.




Ta có :

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành (gt)

$O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC, BD$.

$\Rightarrow O$ là trung điểm của $AC, BD$.

Xét tứ giác $AMCN$, ta có:

$AM = CN$ (gt)

$AM \parallel CN$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

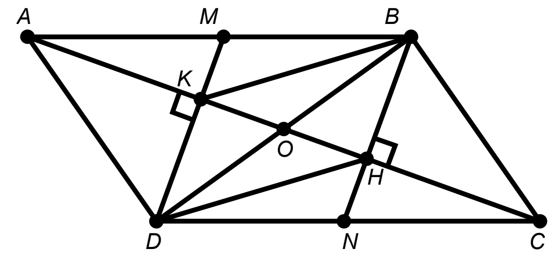
$\Rightarrow$ Tứ giác $AMCN$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

Mà : $O$ là trung điểm của đường chéo $AC$ (cmt)

Nên : $O$ là trung điểm của đường chéo $MN$.

Hay : $M$, $O$, $N$ thẳng hàng.

VD 3.3.




a) Ta có :

$DM \perp AC$ (gt)

$BN \perp AC$ (gt)

$\Rightarrow DM // BN \left(\perp AC\right)$

Xét tứ giác $BMDN$, ta có:

$BM // DN$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$DM // BN$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMDN$ là hình bình hành vì có 2 cặp cạnh đối song song.

b) Xét $\Delta AKD$ và $\Delta CHB$, ta có :

$\widehat{AKD} = \widehat{CHB} \left(= 90^\circ\right)$

$AD = BC$ (Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$\widehat{DAK} = \widehat{BCH}$ (2 góc so le trong và $AD // BC$ )

$\Rightarrow \Delta AKD = \Delta CHB$ (g.c.g)$\Rightarrow DK = BH$.

Xét tứ giác $BKDH$, ta có:

$BH // DK$ (cmt)

$BH = DK$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BKDH$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối song song và bằng nhau.

c) Ta có : Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành (gt)

Mà : $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC, BD$ (gt)

Nên : $O$ là trung điểm của đường chéo $BD$

Lại có : Tứ giác $BMDN$ là hình bình hành (cmt)

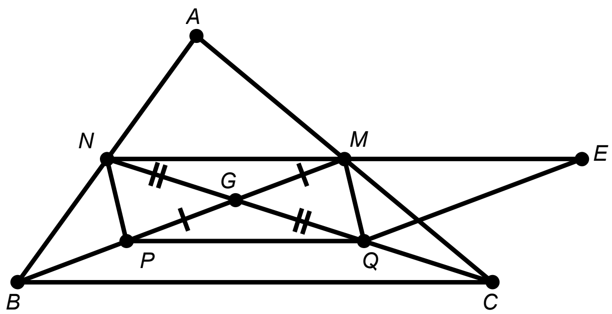
Suy ra : $O$ là trung điểm của đường chéo $MN$

$\Rightarrow O \in MN$

Vậy : $AC, BD, MN$ đồng quy tại $O$.

## IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1.**




a) Xét tứ giác $MNPQ$, ta có:

$G$ là trung điểm của $MP$ ($P$ đối xứng với $M$ qua $G$)

$G$ là trung điểm của $NQ$ ($Q$ đối xứng với $N$ qua $G$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành vì có 2 đường chép cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b) Trên tia đối của tia $MN$, lấy điểm $E$ sao cho $EM = NM$. Chứng minh: $EQ = MP$.

Ta có :

$EM = MN$ (gt)

$PQ = MN$ (Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành)

$\Rightarrow EM = PQ\left(= MN\right)$

Xét tứ giác $EMPQ$, ta có:

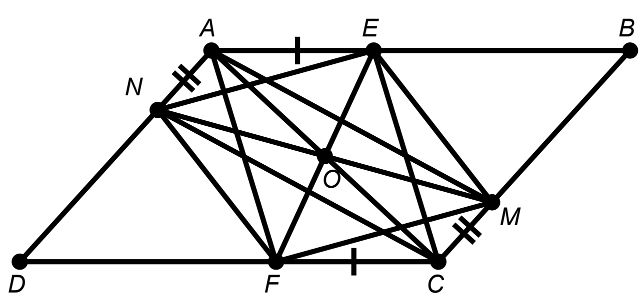
$EM = PQ$ (cmt)

$EM // PQ\ \left(MN // PQ\right)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $EMPQ$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

Suy ra : $EQ = MP$.

**Bài 2.**




a) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

Xét tứ giác $AECF$, ta có:

$AE = CF$ (gt)

$AE // CF$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AECF$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

b) Tứ giác $ANCM$ là hình bình hành.

Xét tứ giác $ANCM$, ta có:

$AN = CM$ (gt)

$AN // CM$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow$ Tứ giác $ANCM$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

c) Ba đường thẳng $MN, EF, BD$ đồng quy.

Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $MN$.

Mà: tứ giác $AMON$ là hình bình hành (cmt)

Nên: $O$ là trung điểm của hai đường chéo $AC$, $MN$. (1)

Ta có:

Tứ giác $AECF$ là hình bình hành (cmt)

$O$ là trung điểm của đường chéo $AC$ (cmt)

Nên: $O$ là trung điểm của đường chéo $EF$

Suy ra: $O$, $E$, $F$ thẳng hàng. (2)

Ta có:

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành (gt)

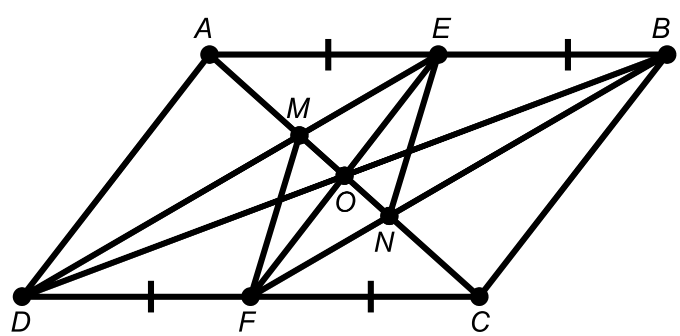
$O$ là trung điểm của đường chéo $AC$ (cmt)

Nên: $O$ là trung điểm của đường chéo $BD$

Suy ra: $O$, $B$, $D$ thẳng hàng. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: Ba đường thẳng $MN, EF, BD$ đồng quy tại $O$.

**Bài 3.**




a) Tứ giác $DEBF$ là hình gì? Vì sao?

Ta có :

$AE = EB = \frac{1}{2}AB$ ($E$ là trung điểm của $AB$)

$DF = FC = \frac{1}{2}DC$ ($F$ là trung điểm của $DC$)

Mà : $AB = CD$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow AE = EB = DF = FC$

Xét tứ giác $DEBF$, ta có:

$BE = DF$ (cmt)

$BE // DF$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow$ Tứ giác $DEBF$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

b) Chứng minh: 3 đường thẳng $BD, AC, EF$ đồng qui.

Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$.

Mà: tứ giác $ABCD$ là hình bình hành (gt)

Nên: $O$ là trung điểm của hai đường chéo $AC, BD$. (1)

Ta có:

Tứ giác $DFBE$ là hình bình hành (cmt)

$O$ là trung điểm của đường chéo $BD$ (cmt)

Nên: $O$ là trung điểm của đường chéo $EF$

Suy ra: $O, E, F$ thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 3 đường thẳng $BD, AC, EF$ đồng qui tại $O$.

c) Chứng minh tứ giác $EMFN$ là hình bình hành.

Xét $\Delta EMO$ và $\Delta FNO$, ta có :

$\widehat{MOE} = \widehat{NOF}$ (2 góc đối đỉnh)

$OE = OF$ ($O$ là trung điểm của $EF$)

$\widehat{MEO} = \widehat{NFO}$ (2 góc so le trong và $EM // FN$)

$\Rightarrow \Delta EMO = \Delta FNO$ (g – c – g).

$\Rightarrow OM = ON$.

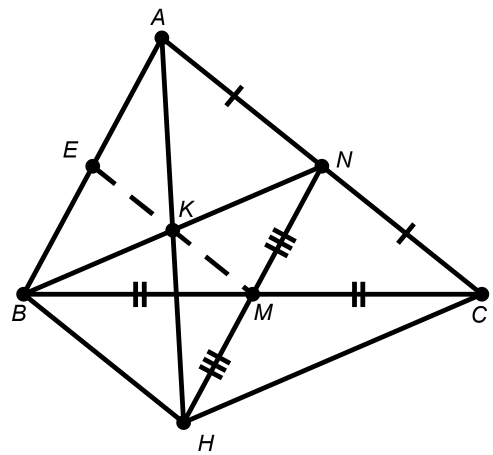
Xét tứ giác $EMFN$, ta có:

$O$ là trung điểm của $EF$ (cmt)

$O$ là trung điểm của $MN$ ($OM = ON$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $EMFN$ là hình bình hành vì có 2 đường chép cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

**Bài 4.**




a) Chứng minh tứ giác $BNCH$ và $ABHN$ là hình bình hành.

Xét tứ giác $BNCH$, ta có:

$M$ là trung điểm của $BC$ (gt)

$M$ là trung điểm của $NH$ ($H$ đối xứng với $N$ qua $M$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BNCH$ là hình bình hành vì có 2 đường chép cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Ta có : $AN = CN$ ($N$ là trung điểm của $AC$)

$BH = CN$ (Tứ giác $BNCH$ là hình bình hành)

$\Rightarrow AN = BH (= CN)$

Xét tứ giác $ABHN$, ta có:

$AN = BH$ (cmt)

$BH // AN$ $(BH // NC)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABHN$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

b) Chứng minh: $M, K, E$ thẳng hàng.

Ta có:

Tứ giác $ABHN$ là hình bình hành (cmt)

$K$ là giao điểm của hai đường chéo $BN, AH$ (gt)

Nên: $K$ là trung điểm của hai đường chéo $BN, AH$

Xét $\Delta BHN$, ta có

$M$ là trung điểm của $HN$ (gt)

$K$ là trung điểm của $BN$ (cmt)

$\Rightarrow$ $KM$ là đường trung bình của $\Delta BHN \Rightarrow KM // BH$ (1)

Xét $\Delta BHA$, ta có

$E$ là trung điểm của $AB$ (gt)

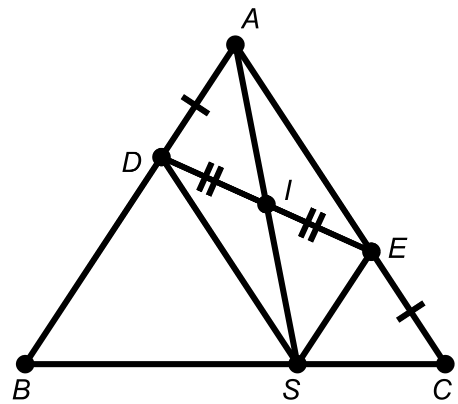
$K$ là trung điểm của $AH$ (cmt)

$\Rightarrow$ $EK$ là đường trung bình của $\Delta BHA \Rightarrow KE \,//\, BH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $KM$ trùng $KE$

Suy ra: $M, K, E$ thẳng hàng.

**Bài 5.**




Từ $E$ kẻ đường thẳng song song với $AB$ cắt $AC$ tại $S$.

$\Rightarrow \widehat{ESC} = \widehat{ABC}$ (2 góc đồng vị và $ES \,//\, AB$)

Mà: $\widehat{ECS} = \widehat{ABC}$ ($\Delta ABC$ cân tại $A$)

Nên: $\widehat{ESC} = \widehat{ECS}$

$\Rightarrow \Delta ECS$ cân tại E $\Rightarrow ES = EC$

Xét tứ giác $ADSE$, ta có:

$AD \,//\, ES$ (gt)

$AD = ES$ (cmt)

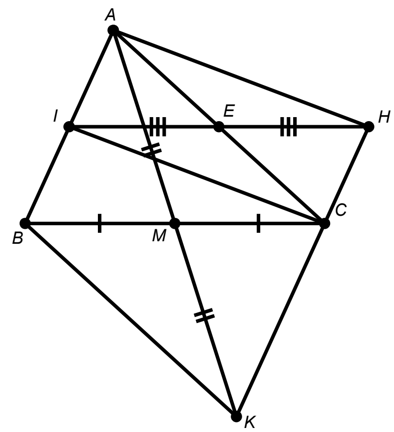
$\Rightarrow$ Tứ giác $ADSE$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối song song.

Mà $I$ là trung điểm của đường chéo $DE$ (gt) nên $I$ là trung điểm của đường chéo $AS$ (gt)

Suy ra: $AI$ cắt $BC$ tại $S$. Lại có $AI$ cắt $BC$ tại $K$ (gt)

Do đó: $S \equiv K$. Vậy tứ giác $ADKE$ là hình bình hành.

**Bài 6.**




a) Chứng minh: Tứ giác $ABKC$ là hình bình hành.

Xét tứ giác $ABKC$, ta có:

$M$ là trung điểm của $BC$ (gt)

$M$ là trung điểm của $AK$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABKN$ là hình bình
hành vì có 2 đường chép cắt nhau
tại trung điểm mỗi đường.

b) Chứng minh: Tứ giác $AHCI$ là hình bình hành.

Xét tứ giác $AHCI$, ta có:

$E$ là trung điểm của $AC$ (gt)

$E$ là trung điểm của $IH$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHCI$ là hình bình hành vì có 2 đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

c) Chứng minh: $K, C, H$ thẳng hàng.

Ta có:

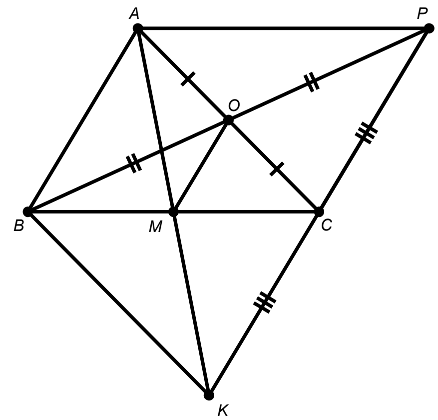
$KC \,//\, AB$ (tứ giác $ABKC$ là hình bình hành)

$CH \,//\, AB$ (tứ giác $AHCI$ là hình bình hành)

$\Rightarrow KC$ trùng với $CH$ (cùng $//\, AB$)

$\Rightarrow K, C, H$ thẳng hàng.

**Bài 7.**




a) Chứng minh: Tứ giác $ABCP$ là hình bình hành.

Xét tứ giác $ABCP$, ta có:

$O$ là trung điểm của $AC$ (gt)

$O$ là trung điểm của $BP$ ($P$ đối xứng với $B$ qua $O$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABCP$ là hình bình hành vì có 2 đường chép cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b) Chứng minh: $BK = AC$.

Ta có :

$PC = CK$ ($C$ là trung điểm của $PK$)

$PC = AB$ (Tứ giác $ABCP$ là hình bình hành)

$\Rightarrow CK = AB\left(= PC\right)$

Xét tứ giác $ABKC$, ta có:

$AB = CK$ (cmt)

$AB // CK$ $\left(AB // PC\right)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABKC$ là hình bình hành vì có 2 cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

$\Rightarrow BK = AC$

c) Chứng minh: $A, M, K$ thẳng hàng.

Xét $\Delta ABC$, ta có:

$O$ là trung điểm của $AC$ (gt)

$OM$ // $AB$ (gt)

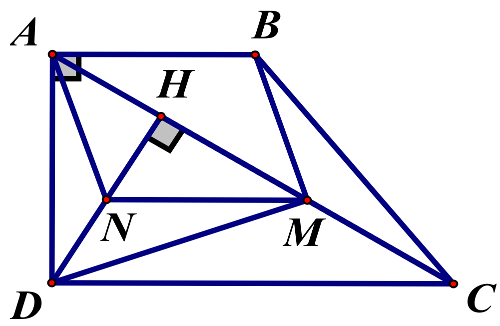
$\Rightarrow$ $M$ là trung điểm của $BC$

Mà : $BC$ là đường chéo của hình bình hành $ABKC$

Nên : $M$ là trung điểm của đường chéo $AK$

Suy ra : $A, M, K$ thẳng hàng.

**Bài 8.**




Gọi $N$ là trung điểm của đoạn thẳng $HD$.

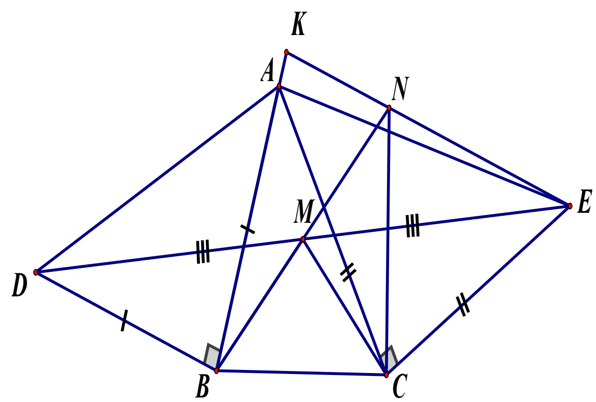
Tứ giác $ABMN$ là hình bình hành

$\Rightarrow AN//BM$.

$AN \perp DM$ ($N$ là trực tâm tam giác $ADM$).

Do đó $BM \perp DM$.

**Bài 9.**




Trên nửa mặt phẳng bờ $BC$ có chứa $A$ vẽ các tam giác $CBN$ vuông cân tại $C$.

$\Delta ABC = \Delta ENC$ (c.g.c)$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{NEC} \Rightarrow \widehat{KAC} + \widehat{NEC} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{AKE} = 90^0$ ($K$ là giao điểm của $EN$ và $AB$).

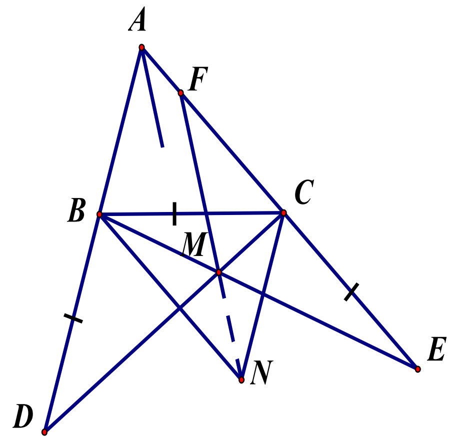
Ta có $BD = NE (= AB)$.

$\Rightarrow BD//NE$ (cùng vuông góc với $AB$)

$\Rightarrow BDNE$ là hình bình hành.Do đó $M$ là trung điểm của $BN$.

Mà $\Delta CBN$ vuông cân tại $C$ nên suy ra được $\Delta MBC$ vuông cântại $M$.

**Bài 10**




Vẽ hình bình hành $BACN \Rightarrow AB = CN$

$CB = CE \Rightarrow \Delta CBE$ cân tại $C$.

$\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{CBN} \Rightarrow BM$ là tia phân giác góc $CBN$.

Tương tự $CM$ là tia phân giác $BCN$.

Từ đó có $NM$ song somg với tia phân

giác của góc $BAC$.

Do vậy $N, M, F$ thẳng hàng

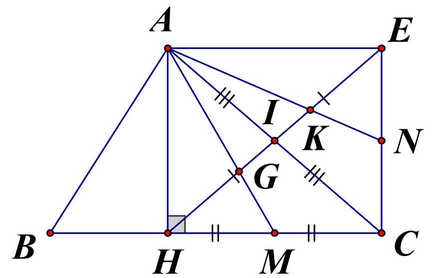
$\widehat{CNF} = \frac{1}{2}\widehat{BNC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{CFN}$

$\Rightarrow \Delta CNF$ cân tại $C \Rightarrow CN = CF$.

Vậy $AB = CF$.

# BÀI 13. HÌNH CHỮ NHẬT

VD 1.1.




a) Ta có: $I$ là trung điểm của $HE$ ($E$ đối xứng với $H$ qua $I$)

$I$ là trung điểm của $AC$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AECH$ là hình bình hành

Lại có: $\widehat{AHC} = 90^0$ ($AH \perp BC$)

Nên tứ giác $AECH$ là hình chữ nhật.

b) Xét $\Delta$ $AEC$ có:

$I$ là trung điểm của $AC$, $N$ là trung điểm của $CE$ (gt) và $AN$ giao $EI$ tại $K$.

$\Rightarrow K$ là trọng tâm của $\Delta$ $AEC$ $\Rightarrow EK = \frac{2}{3}EI; IK = \frac{2}{3}EK$

Chứng minh tương tự ta được: $HG = \frac{2}{3}HI; IG = \frac{2}{3}HG$

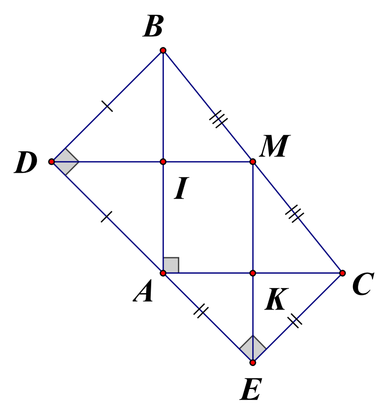
Lại có $EI = HI \Rightarrow EK = HG$ (1)

Do ba điểm $I, K, G$ thẳng hàng và $I$ nằm giữa $G$ và $K$ nên:

$GK = IK + IG = \frac{1}{2}EK + \frac{1}{2}HG = \frac{1}{2}EK + \frac{1}{2}EK = EK$ (Do $EK = HG$) (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow EK = HG = GK$.

VD 1.2.




a) Ta có: $\Delta ABD$ vuông cân tại $D$ (gt) thì $\widehat{BAD} = 45^0$.

$\Delta AEC$ vuông cân tại $E$ (gt) thì $\widehat{EAC} = 45^0$

Ta có: $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{EAC} = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0$

Do đó $\widehat{DAE}$ là góc bẹt $\Rightarrow$ $D, A, E$ thẳng hàng.

b) Xét $\Delta ABC$ vuông tại $A$, có $M$ là trung điểm của $BC$

Nên $AM$ là đường trung tuyến của $\Delta ABC$.

$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = BM = MC$.

Lại có: $DA = DB$ (gt) $\Rightarrow$ $DM$ là đường trung trực của đoạn thẳng $AB$.

Mà DM giao AB tại I $DM \perp AB$ tại I $\widehat{MIA} = 90^0$

Chứng minh tương tự: $\widehat{MKA} = 90^0$

Lại có $\widehat{IAK} = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $IAKM$ là hình chữ nhật.

c) Do tứ giác $IAKM$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{IMK} = 90^0$ hay $\widehat{DME} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta DME$ vuông tại $M$.

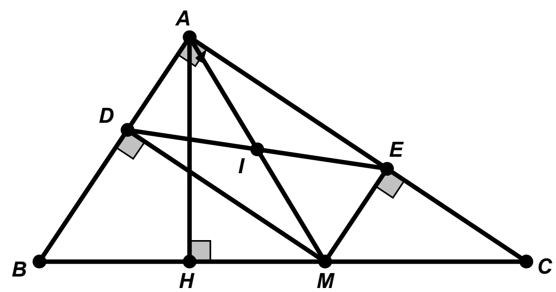
Có $\Delta ADB$ vuông cân tại $D$ có $DM$ là đường trung trực

$\Rightarrow$ $DM$ là đường phân giác của $\Delta ADB$

$$\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{MDB} = \frac{1}{2}\widehat{ADB} = \frac{1}{2}.90^0 = 45^0$$

Chứng minh tương tự: $\widehat{MEA} = 45^0$ $\Rightarrow$ $\Delta DME$ vuông cân tại $M$.

**VD 2.1.**




a) Từ giả thiết, ta có: $\widehat{DAE} = \widehat{BAC} = 90^\circ$.

$\widehat{ADM} = 90^\circ$ (do $MD \perp AB$).

$\widehat{AEM} = 90^\circ$ (do $ME \perp AC$).

Nên tứ giác $ADME$ có ba góc vuông.

Vậy, $ADME$ là hình chữ nhật.

Tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật nên $AM = DE$ và chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mà $I$ là trung điểm của $DE$ nên $I$ cũng là trung điểm của $AM$.

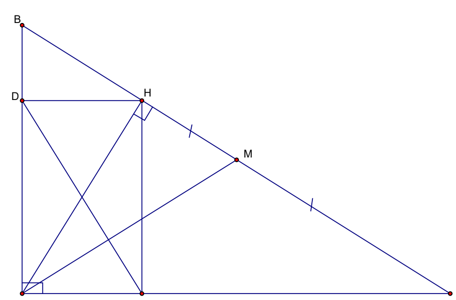
Do đó, ba điểm $A$, $I$, $M$ thẳng hàng.

b) Có $\Delta AHM$ vuông tại H, trung tuyến HI

$\Rightarrow HI = \frac{1}{2}AM$. Mà $ADME$ là hình chữ nhật nên $AM = DE$ $\Rightarrow HI = \frac{1}{2}DE$. Hay $IH = IE$.

**VD 2.2.**

a) Xét tứ giác $DHEA$, có $DH \perp AB; HE \perp AC (gt) \Rightarrow \widehat{HDA} = \widehat{AEH} = \widehat{DAE} = 90^0 \Rightarrow$ tg $DHEA$ là hình chữ nhật (dhnb)$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (t/c hcn)




Mà $\widehat{AHE} + \widehat{EHC} = \widehat{AHC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{EHC} = 90^0$ (1)

Xét $\Delta HEC$, $\widehat{HEC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{EHC} = 90^0$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{C} = \widehat{ADE}$

b) Vì tứ giác $AEHD$ là hình chữ nhật (câu a)

$\Rightarrow AE // DH \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{HDE}$ (2 góc slt)(3)

Xét $\Delta ABC$ , $\widehat{BAC} = 90^0$, có $M$ là trung điểm của $BC$ (gt) $\Rightarrow AM = MB = MC = \dfrac{BC}{2}$ (đường trung tuyến ứng cạnh huyền trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \Delta AMC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{C}$, mà $\widehat{C} = \widehat{ADE}$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ADE}$ (4)

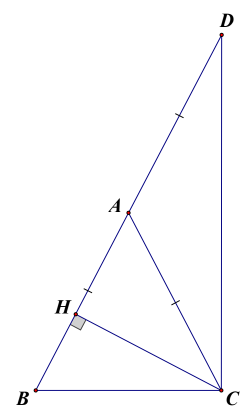
Ta có $\widehat{EDH} + \widehat{ADE} = 90^0$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{MAE} + \widehat{AEB} = 90^0 \Rightarrow AM \perp BE$

**VD 3.1.**

a) Vì $D$ đối xứng với $B$ qua $A \Rightarrow AD = AB$ mà $AB = AC$

$\Rightarrow AD = AB = AC = \dfrac{BD}{2}$




$\Delta DCB$ có $CA$ là đường trung tuyến , $CA = \dfrac{BD}{2}$

$\Rightarrow \Delta DCB$ vuông tại $C$

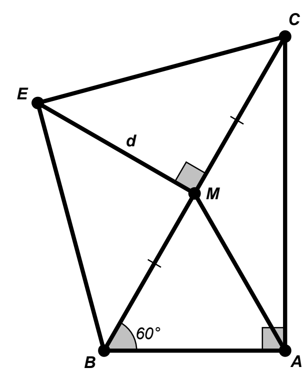
b) Có $\widehat{HCB} + \widehat{B} = 90^0; \widehat{CDB} + \widehat{B} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HCB} = \widehat{CDB}$

Xét $\Delta ADC$ có $AD = AC(cmt)$ $\Rightarrow \Delta ADC$ cân tại $A$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{DCA} \\ &\widehat{CDB} = \widehat{HCB}(cmt) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{HCB}$$

**VD 3.2.**

Vì $AM$ là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông $ABC$ nên $MA = MB = MC = \dfrac{BC}{2} = a$.




Xét $\Delta ABM$ có: $MA = MB$, $\widehat{ABC} = 60°$ nên $\Delta ABM$ là tam giác đều.

Suy ra $AB = MA = MB = a$.

Từ giả thiết, ta có $EM = AB = a$.

Xét tam giác $BCE$ có $EM$ là trung tuyến và $EM = a = \dfrac{BC}{2}$.

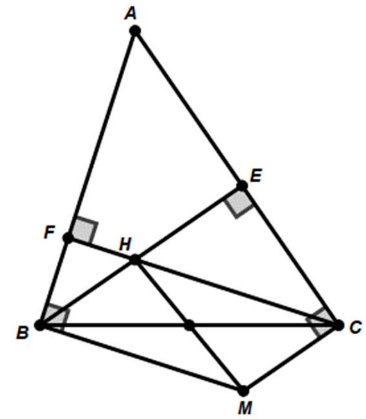
Nên $\Delta BCE$ vuông tại $E$.

VD 4.1.

a) Ta có $BM // CF$ (cùng $\perp AB$).

$CM // BE$ (cùng $\perp AC$).

Nên tứ giác $BHCM$ là hình bình hành.




b) Do $BHCM$ là hình bình hành nên để tứ giác $BHCM$ là hình chữ nhật thì $\widehat{BMC} = 90^\circ$.

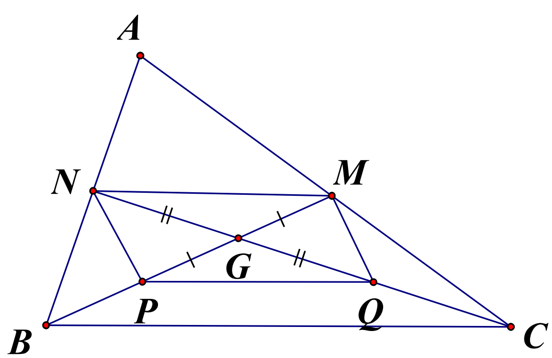
Khi đó, xét tứ giác $ABMC$ có $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = \widehat{BMC} = 90^\circ$.

Suy ra tứ giác $ABMC$ là hình chữ nhật.

Do đó, ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ hay $BA \perp AC$

Vậy, khi $\Delta ABC$ vuông tại $A$ thì tứ giác $BHCM$ là hình chữ nhật.

VD 4.2.




a) Ta có:

$GM = GP$ (vì $P$ là điểm đối xứng của $M$ qua $G$) (1)

$GN = GQ$ ( vì $Q$ là điểm đối xứng của $N$ qua $G$) (2)

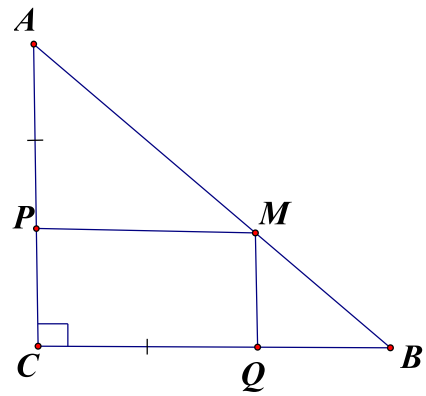
Từ $(1),(2)$ suy ra $MNPQ$ là hình bình hành ( vì có $G$ là trung điểm của hai đường chéo $MP$ và $NQ$ )

b) Nếu $\Delta ABC$ cân tại $A$ thì $AB = AC$, khi đó ta có $\Delta AMB = \Delta ANC(c.g.c)$

$\Rightarrow MB = NC$ vì thế ta lại có $MP = NQ$. Từ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

## IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 1.**




a) Ta có: $\widehat{A}=\widehat{B}$ ( vì $\Delta ABC$ vuông cân tại $C$ )$(1)$

Vì $PM//BC$ nên $\widehat{PMA}=\widehat{B}$ ( hai góc đồng vị)$(2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $\widehat{A}=\widehat{PMA}$ ( vì cùng bằng $\widehat{B}$ )

$\Rightarrow \Delta APM$ cân tại $P$ $\Rightarrow AP=PM$ ( hai cạnh bên bằng nhau)

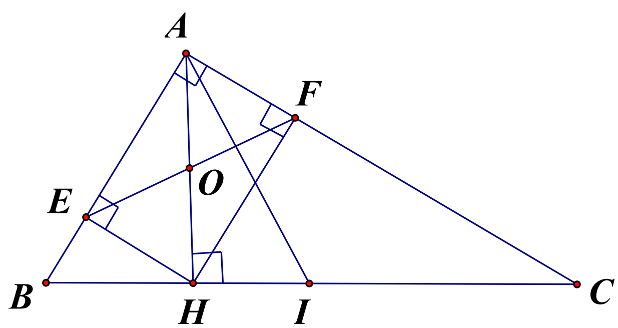
Ta có: $\begin{cases} AP=CQ\left(gt\right) \\ AP=PM \end{cases} \Rightarrow PM=CQ$

b) Ta có: $\begin{cases} PM//CQ \\ PM=CQ \end{cases} \Rightarrow PCQM$ là hình bình hành ( tứ giác có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

Lại có $\widehat{C}=90^o$

Vậy $PCQM$ là hình chữ nhật.

**Bài 2.**




a) Ta có: $\begin{cases} \widehat{A}=90^o \\ \widehat{AFH}=90^o\left(gt\right) \\ \widehat{AEH}=90^o\left(gt\right) \end{cases} \Rightarrow EAFH$ là hình chữ nhật ( vì tứ giác có ba góc vuông)

b) Trong tam giác $AHB$ ta có $\widehat{B}+\widehat{BAH}=90^o$, mà $\widehat{BAH}+\widehat{HAF}=90^o$, suy ra $\widehat{B}=\widehat{HAF}\left(1\right)$.

Gọi $O$ là giao điểm hai đường chéo $EF$ và $AH$ của hình chữ nhật $AEHF$ thì $OA=OF$, do đó $\Delta OAF$ cân ở $O$ nên $\widehat{OAF}=\widehat{OFA}\left(2\right)$

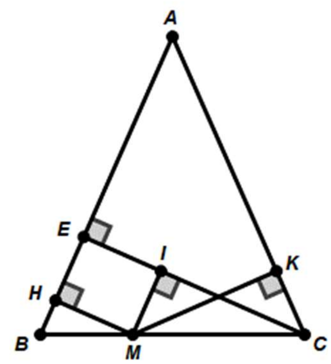
Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $\hat{B} = \widehat{AFE}$

Mặt khác ta lại có $\hat{B} + \hat{C} = 90^o$ và $\widehat{IAC} + \widehat{AFE} = 90^o$, từ đó ta có $\widehat{IAC} = \widehat{ICA}$, do đó $\Delta AIC$ cân tại $I$ nên $IA = IC$.

Tương tự $IB = IA$, do đó $IB = IC$.

**Bài 3.**

a) Từ giả thiết, ta có $CE \perp AB$ (tính chất đường cao) $\Rightarrow \widehat{IEH} = 90°$.




Có $\quad MI \perp CE \Rightarrow \widehat{MIE} = 90°$.

$\quad MH \perp AB \Rightarrow \widehat{MHE} = 90°$.

Nên tứ giác $MIEH$ có $\widehat{MIE} = \widehat{MHE} = \widehat{HEI} = 90°$.

Vậy tứ giác $MIEH$ là hình chữ nhật.

b) Do $MIEH$ là hình chữ nhật nên ta có $MH = EI$.

Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (tính chất tam giác cân).

$\quad AB // IM$ (do $\perp CE$) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IMC}$ (đồng vị).

Suy ra, ta có $\widehat{IMC} = \widehat{ACB}$ hay $\widehat{IMC} = \widehat{KCM}$.

Ta chứng minh được $\Delta MIC = \Delta CKM$ (cạnh huyền – góc nhọn).

Nên $MK = CI$ (2 cạnh tương ứng).

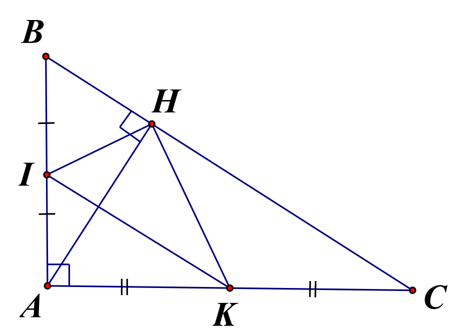
Do đó, ta có: $MH + MK = IE + IC = CE$.

Do $\Delta ABC$ cố định nên đường cao $CE$ cố định và độ dài $CE$ không đổi.

Vậy khi điểm $M$ di động trên đoạn $BC$ thì tổng $MH + MK$ không đổi.

**Bài 4.**

a) Ta có $\Delta BHA$ vuông tại $H$(gt) $\Rightarrow IH = IA = IB$ ( đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $AB$ )




$\Rightarrow \Delta IAH$ cân tại $I$ $\Rightarrow \widehat{IHA} = \widehat{IAH}$ ( hai góc ở đáy bằng nhau)(1)

Tương tự $\widehat{KHA} = \widehat{HAK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IHA} + \widehat{KHA} = \widehat{IAH} + \widehat{HAK} = 90^o$ (gt)

Vậy $\widehat{IHK} = 90^o$.

b) Ta có:

$HI=\dfrac{AB}{2}$ ( đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông $AHB$ )(3)

$IK=\dfrac{AC}{2}$ ( đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông $AHC$ )(4)

$IK=\dfrac{AC}{2}$ ( đường trung bình của tam giác $ABC$ )(5)

Từ (3), (4), (5) suy ra : $P_{IHK}=IH+HK+IK=\dfrac{AB}{2}+\dfrac{AC}{2}+\dfrac{BC}{2}=\dfrac{AB+AC+BC}{2}=\dfrac{P_{ABC}}{2}$.

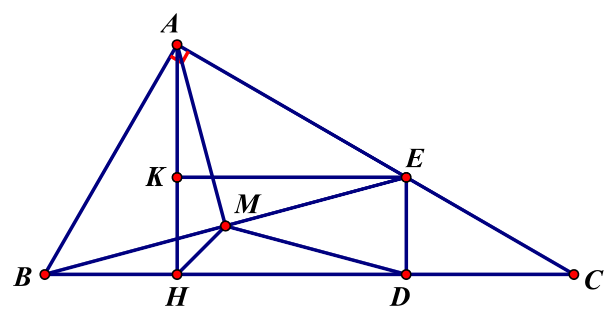
Vậy chu vi $\Delta IHK$ bằng nửa chu vi $\Delta ABC$.

**Bài 5.**

a) Qua $E$ kẻ đường thẳng vuông góc với $AH$, cắt $AH$ tại $K$

Xét tứ giác $KHDE$ có $\widehat{EKH}=\widehat{KHD}=\widehat{HDE}=90^o \Leftarrow KHDE$ là hình chữ nhật

(tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật)




$\Rightarrow KE=HD$

Mà $HD=AH\Rightarrow KE=AH$

Ta có: $\begin{cases}\widehat{BAH}+\widehat{HAE}=90^o\\ \widehat{AEK}+\widehat{HAE}=90^o\end{cases}\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{AEK}$

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle EKA$ có:

$\begin{cases}\widehat{AHB}=\widehat{AKE}=90^o\\ AH=KE\\ \widehat{BAH}=\widehat{AEK}\end{cases}\Rightarrow \triangle AHB=\triangle EKA$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề)

$\Rightarrow AB=AE\Rightarrow \triangle ABE$ cân tại $A$

b) Xét $\triangle ABE$ vuông cân tại $A$ có $AM$ là đường trung tuyến

$\Rightarrow AM=\dfrac{1}{2}BE\,(1)$

Xét $\triangle BDE$ có $BD\perp DE\Rightarrow \triangle BDE$ vuông tại $D$

Mặt khác $MD$ là đường trung tuyến $\triangle BDE\Rightarrow MD=\dfrac{1}{2}BE\,(2)$

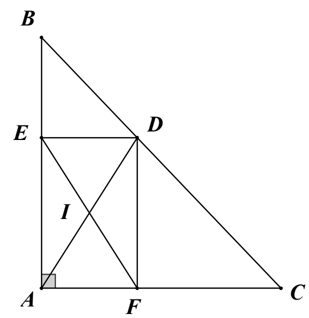
Từ $(1),(2) \Rightarrow AM = MD$

Xét $\triangle AMH$ và $\triangle DMH$ có :

$$\begin{cases} AM = MD \\ HM : chung \Rightarrow \triangle AMH = \triangle DMH\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{DHM} \\ AH = HD \end{cases}$$

Mà $\widehat{AHD} = 90^o \Rightarrow \widehat{AHM} = 45^o$

**Bài 6.**



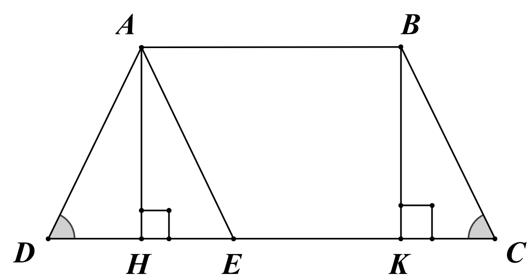

a) Tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật vì có

$\widehat{EAF} = \widehat{AED} = \widehat{AFD} = 90°$

b) Vì $AEDF$ là hình chữ nhật mà $I$ là trung điểm của $EF$ nên $I$ là trung điểm của $AD$

Vậy $A, I, D$ thẳng hàng.

**Bài 7.**




a) Tứ giác $ABKH$ là hình chữ nhật vì:

+ $AH // BK$ và $AH = BK \Rightarrow ABKH$ là hình bình hành .

+ $\widehat{AHK} = 90°$.

b) $DH = CK$ :

Vì $ABKH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = BK$

Ta có $AD = BC$ ( $ABCD$ là hình thang cân )

Nên $\Delta AHD = \Delta BKC$ ( cạnh huyền - cạnh góc vuông).

$\Rightarrow DH = CK$

c) $E$ là điểm đối xứng với $D$ qua $H \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại $A$ $\Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{AEH}$,

mà $\widehat{ADH} = \widehat{BCK}$ (giả thiết) $\Rightarrow AE //$ BC .

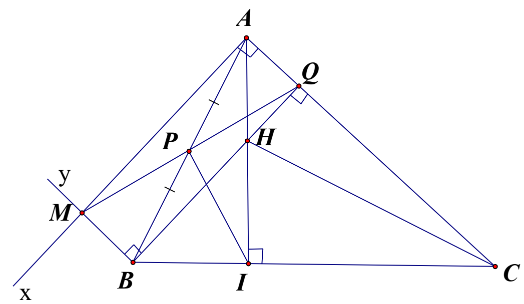
Mặt khác $AB //$ EC $\Rightarrow$ tứ giác $ABCE$ là hình bình hành.

d) Chứng minh $DH = \frac{1}{2}(CD - AB)$

$ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = EC$

Theo câu c) $\Delta ADE$ cân tại $A \Rightarrow DH = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}(CD - EC) = \frac{1}{2}(CD - AB)$

**Bài 8.**




a) Ta có: $\begin{cases} \widehat{AQB} = 90^o \\ \widehat{MAQ} = 90^o \\ \widehat{MBQ} = 90^o \end{cases} \Rightarrow AMBQ$ là hình chữ nhật.

b) Ta có: $\begin{cases} AI \perp BC\left(gt\right) \\ BQ \perp AC\left(gt\right) \end{cases} \Rightarrow H$ là trực tâm của $\Delta ABC$ (vì $H$ là giao điểm của hai đường cao)

Suy ra $CH \perp AB$.

c) Ta có:

$PQ = \dfrac{AB}{2}$ ( vì $PQ$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông $ABQ$ )

$PI = \dfrac{AB}{2}$ ( vì $PQ$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông $AIB$ )

Từ (1) và (2) suy ra $PQ = PI \Leftarrow \Delta PIQ$ cân tại $P$.

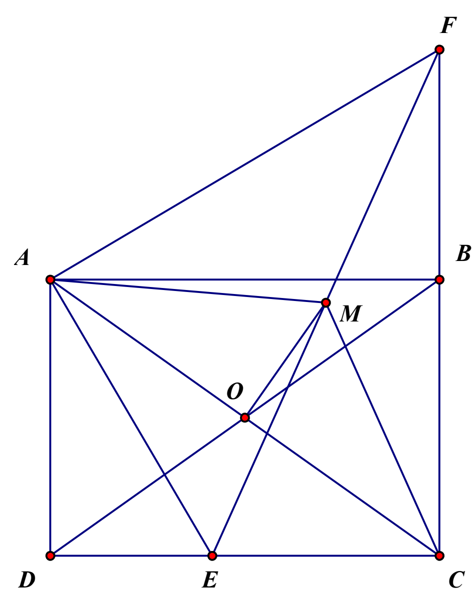
**Bài 9.**

Gọi $O$là giao điểm của hai đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$nên $\mathrm{OA} = \mathrm{OC}$ (1).

Có $AM$và $CM$là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông AEF và CEF nên:

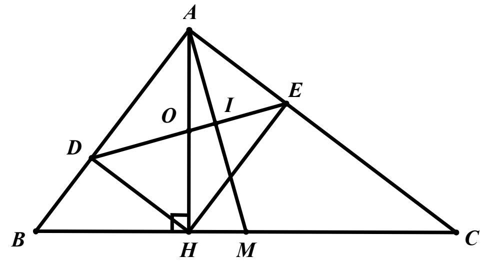
$\mathrm{AM} = \mathrm{CM}$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}\mathrm{EF}$) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OM$là đường trung trực của $AC$.



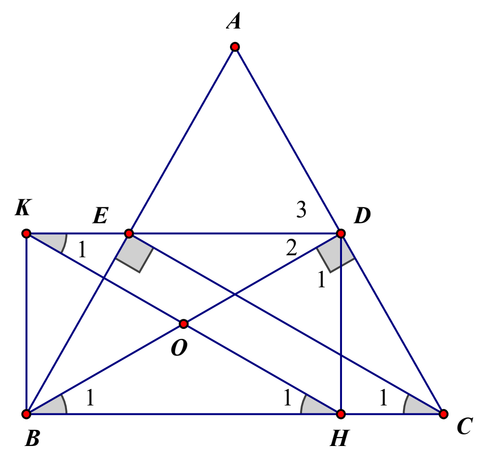
**Bài 10.**

a) $DE = AH < AM = \dfrac{BC}{2}$




b) Gọi $I$ là giao điểm của $DE$ và $AM.O$ là giao điểm của $AH$ và $DE$. Từ $AM = BM \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{IAD} = \widehat{ABH}$. Tứ giác $AEHD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = DE => IA = ID \Rightarrow \Delta IAD$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{HAB}$. Do đó $\widehat{IAD} + \widehat{ADI} = \widehat{ABH} + \widehat{HAB} = 90^o$.

**Bài 11.**




a) Ta có: $\widehat{B_1}$ phụ $\widehat{ACB}$, $\widehat{C_1}$ phụ $\widehat{ABC}$, mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (1).

$HK \parallel CE$ nên $\widehat{H_1} = \widehat{C_1}$ (đồng vị) (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{B_1} = \widehat{H_1} = \widehat{C_1}$, do đó $\Delta BOH$ cân tại O, suy ra $OB = OH$ (3).

b) Ta có $\widehat{B_1}$ phụ $\widehat{D_1}$, $\widehat{H_1}$ phụ $\widehat{H_2}$, mà $\widehat{B_1} = \widehat{H_1}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{D_1} = \widehat{H_2}$, do đó $\Delta ODH$ cân tại O, suy ra $OD = OH$ (4).

$\Delta ABD = \Delta ACE$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $AD = AE$.

Các tam giác cân $ADE$ và ABC có chung góc ở đỉnh A nên các góc ở đáy bằng nhau $\widehat{D_3} = \widehat{ACB} \Rightarrow DE \parallel BC$.

Do đó $\widehat{D_2} = \widehat{B_1}, \widehat{K_1} = \widehat{H_1}$ (so le trong).

Ta lại có $\widehat{B_1} = \widehat{H_1}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{D_2} = \widehat{K_1}$, suy ra $OD = OK$ (5).

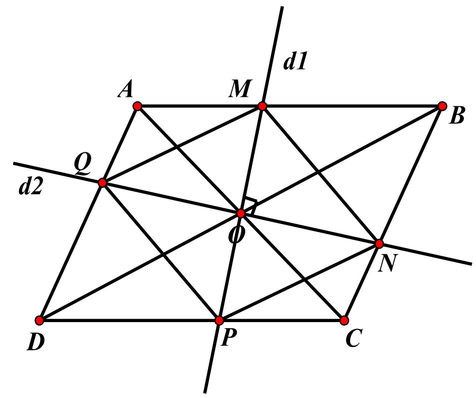
Từ (3), (4), (5) suy ra: $OB = OH = OD = OK$.

Tứ giác $BKDH$ có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình chữ nhật.

# BÀI 14. HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

PHẦN I: HÌNH THOI.

VD 1.1.




Xét $\triangle OAM$ và $\triangle OCP$ có

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (đối đỉnh)

$OA = OC$

$\widehat{KAO} = \widehat{KHO}$ (so le trong)

$\Rightarrow \Delta OAM = \Delta OCP(\text{g.c.g})$

$\Rightarrow OM = OP(1)$

Xét $\Delta ODQ$ và $\Delta OBN$ có

$\widehat{O_4} = \widehat{O_3}$ (đối đỉnh)

$OD = OB$

$\widehat{QDO} = \widehat{NBO}$ (so le trong)

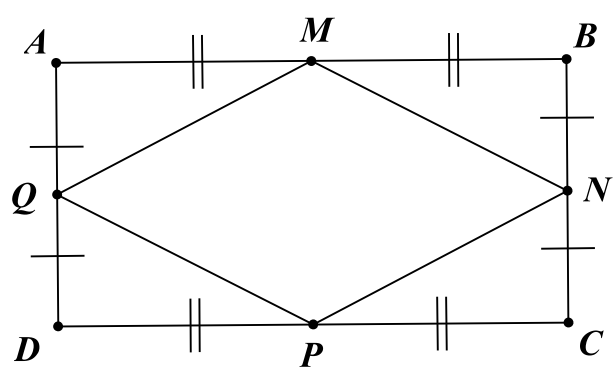
$\Rightarrow \Delta ODQ = \Delta OBN(\text{g.c.g})$

$\Rightarrow OQ = ON(2)$

Từ $(1)\&(2)$ suy ra Tứ giác MNPQ là hình bình hành

Mà $MP \perp NQ \Rightarrow MNPQ$ là hình thoi.

VD 1.2.




Vì ABCD là hình chữ nhật nên $\widehat{\text{A}} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^{0.}$ $(1)$

Áp dụng tính chất về cạnh và giả thiết vào hình chữ nhật ABCD , ta được:

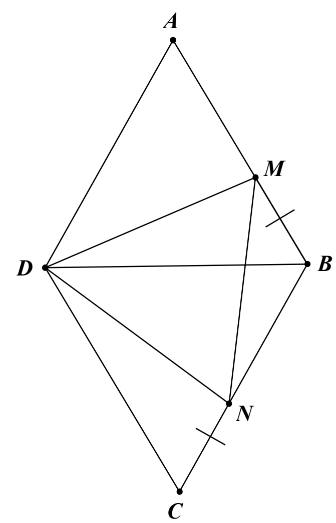
$$\begin{cases} AM = MN, CP = PD \\ AQ = QD, BN = NC \\ AB = CD, AD = BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = MB = PC = PD \\ AQ = BN = CN = DQ \end{cases} \quad (2)$$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra bốn tam giác vuông MAQ, MBN, PCN, PDQ bằng nhau nên bốn cạnh tương ứng bằng nhau là $MN = NP = PQ = QM$.

Tứ giác MNPQ có bốn cạnh bằng nhau nên nó là hình thoi.

**VD 2.1.** Có ABCD là hình thoi.

$\Rightarrow AB = BC = CD = DA$ và $\hat{A} = \hat{C}$.




Mà $\hat{A} = 60^0$ nên $\Delta ABD$

$\Rightarrow \begin{cases} AB = BD \Rightarrow BD = DC \\ \hat{B} = \hat{C} = 60^0 \end{cases}$

Xét $\Delta DMB$ và $\Delta DNC$ có

$BD = DC$ (cmt)

$\hat{B} = \hat{C}$ (cmt)

$BM = CN$ (gt)

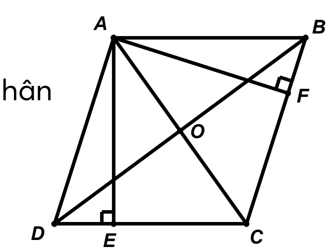
$\Rightarrow \Delta DMB = \Delta DNC$ (c.g.c)

$\Rightarrow DM = DN$ và $\widehat{MDB} = \widehat{CDN}$

$\Rightarrow \Delta DMN$ cân

Lại có : $\widehat{MDN} = \widehat{MDB} + \widehat{BDN} = \widehat{CDN} + \widehat{BDN} = \widehat{CDB} = 60^0 \Rightarrow \Delta MDN$ đều.

**VD 2.2.**

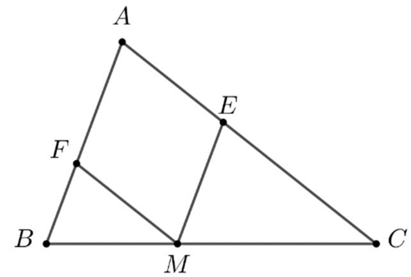



a) Do $AC$ là phân giác của góc $\widehat{DCB}$ nên theo tính chất đường phân giác ta có : $AE = FA$

b) Có $\hat{B} = 60^0$ nên $\Delta ABC$ và $\Delta ADC$ là các tam giác đều. Khi đó $AE; AF$ vừa là đường cao, đường trung trực, vừa là đường phân giác nên ta có $\Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{FAC} = 30^\circ$

Vậy $\Delta AFE$ cân và có $\widehat{FAE} = 60^o$ nên $\Delta FAE$ đều.

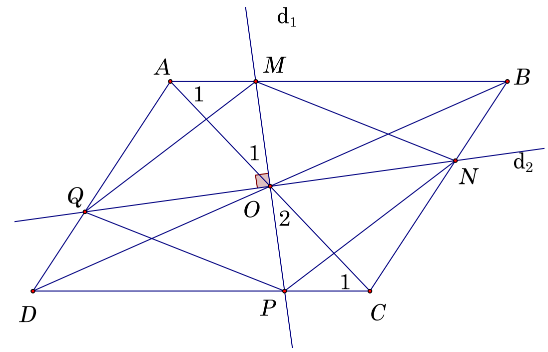
**VD 3.1.**




a) Ta có: $ME \parallel AF, MF \parallel AE \Rightarrow$ tứ giác $AFME$ là hình bình hành.

b) Nếu tứ giác $AFME$ là hình thoi $\Rightarrow AM$ là tia phân giác trong của góc $\widehat{ABC} \Rightarrow M$ là giao điểm của đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$ và cạnh $BC$.

**VD 3.2.**




a) Xét hình bình hành ABCD

$\Rightarrow$ OA = OC; OB = OD; AB // CD; AD // BC

Xét ΔAOM và ΔCOP có

OA = OC (cmt); $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (đối đỉnh); $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (slt)

$\Rightarrow$ ΔAOM = ΔCOP (g-c-g) $\Rightarrow$ OM = OP (1)

Chứng minh tương tựΔBON = ΔDOQ (g-c-g) $\Rightarrow$ ON = OQ (2)

Xét tứ giác MNPQ

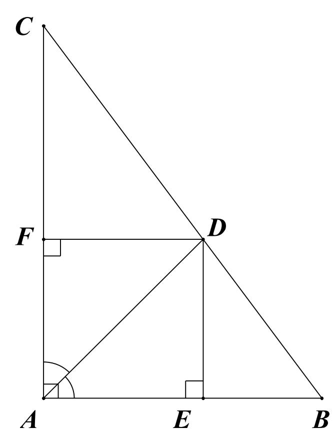
O là trung điểm MP và NQ

$\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành (dhnb)

b) Xét hình bình hành MNPQ để MNPQ là hình thoi thì MP $\perp$ QN hay $d_1 \perp d_2$.

**PHẦN II: HÌNH VUÔNG.**

**VD 1.1.**




Tứ giác $AEDF$ có $FA \,//\, DE$ (cùng vuông góc với $AE$ )

$DF \,//\, EA$ (cùng vuông góc với $FA$ )

Nên tứ giác $AEDF$ là hình bình hành.

Hình bình hành $AEDF$ có đường chéo $AD$ là phân giác của góc $A$ (gt)

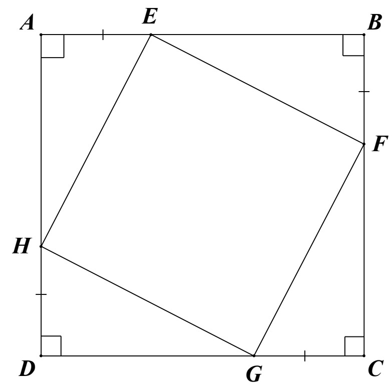
Nên tứ giác $AEDF$ là hình thoi.

Hình thoi $AEDF$ có

$\widehat{FAE} = \widehat{FAD} + \widehat{DAE} = 45° + 45° = 90°$

Suy ra tứ giác $AEDF$ là hình vuông. (dấu hiệu nhận biết hình vuông).

**VD 1.2.** Các tam giác vuông $AEH$, $BFE$, $CGF$, $DHG$ có:




$AE = BF = CG = DH$ (gt) (1) Các tam giác vuông $AEH$, $BFE$, $CGF$, $DHG$ có:

$AE = BF = CG = DH$ (gt) (1)

Theo giả thiết $ABCD$ là hình vuông nên $AB = BC = CD = DA$ (tính chất hình vuông) (2)

Mà $AH = AD - DH$, $BE = AB - AE$, $CF = BC - BF$, $DG = DC - CG$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AH = BE = CF = DG$.

Nên $\Delta AEH = \Delta BFE = \Delta CGF = \Delta DHC$ (c.g.c)

Do đó: $HE = EF = FG = GH$ (các cạnh tương ứng)

Suy ra tứ giác $EFGH$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi)

Và $\widehat{EHA} = \widehat{FEB}$ (hai góc tương ứng bằng nhau)

Theo giả thiết $ABCD$ là hình vuông nên $AB = BC = CD = DA$ (tính chất hình vuông) (2)

Mà $AH = AD - DH$, $BE = AB - AE$, $CF = BC - BF$, $DG = DC - CG$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AH = BE = CF = DG$.

Nên $\Delta AEH = \Delta BFE = \Delta CGF = \Delta DHC$ (c.g.c)

Do đó: $HE = EF = FG = GH$ (các cạnh tương ứng)

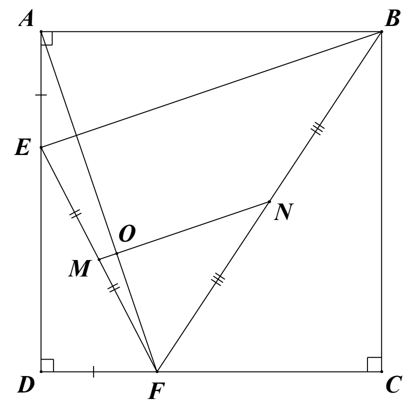
Suy ra tứ giác $EFGH$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi)

Và $\widehat{EHA} = \widehat{FEB}$ (hai góc tương ứng bằng nhau)

Ta có $\widehat{HEF} = 180° - \left(\widehat{HEA} + \widehat{FEB}\right) = 180° - \left(\widehat{HEA} + \widehat{EHA}\right) = 180° - 90° = 90°$ (vì tam giác $AHE$ vuông nên $\left(\widehat{HEA} + \widehat{EHA}\right) = 90°$)

Suy ra hình thoi $EFGH$ là hình vuông (dấu hiệu nhận biết hình vuông).

VD 2.1.




a) Xét tam giác $ADF$ vuông tại $D$, tam giác $BAE$ vuông tại $A$ có:

$AB = AD$ (tính chất hình vuông)

$AE = DF$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ADF = \Delta BAE$ (hai cạnh góc vuông)

b) Ta có $\Delta ADF = \Delta BAE \Rightarrow \widehat{DAF} = \widehat{ABE}$ (hai góc tương ứng)

Ta có $ABCD$ là hình vuông (gt) $\Rightarrow AB \,//\, CD$

$\Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{AFD}$ (hai góc so le trong)

Xét $\Delta ADF$ có $\widehat{ADF} = 90° \Rightarrow \widehat{DAF} + \widehat{AFD} = 90°$ mà $\widehat{DAF} = \widehat{ABE}$ và $\widehat{BAF} = \widehat{AFD}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BAF} + \widehat{ABE} = 90°$

Xét $\Delta ABO$ có $\widehat{BAF} + \widehat{ABE} + \widehat{AOB} = 180°$ (tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow \widehat{AOB} = 180° - 90° = 90°$

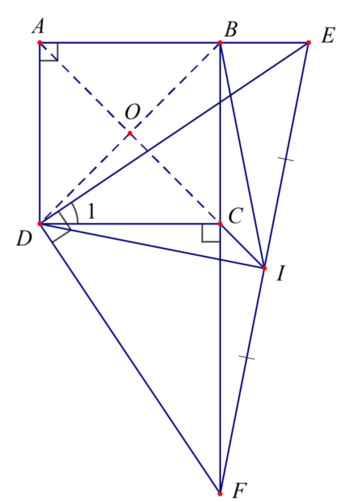
$\Rightarrow AF \perp EB$ (1)

Ta có $MN$ là đường trung bình của $\Delta EBF$ (vì $M$ là trung điểm $EF$, $N$ là trung điểm $BF$ )

$\Rightarrow MN \,//\, EB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \perp AF$ .

VD 2.2.




a) Xét $\Delta ADE$ và $\Delta CDF$ có:

+ $\widehat{A} = \widehat{C} = 90°$ ( do $ABCD$ là hình vuông)

+ $AD = CD$ ( cạnh của hình vuông $ABCD$ )

+ $AE = CF$ (giả thiết)

Suy ra: $\Delta ADE = \Delta CDF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CDF}$ (hai góc tương ứng)

và $DE = DF$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta DEF$ cân tại $D$. (1)

Lại có: $\widehat{ADE}+\widehat{D_1}=90^\circ$. Mà $\widehat{ADE}=\widehat{CDF}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{CDF}+\widehat{D_1}=90^\circ$ hay: $\widehat{EDF}=90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta EDF$ vuông cân tại $D$. (đpcm)

b) Vì $I$ là trung điểm của $EF$ nên ta có:

+ $DI$ là trung tuyến ứng với cạnh huyền $EF$ của tam giác vuông $\Delta EDF \Rightarrow DI=\dfrac{1}{2}EF$.

+ $BI$ là trung tuyến ứng với cạnh huyền $EF$ của tam giác vuông $\Delta BEF \Rightarrow BI=\dfrac{1}{2}EF$.

Do đó: $BI=DI$. (đpcm)

c) Vì $BI=DI$ nên điểm $I$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng $BD$. (3)

Lại có: $O$ là giao điểm của hai đường chéo của hình vuông $ABCD$ nên:

$OB=OD$ và $AC\perp BD$ tại $O$ ( theo tính chất của hình vuông) hay $OC\perp BD$.

Do đó: $OC$ là đường trung trực của đoạn thẳng $BD$. (4)

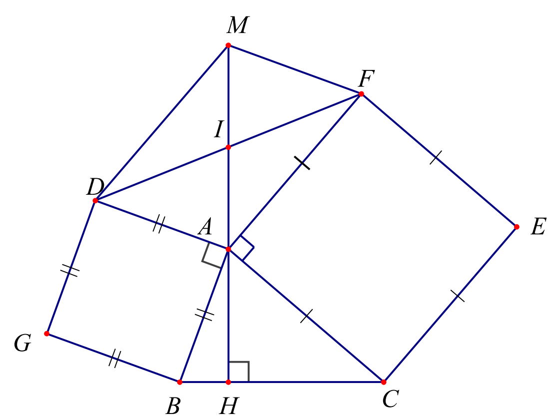
Từ (3) và (4) suy ra điểm $I$ thuộc đường thẳng $OC$.

Vậy, ba điểm $O,C,I$ thẳng hàng.

**VD 2.3.**

Qua $D$ kẻ đường thẳng song song với $AF$ cắt $AI$ tại $M$.

Vì $AH\perp BC$ (gt) nên:




$\widehat{BAH}+\widehat{ABH}=90^\circ$. (1).

Có: $\widehat{DAM}+\widehat{DAB}+\widehat{BAH}=180^\circ$

và $\widehat{BAB}=90^\circ \Rightarrow \widehat{BAH}+\widehat{DAM}=90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{ABH}=\widehat{DAM}$.

- Lại có: $\widehat{DAF}+\widehat{DAB}+\widehat{BAC}+\widehat{CAF}=360^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DAF}+\widehat{BAC}=180^\circ$. (3)

Vì $DM$ // $AF$ nên: $\widehat{DAF}+\widehat{ADM}=180^\circ$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{ADM}=\widehat{BAC}$.

- Xét $\Delta DAM$ và $\Delta ABC$ có:

$\widehat{DAM}=\widehat{ABH}$ (cmt)

$AD = AB$ ( do $ABGD$ là hình vuông)

$\widehat{ADM} = \widehat{BAC}$

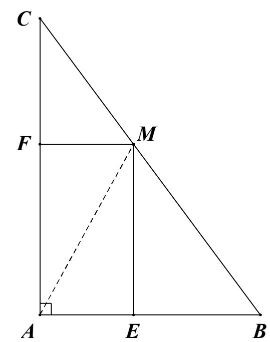
Suy ra: $\Delta DAM = \Delta ABC$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = AC$ (hai cạnh tương ứng).

Mà: $AF = AC$ ( vì $ACEF$ là hình vuông). Do đó: $DM = AF$ .

- Tứ giác $ADMF$ có $DM // AF$ và $DM = AF$ nên là hình bình hành.

Có: $I$ là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ADMF$ nên $I$ là trung điểm của đường chéo $DF$ . Do đó: $DI = IF$ . (đpcm)

VD 3.1.



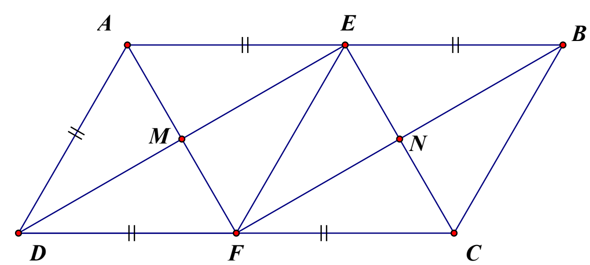

a) Xét tứ giác $AFME$ có: $ME // FA$, $FM // AE$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AFME$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành).

Hình bình hành $AFME$ vuông tại $A$ nên $AFME$ là hình chữ nhật. (dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật).

b) Để tứ giác $AFME$ là hình vuông thì $M$ là giao điểm của tia phân giác của $\widehat{CAB}$ với cạnh $BC$ (vì vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi).

VD 3.2.




a) Các tứ giác AEFD, AECF là hình gì?

Có $AE = EB\left(=\frac{1}{2}AB\right); DF = FC\left(=\frac{1}{2}DC\right); AD = \frac{1}{2}AB$

mà AB = CD (hai cạnh đối của hbh ABCD)

$\Rightarrow AE = EB = CF = DB = AD$

Tứ giác AEFD có $AE \parallel DF; AE = DF = AD \Rightarrow$ Tứ giác AEFD là hình thoi.

Tứ giác AECF có $AE \parallel CF; AE = CF \Rightarrow$ Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình chữ nhật.

Tứ giác AEFD là hình thoi $\Rightarrow FE = AE = \frac{1}{2}AB; DF = FC = \frac{1}{2}CD$ và $AF \perp DE \Rightarrow \widehat{EMF} = 90^\circ$

$\Delta AFB$ có FE là đường trung tuyến và $FE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta AFB$ vuông tại F$\Rightarrow \widehat{MFN} = 90^\circ$

$\Delta DEC$ có EF là đường trung tuyến và $EF = \frac{1}{2}CD \Rightarrow \Delta DEC$ vuông tại E$\Rightarrow \widehat{MEN} = 90^\circ$

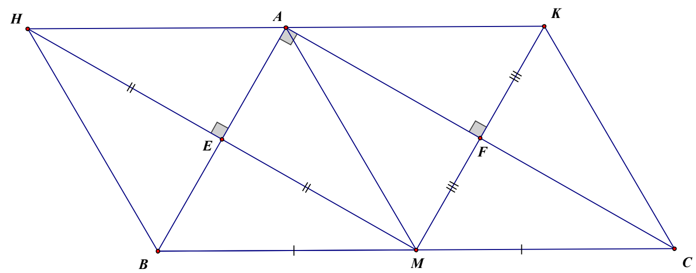
Tứ giác EMFN có $\widehat{MFN} = \widehat{MEN} = \widehat{EMF} = 90^\circ$ nên tứ giác EMFN là hình chữ nhật.

c) Hình bình hành ABCD nói trên có thêm điều kiện gì để EMFN là hình vuông?

Hình chữ nhật EMFN là hình vuông $\Leftrightarrow EM = MF \Leftrightarrow DE = \mathrm{AF} \Leftrightarrow \widehat{DAB} = 90^\circ$

Vậy hình bình hành ABCD nói trên có thêm 1 góc vuông hay hình bình hành là hình chữ nhật thì tứ giác EMFN là hình vuông.

**VD 3.3.**




a) Xác định dạng của tứ giác AEMF, AMBH, AMCK.

H là điểm đối xứng với M qua AB $\Rightarrow$ AB là đường trung trực của HM

$\Rightarrow AH = AM; BH = BM; \widehat{AEM} = 90^\circ$

K là điểm đối xứng với M qua AC $\Rightarrow$ AC là đường trung trực của KM

$\Rightarrow AM = AK; \mathrm{CM} = CK; \widehat{AFM} = 90^\circ$

Lại có BM = CM $\Rightarrow AH = BH = BM = AM = MC = CK = AK$

Tứ giác AEMF có $\widehat{AEM} = \widehat{AFM} = \widehat{EAF} = 90^\circ$ nên tứ giác AEMF là hình chữ nhật

Tứ giác AMBH có $AH = BH = BM = AM$ nên tứ giác AMBH là hình thoi

Tứ giác AMCK có $AM = MC = CK = AK$ nên tứ giác AMCK là hình thoi

b) Chứng minh rằng H đối xứng với K qua A.

Tứ giác AMBH, AMCK là hình thoi $\Rightarrow AH \parallel BM; AK \parallel MC$ mà $M \in BC \Rightarrow$ A, H, K thẳng hàng (theo tiên đề Ơclit)

Lại có AH = AK (cmt) $\Rightarrow$ A là trung điểm của HK hay H đối xứng với K qua A.

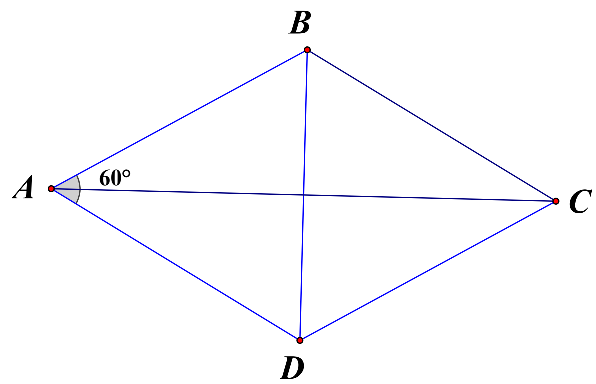
c) Tam giác vuông ABC có thêm điều kiện gì thì AEMF là hình vuông?

Hình chữ nhật AEMF là hình vuông $\Leftrightarrow EM = AE \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

## IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

## PHẦN I: HÌNH THOI.

**Bài 1.**




a) Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow \widehat{BCD}=\widehat{DAB}=60^\circ$.

Vì $AB//CD$ ( $ABCD$ là hình thoi) $\Rightarrow \widehat{DAB}+\widehat{ABC}=180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

$\Rightarrow \widehat{ABC}=180^\circ-\widehat{DAB}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{CDA}=120^\circ$.

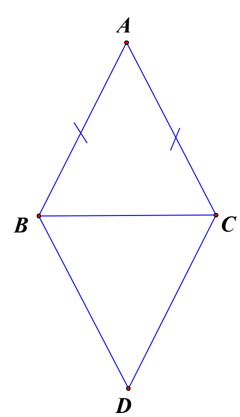
b) Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AB=BC=CD=DA$

Xét $\Delta DAB$ có $\begin{cases} DA=DB \\ \widehat{DAB}=60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta DAB$ đều $\Rightarrow \widehat{ABD}=60^\circ$.

Vì $AC\perp BD \Rightarrow AC$ là phân giác của $\widehat{DAB}$ của$\Rightarrow \widehat{BAC}=\frac{1}{2}\widehat{DAB}=\frac{1}{2}.60^\circ=30^\circ$.

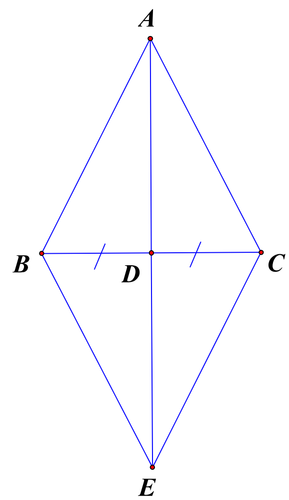
Vì $AB//CD \Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{BCD}=30^\circ$ (hai góc so le trong).

**Bài 2.**



Tứ giác $ACDB$ có $\begin{cases} CD // AB \\ BD // AC \end{cases} \Rightarrow ACDB$ là hình bình hành. Lại có $AB = AC$ (tam giác $ABC$ cân tại $A$) $\Rightarrow$ $AEDF$ là hình thoi.

**Bài 3.**




Vì $AD$ là đường trung tuyến $\Rightarrow DB = DC$ (1)

Ta có : $DA = DE\,(gt)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $ACEB$ là hình bình hành.

Vì tam giác $ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC$

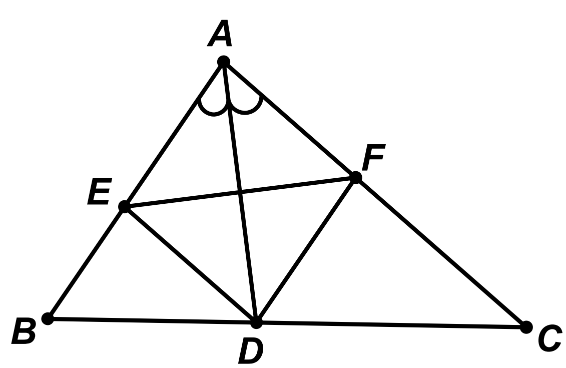
Hình bình hành $ACEB$ có $AB = AC \Rightarrow$ $ACEB$ là hình thoi.

**Bài 4.**

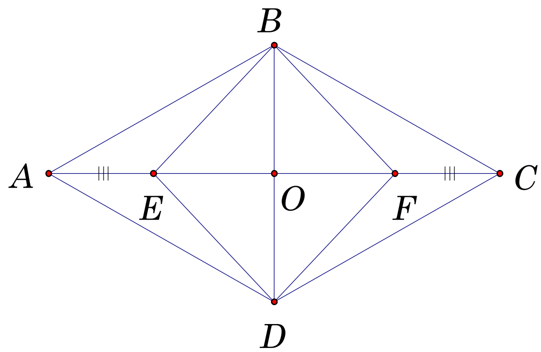
Ta có $ED//AF$; $AE//FD$ nên tứ giác $AEDF$ là hình bình hành.

Mà $AD$ là phân giác của $\widehat{EAF}$ nên tứ giác $AEDF$ là hình thoi.

$\Rightarrow$ $EF$ là phân giác của $\widehat{AED}$




**Bài 5.**




Có ABCD là hình thoi (gt) có AC cắt BD tại O

$\Rightarrow$ AC $\perp$ BD; OA = OC; OB = OD

Ta có OA = OE + EA và OC = OF + CF

Mà OA = OC và EA = CF

$\Rightarrow$ OE = FO

Xét tứ giác BEDF có

O là trung điểm của EF và BD

$\Rightarrow$ BEDF là hình bình hành (dhnb)

Mà BD $\perp$ EF (vì AC $\perp$ BD)

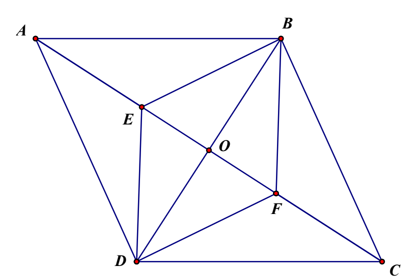
$\Rightarrow$ BEDF là hình thoi (dhnb)

**Bài 6.**

a) Vì $ABCD$ là hình thoi có $AC \cap BD = \{O\}$

nên $AO = OC$ mà $AE = CF$

$\Rightarrow AO - AE = OC - CF$ hay $EO = OF$




b) Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AD // BC$

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BCA}$ (so le trong)

Xét $\Delta AED$ và $\Delta CFB$ có:

$AE = CF; \widehat{DAC} = \widehat{BCA}; AD = BC$

$\Rightarrow \Delta AED = \Delta CFB$ (c.g.c) $\Rightarrow ED = BF$

Tương tự: $EB = DF$

$\Rightarrow EBFD$ là hình bình hành

Lại có $AC \perp BD \Rightarrow EF \perp BD$

$\Rightarrow EBFD$ là hình thoi.

**Bài 7.**

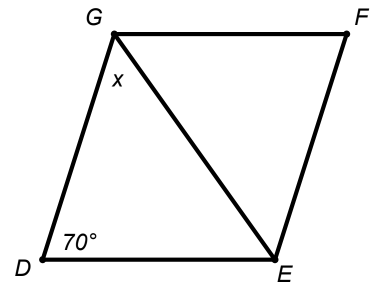
Ta có $DEFG$ là hình thoi

$\Rightarrow \widehat{DGF} + \widehat{GDE} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{GDE} = 180^\circ - \widehat{DGF} = 110^\circ$.

Do $GE$ là phân giác $\widehat{DGF}$

$\Rightarrow x = \widehat{DGE} = \dfrac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.




**Bài 8.**

a) $AEDF$ là hình chữ nhật

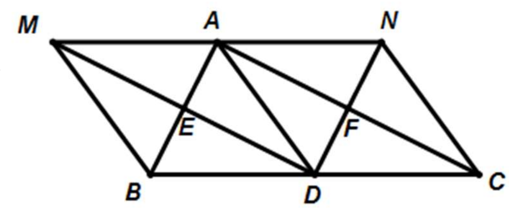
vì $\hat{A} = 90^\circ$, $AB \perp DM$ tại $E$ nên $\hat{E} = 90^\circ$, tương tự $AC \perp DN$ tại $F$

b) $\Delta ABC$ có $BD = DC$, $DE \,//\, AC$ nên $AE = BE$

Ta lại có: $DE = EM$ ($D$ đối xứng với $M$ qua $AB$)

$ADBM$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành

Hình bình hành $ADBM$ có $AB \perp DM$ nên là hình thoi.

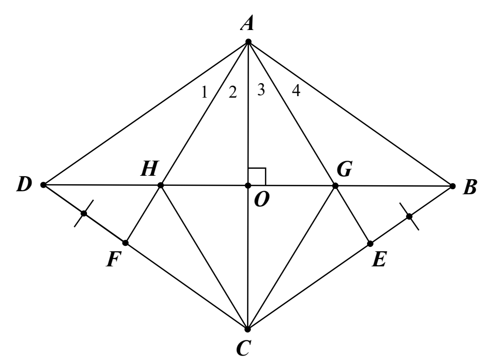



**Bài 9.** Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $AC \perp BD$ tại O theo tính chất về đường chéo của hỉnh thoi.

Áp dụng định nghĩa, tính chất về góc và giả thiết vào hình thoi ABCD, ta được:

$$\begin{cases} AB = AD \\ \hat{B} = \hat{D} \\ BE = DF \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE = ADF\left(c-g-c\right)$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_4} \qquad (1)$$



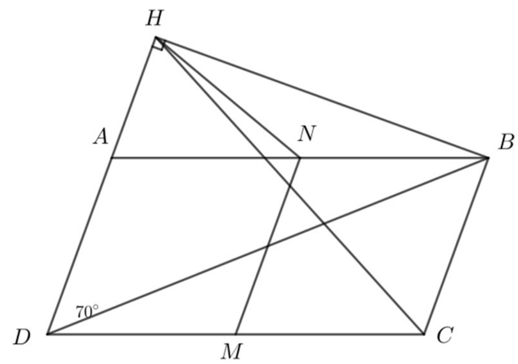

Điều này chứng tỏ tam giác AGH có đường cao AO vừa là đường phân giác nên nó cân tại A suy ra

$$HO = OG \qquad (2)$$

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình thoi ABCD ta được $AO = OC \quad (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có tứ giác AGCH là hình bình hành có đường chéo AC là phân giác của góc HAG nên nó là hình thoi.

**Bài 10.**




a) Ta có: $M$, $N$ lần lượt là trung điểm cạnh $CD$, $AB \Rightarrow MN \parallel AD \Rightarrow ANMD$ là hình bình hành.

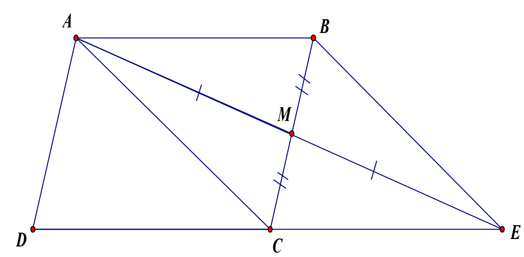
Mà $AN = \dfrac{AB}{2} = AD$. Vậy tứ giác $ANMD$ là hình thoi.

b) Tam giác $HAB$ có $HN$ là trung tuyến nên $HN = \dfrac{AB}{2} = AN = DM$. Do đó $HNMD$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{HDN} = \dfrac{\widehat{HDM}}{2} = 35°$.

Ta có: $\widehat{HCM} = \widehat{HDM} + \widehat{DHM}$ (góc ngoài của tam giác) $\Leftrightarrow \widehat{HCM} = 70° + 35° = 105°$.

**Bài 11.**

**Lời giải**




a) Xét tứ giác $ABEC$ có:

$AM = ME; BM = CM$

$\Rightarrow ABEC$ là hình bình hành

Mà $AB = AC$ (gt)

$\Rightarrow ABEC$ là hình thoi

b) Vì $ABEC$ là hình thoi nên $AB // EC$ (1)

Mà $ABCD$ là hình bình hành nên $AB // CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $D; C; E$ thẳng hàng (Tiên đề Ơ-clit)

c) Vì $ABEC$ là hình thoi nên $AB = CE$ (3)

$ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $CE = CD$

Lại có, $D;C;E$ thẳng hàng (theo 2)

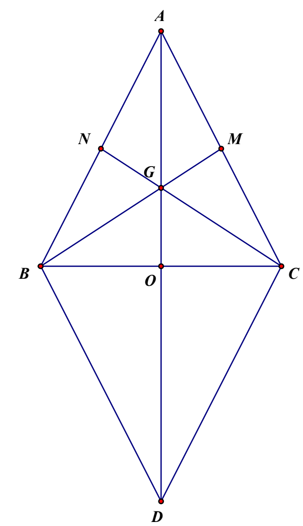
Nên $C$ là trung điểm của $DE$.

**Bài 12.**

a) Vì $AB // CD; AC // BD$ nên $ABCD$ là hình bình hành

Vì $\Delta ABC$ cân tại A nên $AB = AC$

Vậy $ABCD$ là hình thoi.




b) Vì $BM;CN$ là các đường trung tuyến của $\Delta ABC$

Mà $BM \cap CN = \{G\}$ nên $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$

$\Rightarrow AG$ là đường trung tuyến đồng thời là đường cao của $\Delta ABC$

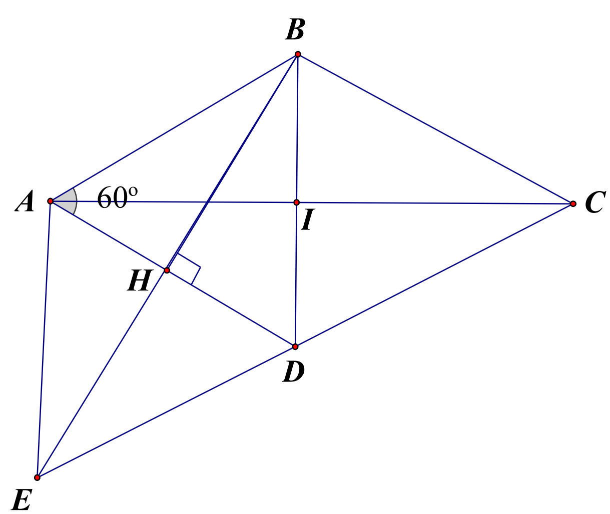
mà $AG$ cắt $BC$ tại $O$.

$\Rightarrow AO \perp BC$ hay $AO$ là đường cao của $\Delta ABC$.

c) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AD \perp BC$

mà $AO \perp BC$ $\Rightarrow A;O;D$ thẳng hàng.

**Bài 13.**




a) Ta có: $AB = AD$ ( vì $ABCD$ là hình thoi)

Và $\widehat{A} = 60^\circ$

Suy ra: $\Delta ABD$ là tam giác đều.

Mà $BH \perp AD$ nên $H$ là trung điểm của $AD$.

b) Xét tứ giác $ABDE$ có:

$HA = HD$ ( chứng minh trên)

$HE = HB$ (Giả thiết)

$\Rightarrow ABDE$ là hình bình hành.

Mặc khác: $AD \perp BE$ nên $ABDE$ là hình thoi

c) Ta có: $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow DC = AB,\ DC \,//\, AB$ $(1)$

$ABDE$ là hình thoi $\Rightarrow DE = AB,\ DE \,//\, AB$ $(2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $C,D,E$ thẳng hàng ( theo tiên đề Ơclit) và $DC = DE$ .

Vậy $D$ là trung điểm của $CE$.

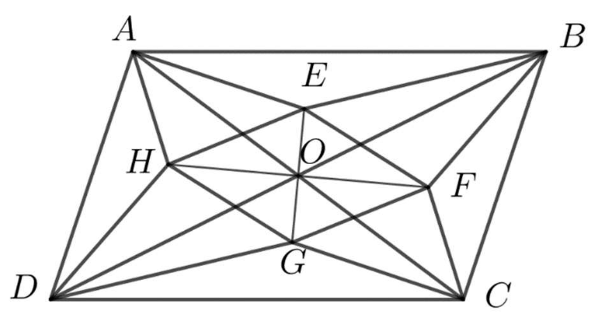
d) Ta có:

$AC = 2AI$ ( vì $ABCD$ là hình thoi)

$BE = 2BH$ ( vì $ABDE$ là hình thoi)

Mà $BH = AI$ ( cùng là đường cao của tam giác đều $ABD$ )$\Rightarrow AC = BE$.

**Bài 14.**




a) Ta có $OE$ là phân giác của góc $\widehat{AOB}$, $OG$ là phân giác của góc $\widehat{COD}$.

Mà $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (hai góc đối đỉnh).

$\Rightarrow OE, OG$ cùng thuộc một đường thẳng hay $O, E, G$ thẳng hàng.

Tương tự ta có $OH$ là phân giác của góc $\widehat{AOD}$, $OF$ là phân giác của góc $\widehat{COB}$.

Mà $\widehat{AOD} = \widehat{COB}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow OH, OF$ cùng thuộc một đường thẳng hay $O, H, F$ thẳng hàng.

b) Ta có: $\widehat{EAB} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC},\ \widehat{GCD} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACD}$. Mà $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{GCD}$ $(1)$.

Tương tự $\widehat{EBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABD},\ \widehat{GDC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BDC}$ . Mà $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{GDC}$ $(2)$.

Mặt khác $AB = CD\ (3)$.

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow$ tam giác $AEB$ và $CGD$ bằng nhau.

c) Ta có: $\widehat{OAE} = \dfrac{1}{2}\widehat{CAB},\ \widehat{OCG} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACD}$. Mà $\widehat{CAB} = \widehat{ACD}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{OCG}$ .

Tương tự $\widehat{COG} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD},\ \widehat{AOE} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$. Mà $\widehat{COD} = \widehat{AOB}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{COG} = \widehat{AOE}$ .

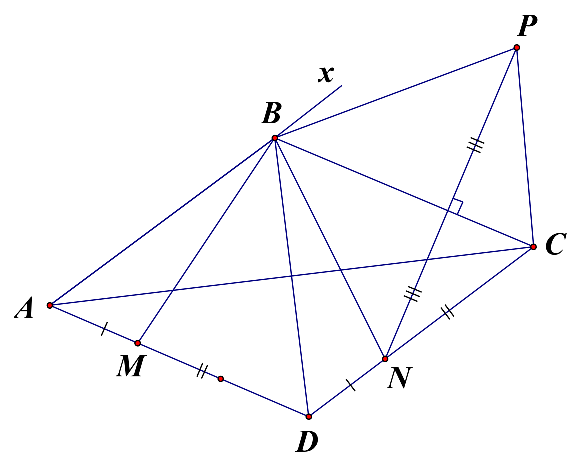
Mà $OA = OC$. Suy ra $\Delta AOE = \Delta COG\,(g-c-g) \Rightarrow OE = OG\ (4)$.

Tương tự ta chứng minh được $\Delta OCF = \Delta OAH\,(g-c-g) \Rightarrow OF = OH\ (5)$.

Mặt khác $OH \perp OE$ (tia phân giác của 2 góc kề bù) $(6)$ .

Từ $(4),(5),(6) \Rightarrow$ tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

**Bài 15.**




Tứ giác ABCD là hình thoi

=> BD là đường phân giác $\widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DBC}$

Mà $\widehat{A} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DBC} = 60^0$

$\triangle ABD$ có $\widehat{A} = 60^0, AB = AD \Rightarrow \Delta ABD$ đều

$\Rightarrow AB = BD, \widehat{ABD} = \widehat{ADB} = 60^0$

Lại có

$AM + CN = AD, AD = DC \Rightarrow AM = DN, MD = CN$

Mặt khác DB là phân giác

$\widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{BDC} = 60^0$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DBN$ có

$$DN = AM\,(cmt)$$
$$AB = BD(cmt)$$
$$\widehat{BAM} = \widehat{BDN}(cmt)$$

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta DBN(c.g.c)$

$\Rightarrow BM = BN; \widehat{ABM} = \widehat{DBN}$

Trong $\triangle NBP$ có BC vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến

$\Rightarrow \Delta NBP$ cân tại B $\Rightarrow BN = BP$, mà $BN = BM$

$\Rightarrow BP = BM \Rightarrow \triangle MBP$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{BMP} = \widehat{BPM}$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ABM} = \widehat{DBM} \\ \widehat{ABM} + \widehat{MBD} = 60^0\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DBN} + \widehat{MBD} = 60^0$$

Mà $\widehat{DBN} + \widehat{NBC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{NBC} = \widehat{MBD}$

$\triangle NBP$ cân => đường cao BC đồng thời là đường phân giác $\Rightarrow \widehat{NBC} = \widehat{CBP} = \widehat{MBD}$

$\Rightarrow \widehat{NBC} = \widehat{MBD}$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{CBP} + \widehat{PBx} = 60^0 \\ \widehat{MBD} + \widehat{PBx} = 60^0\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{PBx}$$

$\Rightarrow 2\widehat{ABM} + \widehat{MBP} = 180^0$

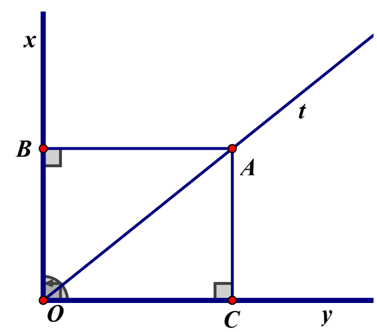
mà $2\widehat{BMP} + \widehat{MBP} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BMP}$

mà chúng ở vị trí so le trong $\Rightarrow MP // DC$, mà $QC // MD$ => $MDCQ$ là hình bình hành.

**PHẦN II: HÌNH VUÔNG.**

**Bài 1.**




Xét tứ giác OBAC, có:

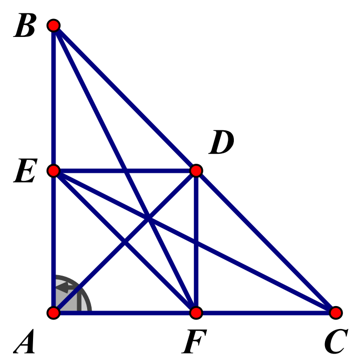
$\widehat{O} = \widehat{B} = \widehat{A} = 90^\circ$.

Vậy tứ giác OBAC là hình chữ nhật.

Mà $\Delta OAB = \Delta OAC$ (ch-gn) $\Rightarrow AB = AC$.

Vậy OBAC là hình vuông.

Bài 2.




a) Vì DE || AC và AB $\perp$ AC nên DE $\perp$ AE

Vì DF || AB và AB $\perp$ AC nên DF $\perp$ AF

Do đó AEDF là hình chữ nhật.

Mà $\Delta ADE = \Delta ADF$ (ch-gn) $\Rightarrow DE = DF$.

Vậy AEDF là hình vuông.

b) Xét $\Delta ACE$ và $\Delta ABF$, ta có:

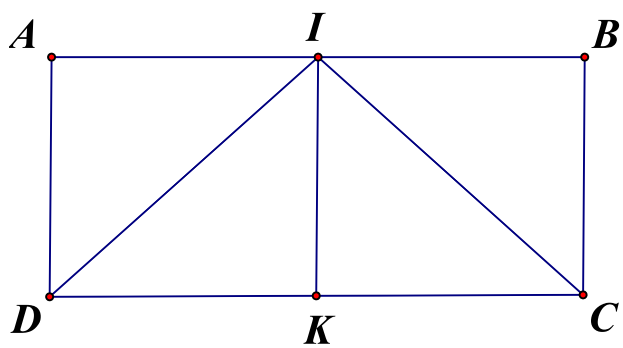
AE = AF (cmt).

$\widehat{EAC} = \widehat{FAB} = 90^\circ$.

AC = AB (gt).

Do đó $\Delta ACE = \Delta ABF \quad (c\text{-}g\text{-}c) \Rightarrow CE = BF$ .

**Bài 3.**




a) Vì tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AB//CD, AB = CD$, $AB \perp CD$

Vì $I, K$ lần lượt là trung điểm của $AB, CD$ nên $AI = \frac{1}{2}AB; DK = \frac{1}{2}CD$

Suy ra $AI// = DK$ .

Suy ra tứ giác $AIKD$ là hình chữ nhật.

Lại có: $AI = AD = \frac{1}{2}AB$. Suy ra tứ giác $AIKD$ là hình vuông

Chứng minh tương tự ta được tứ giác $BIKC$ là hình vuông.

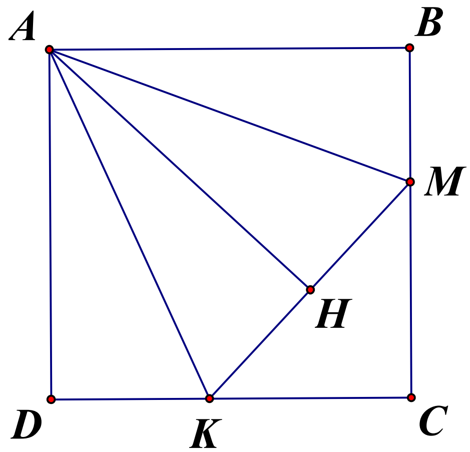
b) Vì tứ giác $AIKD$ là hình vuông nên $IK = AD$ mà $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$ suy ra: $IK = \frac{DC}{2}$

Vì tứ giác $AIKD$ là hình vuông nên $AK \perp DI$

Tứ giác $AICK$ có $AI = CK$ và $AI//CK$ nên là hình bình hành. Suy ra $AK//IC$ .

Suy ra: $DI \perp IC$ hay $\widehat{DIC} = 90^0$

**Bài 4.**




a) Xét hai tam giác vuông $ABM$ và $AHM$ có:

$AM$ chung;

$\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta AHM$ suy ra $AH = AB = AD$.

b) Xét hai tam giác vuông $DAK$ và $HAK$ có:

$AK$ chung;

$AD = AH$ (theo câu a)

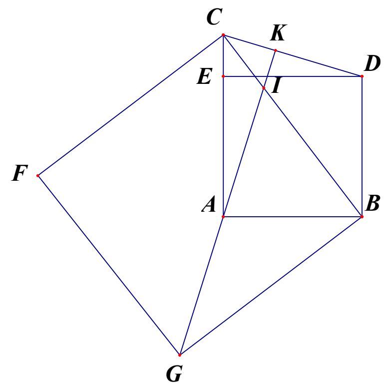
$\Rightarrow \Delta DAK = \Delta HAK$

Vì $\Delta ABM = \Delta AHM$ nên $\widehat{BAM} = \widehat{HAM} = \frac{1}{2}\widehat{BAH}$

Vì $\Delta DAK = \Delta HAK$ nên $\widehat{HAK} = \widehat{DAK} = \frac{1}{2}\widehat{ADH}$

Suy ra $\widehat{MAK} = \widehat{MAH} + \widehat{HAK} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAH} + \widehat{DAH}\right) = 45^0$

**Bài 5.**




a) Ta có: $\widehat{GBA}+\widehat{ABC}=90^0$ mà $\widehat{ABC}+\widehat{CBD}=90^0 \Rightarrow \widehat{GBA}=\widehat{CBD}$

b) Xét $\Delta ABG$ và $\Delta DBC$ có: $AB=DB$; $\widehat{GBA}=\widehat{CBD}$; $BG=BC$

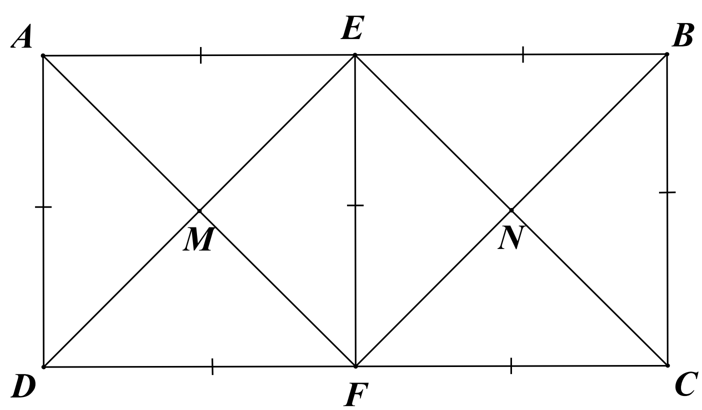
$\Rightarrow \Delta ABG=\Delta DBC$ (c.g.c)

Suy ra GA = CD và $\widehat{BCD}=\widehat{AGB}$

c) Vì $\widehat{AGB}+\widehat{AIB}=90^0$ mà $\widehat{BCD}=\widehat{AGB}$ và $\widehat{AIB}=\widehat{CIK}$ $\Rightarrow \widehat{CIK}+\widehat{BCD}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{CKI}=90^0$. Vậy: $GA\perp DC$ tại $K$

**Bài 6.**




a) Xét tứ giác $ADFE$ có:

$AE\,//\,DF$, $AE=DF$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFE$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

Hình bình hành $ADFE$ có $\widehat{A}=90^\circ$ nên là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật).

Theo giả thiết $AB=2AD$ mà $AE=\dfrac{AB}{2}$ nên $AE=AD=\dfrac{AB}{2}$

Hình chữ nhật $ADFE$ có $AE=AD$ nên là hình vuông (dấu hiệu nhận biết hình vuông).

b) Xét tứ giác $DEBF$ có:

$EB \,//\, DF$, $EB = DF$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $DEBF$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

$\Rightarrow$ $DE \,//\, BF$ (tính chất hình bình hành)

Xét tứ giác $AECF$ có:

$EA \,//\, CF$, $EA = CF$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AECF$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

$\Rightarrow$ $AF \,//\, EC$ (tính chất hình bình hành)

- Xét tứ giác $AMFN$ có:

$DE \,//\, BF$, $AF = EC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMFN$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

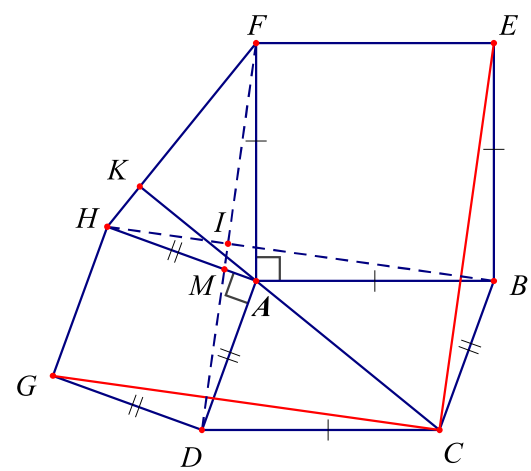
Theo câu a, ADEF là hình vuông nên $ME = MF$, $ME \perp MF$ (tính chất hình vuông).

Hình bình hành EMFN có $\widehat{M} = 90^\circ$ nên EMFN là hình chữ nhật, ta lại có $ME = MF$ nên $EMFN$ là hình vuông (dấu hiệu nhận biết hình vuông).

Bài 7.

a) Chứng minh: $AC = HF$.

Ta có: $\widehat{HAF} + \widehat{HAD} + \widehat{DAB} + \widehat{BAF} = 360^\circ$. Mà:




$\widehat{HAD} = \widehat{BAF} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{HAF} + \widehat{DAB} = 180^\circ$ (1)

Lại có: $ABCD$ là hình bình hành nên:

$\widehat{ADC} + \widehat{DAB} = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{HAF} = \widehat{ADC}$.

- Xét $\Delta AHF$ và $\Delta DAC$ có:

+ $AH = AD$ (do $ADGH$ là hình vuông)

+ $\widehat{HAF} = \widehat{ADC}$ (cmt)

+ $AF = DC$ ( vì cùng bằng )

Suy ra: $\Delta AHF = \Delta DAC$ (c.g.c) $\Rightarrow HF = AC$ (hai cạnh tương ứng) (đpcm).

* Chứng minh: $AC \perp HF$

Gọi $K$ là giao điểm của $AC$ và $HF$. Ta có:

$\widehat{HAK} + \widehat{DAC} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{DAC} = \widehat{AHK}$ (do $\Delta AHF = \Delta DAC$)

Do đó: $\widehat{HAK} + \widehat{AHK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AKH} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp HF$ hay $AC \perp HF$ (đpcm)

b) Ta có: $\widehat{BAH} = 90^\circ + \widehat{HAF}$ và $\widehat{DAF} = 90^\circ + \widehat{HAF}$. Suy ra: $\widehat{BAH} = \widehat{DAF}$.

- Xét $\Delta ABH$ và $\Delta AFD$ có:

+ $AB = AF$

+ $\widehat{BAH} = \widehat{DAF}$

+ $AH = AD$

Suy ra: $\Delta ABH = \Delta AFD$ (c.g.c) $\Rightarrow BH = DF$ (hai cạnh tương ứng) (3)

và: $\widehat{AHB} = \widehat{ADF}$ (hai cạnh tương ứng)

- Gọi $I, M$ lần lượt là giao điểm của $DF$ với $BH$ và $AH$.

Ta có: $\widehat{IMH} = \widehat{AMD}$ (đối đỉnh)

$\widehat{AHB} = \widehat{ADF}$ hay: $\widehat{MHI} = \widehat{ADM}$

Do đó: $\widehat{IMH} + \widehat{MHI} = \widehat{AMD} + \widehat{ADM} = 90^\circ$. Suy ra: $\widehat{HIM} = 90^\circ \Rightarrow BH \perp DF$.

- Ta lại có: $BC \mathbin{//} GH$ và $BC = GH$ (do cùng song song và bằng $AD$) nên tứ giác $BCGH$ là hình bình hành. Suy ra $BH \mathbin{//} CG$ và $BH = CG$. (4)

Chứng minh tương tự ta có: $CDFE$ là hình bình hành nên $DF \mathbin{//} CE$ và $DF = CE$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra: $CG = CE \Rightarrow \Delta CEG$ cân tại $C$.

Lại có: $BH \mathbin{//} CG$ và $DF \perp BH$ nên: $DF \perp CG$. Mà: $CE \mathbin{//} DF \Rightarrow CE \perp CG$

Suy ra: $\Delta CEG$ vuông cân tại $C$. (đpcm)

**Bài 8.**

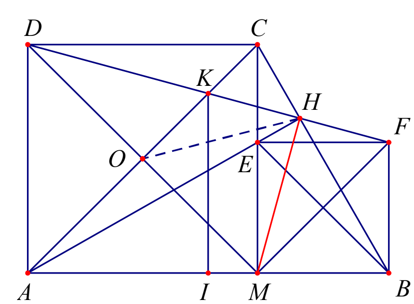
a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên $CM \perp AB$

và $AC$ là tia phân giác của $\widehat{DAM} \Rightarrow \widehat{CAM} = 45^\circ$

Chứng minh tương tự, ta có: $\widehat{BMF} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{BMF}$.

Mà $\widehat{CAM}, \widehat{BMF}$ là hai góc đồng vị. Suy ra: $AC \mathbin{//} MF$.



Lại có: $BE \perp MF$ ( do $BMEF$ là hình vuông)

Do đó: $BE \perp AC$.

Ta có: $\Delta ABC$ có hai đường cao $CM$ và $BE$ cắt nhau tại $E$ nên $E$ là trực tâm của $\Delta ABC$.

$\Rightarrow AE$ là đường cao của $\Delta ABC$.

Do đó: $AE \perp BC$. (đpcm)

b) Vì $AE \perp BC$ tại $H$ nên $\Delta AHC$ vuông tại $H$.

Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $DM$.

Ta có: $AC = DM$ và $O$ là trung điểm của $AC$ và $DM$.

Trong tam giác vuông $AHC$, có: $HO$ là trung tuyến ứng với cạnh huyền $AC$ nên:

$HO = \dfrac{1}{2}AC$

Mà: $AC = DM$ nên $HO = \dfrac{1}{2}DM$.

$\Delta DHM$ có trung tuyến $HO$ bằng nửa cạnh $DM$ nên $\Delta DHM$ vuông tại $H$

$\Rightarrow \widehat{DHM} = 90^\circ$

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{MHF} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{DHM} + \widehat{MHF} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Suy ra: ba điểm $D, H, F$ thẳng hàng. (đpcm)

c) Gọi $K$ là giao điểm của $AC$ và $DF$.

$\Delta DMF$ có: $\begin{cases} OD = OM \\ OK \,//\, MF \end{cases}$ nên $K$ là trung điểm của $DF$.

Kẻ $KI \perp AB$. Ta có: $KI \,//\, DA \,//\, FB$ ( vì cùng vuông góc với $AB$ )

Suy ra: $I$ là trung điểm của $AB$.

$\Rightarrow KI$ là đường trung bình của hình thang $ABFD$.

Do đó: $KI = \dfrac{BF + AD}{2} = \dfrac{BM + MA}{2} = \dfrac{AB}{2}$.

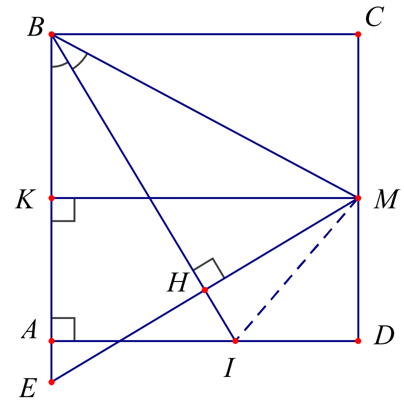
Ta có : $I$ là điểm cố định, độ dài $AB$ không đổi, và $KI \perp AB$ tại $I$ nên điểm $K$ là điểm cố định ( $K$ nằm trên đường trung trực của $AB$ và cách $AB$ một khoảng bằng $\dfrac{AB}{2}$ ).

Vậy $DF$ luôn đi qua điểm $K$ cố định khi điểm $M$ chuyển động trên đoạn thẳng $AB$ cố định).

**Bài 9.**

- Kẻ $MH \perp BI$.

Ta có: $MH \le BI$ (1) (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc).




Gọi $E$ là giao điểm của $MH$ và $AB$.

$\Delta BME$ có $BH$ vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên cân tại $B$.

$\Rightarrow ME = 2MH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $ME \le 2MI$ (3)

- Kẻ $MK \perp AB \Rightarrow MK = BC = AB$.

Xét $\Delta ABI$ và $KME$ có:

+ $\widehat{A} = \widehat{K} = 90^\circ$

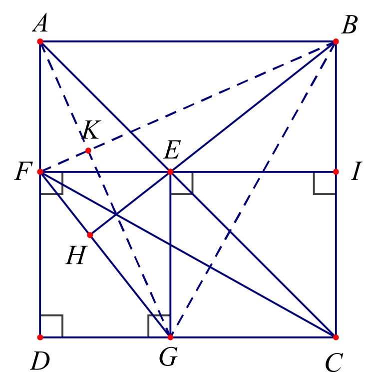
+ $AB = MK$ (cmt)

+ $\widehat{ABI} = \widehat{KME}$ ( cùng phụ với $\widehat{BAH}$. Suy ra: $\Delta ABI = \Delta KEM$ (g.c.g)

$\Rightarrow BI = ME$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $BI \le 2MI$ (đpcm).

**Bài 10.**




a) Chứng minh $EB = FG$.

Gọi $I$ là giao điểm của $EF$ và $BC$.

Tứ giác $ABIF$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

$\Rightarrow BI = AF$ (1)

Hình vuông $ABCD$ có $AC$ là đường chéo nên $\widehat{EAF} = 45^\circ$.

$\Rightarrow \Delta AFE$ vuông cân tại $F \Rightarrow EF = AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BI = EF$

Chứng minh tương tự ta có: $IC = IE \Rightarrow CIEG$ là hình vuông.

$\Rightarrow IE = EG$.

Xét hai tam giác vuông $BIE$ và $FEG$ có:

+ $BI = EF$

+ $IE = EG$

Suy ra: $\Delta BIE = \Delta FIG$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow EB = FG$ ( hai cạnh tương ứng) (đpcm)

* Chứng minh $BE \perp FG$

Gọi $H$ là giao điểm của $BE$ và $HG$.

Ta có: $\Delta BIE = \Delta FIG \Rightarrow \widehat{BEI} = \widehat{FGE}$ ( hai góc tương ứng)

Do đó: $\widehat{HEG} + \widehat{FGE} = \widehat{HEG} + \widehat{BEI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EHG} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp FG$.

b) Gọi $K$ là giao điểm của $BF$ và $CG$.

Xét $\Delta ADG$ và $\Delta BAF$ có:

+ $DG = AF$ (cùng bằng $EF$ )

+ $\widehat{ADG} = \widehat{ABI} = 90^\circ$

+ $AD = AB$ (vì $ABCD$ là hình vuông).

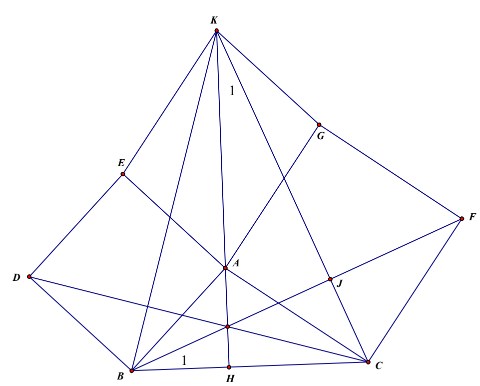
Suy ra: $\Delta ADG = \Delta BAF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DAG} = \widehat{ABF}$ .

Mà: $\widehat{ABF} + \widehat{AFK} = 90^\circ$ . Do đó: $\widehat{DAG} + \widehat{AFK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AKF} = 90^\circ \Rightarrow AG \perp BF$

Tương tự, chứng minh được: $CF \perp BG$.

Ta có: $BE, AG, CF$ là ba đường cao của tam giác $BFG$ nên chúng đồng quy tại một điểm. (đpcm)

**Bài 11.**




a) Vì tứ giác $EAGK$ là hình bình hành.

$\Rightarrow EK // AG \Rightarrow \widehat{KEA} + \widehat{EAG} = 180^\circ$ (1)

Mặt khác, $\widehat{EAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAG} + \widehat{EAG} = 360^\circ$.

Mà $\widehat{EAB} + \widehat{CAG} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{EAG} = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KEA} = \widehat{BAC}$

Vì tứ giác $EAGK$ là hình bình hành nên $EK = AG$

Vì tứ giác $ACFG$ là hình vuông nên $AG = AC \Rightarrow AC = EK$

Xét $\Delta AEK$ và $\Delta BAC$ có:

$AB = AE$ (vì $ABDE$ là hình vuông)

$\widehat{KEA} = \widehat{BAC}$

$AC = EK$

$\Rightarrow \Delta AEK = \Delta BAC\ (c.g.c) \Rightarrow AK = BC$ (hai cạnh tương ứng).

Gọi $H$ là giao điểm của $KA$ và $BC$.

Ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{EAB} + \widehat{EAK} = 180^\circ$ mà $\widehat{EAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{EAK} = 90^\circ$

Mà $\widehat{EAK} = \widehat{ABC}$ hay $\widehat{EAK} = \widehat{ABH} \Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ$

$\Rightarrow AH \perp BC$ hay $AK \perp BC$

b) Ta có $AK$ là đường cao thứ nhất của tam giác $KBC$

Gọi $J = BF \cap KC$

Theo câu a) ta có $\Delta KGA = \Delta AEK = \Delta BAC$ nên $\widehat{BCA} = \widehat{GAK}$

Do đó $\widehat{BCF} = 90^0 + \widehat{BCA} = 90^0 + \widehat{GAK} = \widehat{KAC}$

Suy ra $\Delta BCF = \Delta KAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{K_1}$

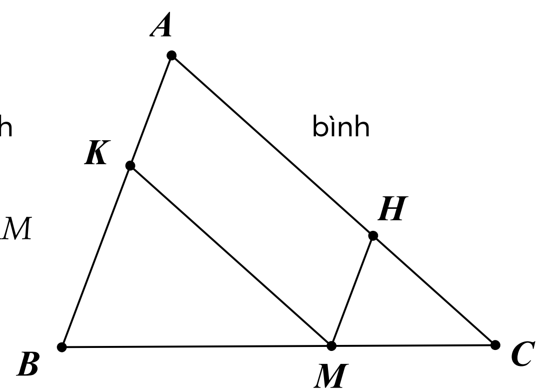
Từ đó $\widehat{B_1} + \widehat{BCJ} = \widehat{K_1} + \widehat{BCJ} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BJC} = 90^0$ hay $BF \perp KC$

Do đó $BF$ là đường cao thứ hai của tam giác $KBC$

Chứng minh tương tự có $CD$ là đường cao thứ ba của tam giác $KBC$

Vậy ba đường thẳng $AK, BF, CD$ đồng quy.

**Bài 12.**



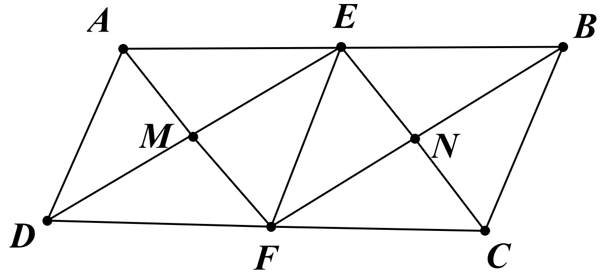

a) Tứ giác $AHMK$ có $MH // AK$, $AH // KM$ nên là hình bình hành.

b) $AHMK$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ hình bình hành $AHMK$ có $AM$ là đường phân giác của góc $A$.

Vậy nếu $M$ là giao điểm của tia phân giác của góc $A$ với cạnh $BC$ thì $AHMK$ là hình thoi.

$AHMK$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow AHMK$ là hình chữ nhật có $\hat{A} = 90^0 \Leftrightarrow ABC$ là tam giác vuông tại $A$.

**Bài 13.**



a) Tứ giác $AEFD$ là hình bình hành.
b) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.
c) Tứ giác $EMFN$ là hình chữ nhật.
d) Tứ giác $EMFN$ là hình vuông $\Leftrightarrow$ Hình chữ nhật $EMFN$ có $ME = MF$

$\Leftrightarrow DE = FA$

$\Leftrightarrow$ Hình thoi $AEFD$ có hai đường chéo bằng nhau

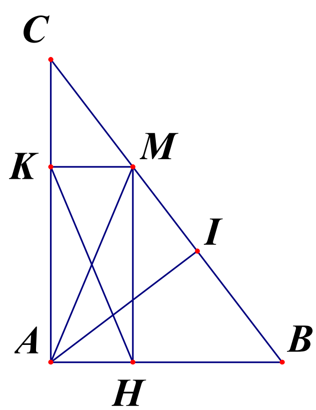
$\Leftrightarrow AEFD$ là hình vuông

$\Leftrightarrow \widehat{A} = 90^0$

$\Leftrightarrow$ Hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

Như vậy, hình chữ nhật $EMFN$ là hình vuông nếu $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2AD$.

**Bài 14.**




a) Tứ giác $AHMK$ có : $\widehat{KAH} = \widehat{AHM} = \widehat{AKM} = 90^0$ nên tứ giác $AHMK$ là hình chữ nhật.

b) Để Tứ giác $AHMK$ là hình vuông thì $AM$ phải là tia phân giác của góc $ABC$

c) Do tam giác $AMI$ vuông tại $I$ nên $AM \geq AI$

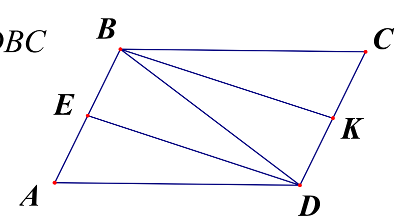
Vì tứ giác $AHMK$ là hình chữ nhật nên $AM = HK$

Suy ra : $AM + HK = 2AM$

Để $AM + HK = 2AM$ nhỏ nhất thì $AM = AI$

Khi đó $M$ là chân đường vuông góc kẻ từ $A$ xuống $BC$ .

**Bài 15.**




1) Vì $DE, BK$ lần lượt là đường phân giác của các $\Delta ADB$ và $\Delta DBC$ nên $\widehat{EDB} = \frac{1}{2}\widehat{ADB}; \widehat{DBK} = \frac{1}{2}\widehat{DBC}$ mà $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ . Suy ra:

$\widehat{EDB} = \widehat{KBD}$

Suy ra: $DE // BK$ .

2) Vì $DE \perp AB$ mà $DE$ là phân giác trong tam giác $ABD$ nên tam giác $ABD$ cân tại $D$

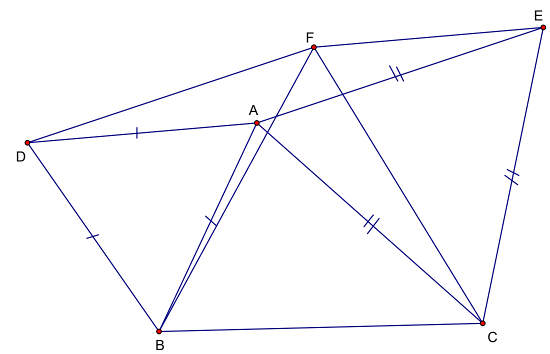
Suy ra: $DA = DB$.

3) Tứ giác $EBKD$ là hình bình hành có $DE \perp AB$ nên $EBKD$ là hình chữ nhật.

Để tứ giác $EBKD$ là hình vuông thì $ED = EB$.

Suy ra tam giác $ABD$ vuông tại $D$, tức là $\widehat{ADB} = 90^0$

**Bài 16.**




+ Ta có: $DF = AE$ ( $ABCD$ là hình bình hành)

$AE = CE$ ( $\Delta AEC$ đều)

$\Rightarrow DF = CE$.

Chứng minh tương tự ta có: $DB = FE (= AD)$.

+) $\widehat{ADF} = \widehat{FEA}$ ( $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow \widehat{ADF} + 60^0 = \widehat{FEA} + 60^0$

$\Rightarrow \widehat{ADF} + \widehat{ADB} = \widehat{FEA} + \widehat{AEC}$

=> $\widehat{BDF} = \widehat{FEC}$

+) Xét $\Delta BDF$ và $\Delta FEC$ có:

$DF = EC$ (chứng minh trên)

$\widehat{BDF} = \widehat{FEC}$ (chứng minh trên)

$DB = FE$ (chứng minh trên)

Suy ra: $\Delta BDF = \Delta FEC$ (c.g.c)

$\Rightarrow BF = FC$ (hai cạnh tương ứng) (1).

+) Có: $\widehat{DAE} + \widehat{BAC} + \widehat{DAB} + \widehat{CAE} = 360^0$

=> $\widehat{BAC} = 360^0 - (\widehat{DAB} + \widehat{CAE}) - \widehat{DAE}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 360^0 - (60^0 + 60^0) - \widehat{DAE} = 240^0 - \widehat{DAE}$

Mà $\widehat{DAE} = 180^0 - \widehat{DAF}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 240^0 - (180^0 - \widehat{ADF}) = 60^0 + \widehat{ADF} = \widehat{BDA} + \widehat{ADF} = \widehat{BDF}$

+) Xét $\Delta BDF$ và $\Delta BAC$ có:

$BD = AD$ ( $\Delta BAD$ đều)

$\widehat{BDF} = \widehat{BAC}$ (chứng minh trên)

$DF = AC\left(= AE\right)$

Suy ra: $\Delta BDF$ và $\Delta BAC$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ $BF = BC$ (hai cạnh tương ứng)         (2).

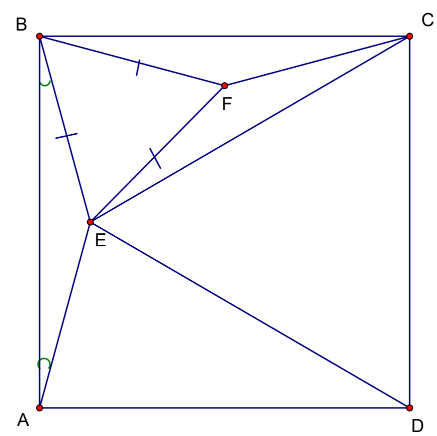
Từ (1) và (2) $\Rightarrow BF = FC = BC$ $\Rightarrow$ $\Delta FBC$ đều.

**Bài 17.**

a) Ta có:

+) $\Delta CDF$ đều $\Rightarrow$ $\widehat{BEF} = \widehat{EBF} + \widehat{EFB} = 60^0$

+) $\widehat{ABE} + \widehat{EBF} + \widehat{FBC} = \widehat{ABC} = 90^0$ ( $ABCD$ là hình vuông)




$\Rightarrow \widehat{FBC} = 90^0 - (\widehat{ABE} + \widehat{EBF}) = 90^0 - (15^0 + 60^0) = 15^0$

+) Xét $\Delta ABE$ và $\Delta CBF$ có:

$AB = BC$ ( $ABCD$ là hình vuông)

$\widehat{EBA} = \widehat{FBC}$ $(= 15^0)$

$BE = BF$ ( $\Delta BEF$ đều )

Suy ra: $\Delta ABE$ = $\Delta CBF$ (c.g.c)

b) Vì $\Delta ABE$ = $\Delta CBF$ $\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{FCB} = 15^0$ (hai góc tương ứng).

Tam giác $CBF$ có: $\widehat{FBC} = \widehat{FCB}\left(= 15^0\right)$ nên $\Delta CBF$ cân tại $F$.

c) Ta có: $FC = FB$ ( $\Delta CBF$ cân tại F)

Mà: $FB = FE$ ( $\Delta BEF$ đều )

$FC = FE$ $\Rightarrow$ $\Delta CEF$ cân tại $F$

$\Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{FCE}$ (hai góc ở đáy).

+) $\widehat{EBC} = 90^0 - \widehat{ABE} = 90^0 - 15^0 = 75^0$

+) Xét $\Delta ECB$ có: $\widehat{EBC} + \widehat{BCE} + \widehat{CEB} = 180^0$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

=> $\widehat{EBC} + \widehat{BCF} + \widehat{FCE} + \widehat{FEC} + \widehat{FEB} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{FCE} + \widehat{FEC} = 180^0 - (\widehat{EBC} + \widehat{BCF} + \widehat{FEB}) = 180^0 - (75^0 + 15^0 + 60^0) = 30^0$

Mà $\widehat{CEF} = \widehat{FCE}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{FCE} = 15^0$.

d) Có $\widehat{EAD} = 90^0 - \widehat{BAE} = 90^0 - 15^0 = 75^0$

+) Xét $\Delta BEC$ và $\Delta AED$ có:

$BC = AD$ ( $ABCD$ là hình vuông)

$\widehat{EBC} = \widehat{EAD}$ $(= 75^0)$

$BE = AE$ ( $\Delta ABE$ cân tại $E$ do $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} = 15^0$ )

Suy ra: $\Delta BEC = \Delta AED$ (c.g.c)

$\Rightarrow EC = ED$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow$ $\Delta CDE$ cân tại $E$.

Lại có: $\widehat{ECD} = 90^0 - \widehat{BCF} - \widehat{FCE} = 90^0 - 15^0 - 15^0 = 60^0$

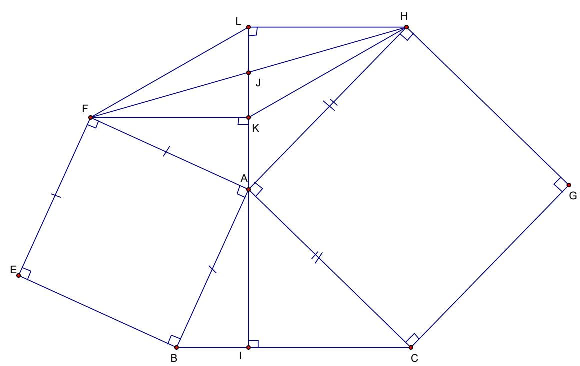
$\Rightarrow$ $\Delta CDE$ đều.

**Bài 18.**

+) Ta có: $\widehat{FAK} + \widehat{FAB} + \widehat{BAI} = 180^0$ => $\widehat{FAK} + \widehat{BAI} = 180^0 - \widehat{FAB} = 180^0 - 90^0 = 90^0$

Mà: $\widehat{ABI} + \widehat{BAI} = 90^0$ ( $\Delta ABI$ vuông tại $I$ )

$\Rightarrow \widehat{FAK} = \widehat{ABI}$.




Chứng minh tương tự ta được: $\widehat{LAH} = \widehat{ICA}$.

+) Xét $\Delta FAK$ và $\Delta ABI$ có:

$\widehat{FKA} = \widehat{AIB} = 90^0$ ( $FK \perp AI$ tại K,
$AI \perp BC$ tại I)

$FA = AB$ ( $ABEF$ là hình vuông)

$\widehat{FAK} = \widehat{ABI}$ (chứng minh trên)

Suy ra: $\Delta FAK = \Delta ABI$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow$ $FK = AI$ (1)

+) Tương tự, chứng minh được: $\Delta ALH = \Delta CIA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow LH = AI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $FK = LH$

Lại có: $FK // LH$ ( cùng vuông góc với $AI$ )

$\Rightarrow$ Tứ giác $FKHL$ là hình bình hành.

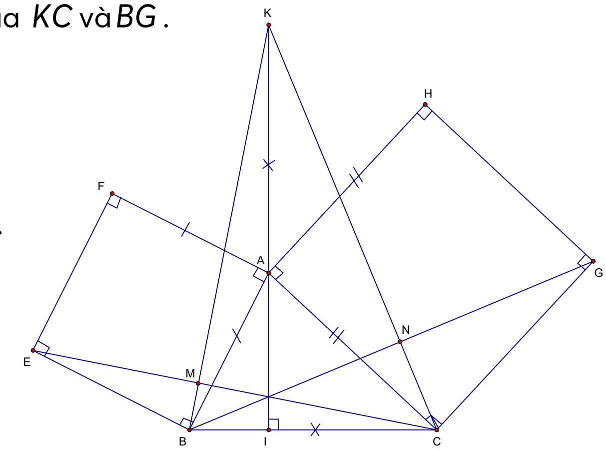
b) Theo a, tứ giác $FKHL$ là hình bình hành. Mà $J$ là giao điểm của hai đường chéo $FH$ và $LK$ nên $J$ là trung điểm $FH$.

Mà $J \in AI$ (gt) nên $AI$ đi qua trung điểm $J$ của $FH$.

**Bài 19.**

Trên tia đối của tia $AI$ lấy điểm $K$ sao cho $AK = BC$.

Gọi $M$ là giao điểm của $KB$ và $EC$; $N$ là giao điểm của $KC$ và $BG$.




+) Ta có $\widehat{FAK} + \widehat{FAB} + \widehat{BAI} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{FAK} + \widehat{BAI} = 180^0 - \widehat{FAB} = 180^0 - 90^0 = 90^0$

Mà: $\widehat{ABI} + \widehat{BAI} = 90^0$ ($\Delta ABI$ vuông tại $I$) $\Rightarrow \widehat{FAK} = \widehat{ABI}$.

$\Rightarrow \widehat{FAK} + 90^0 = \widehat{ABI} + 90^0$

$\Rightarrow \widehat{FAK} + \widehat{FAB} = \widehat{ABI} + \widehat{ABE}$

$\Rightarrow \widehat{KAB} = \widehat{CBE}$

Chứng minh tương tự ta được: $\widehat{KAC} = \widehat{BCG}$.

+) Xét $\Delta KAB$ và $\Delta CBE$ có:

$AB = AB$ ( $ABEF$ là hình vuông)

$\widehat{KAB} = \widehat{CBE}$ (chứng minh trên)

$AK = BC$ (theo cách dựng)

Suy ra: $\Delta KAB = \Delta CBE$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{BCE}$ (2 góc tương ứng)

Mà: $\widehat{AKB} + \widehat{KBI} = 90^0$ ($\Delta KBI$ vuông tại I)

$\Rightarrow \widehat{BCE} + \widehat{KBI} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta BMC$ vuông tại M

$\Rightarrow CM \perp BM$ hay $CM \perp BK$

Chứng minh tương tự được: $BN \perp CK$

Lại có: $KI \perp BC$ ($AI \perp BC, K \in AI$)

Nên $CM, BN, KI$ là ba đường cao trong tam giác $KBC$.

$\Rightarrow CM, BN, KI$ đồng quy hay $BG, CE, AI$ đồng quy.

# ÔN TẬP CHƯƠNG III

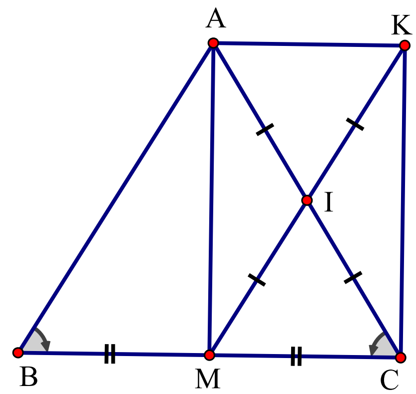
**Bài 1.**

a) Xét tứ giác $AMCK$ có:

$IA = IC$ (vì $I$ là trung điểm của $AC$)

$IM = IK$ (vì $K$ là điểm đối xứng của $M$ qua $I$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMCK$ là hình bình hành. (1)




Xét $\Delta ABC$ cân tại $A$ có $AM$ là đường trung tuyến

$\Rightarrow AM$ cũng là đường cao.

$\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác $AMCK$ là hình chữ nhật.

b) Vì tứ giác $AMCK$ là hình chữ nhật nên $AK = MC$ và $AK // MC$

Vì $AK = MC$ và $MC = MB$ nên $AK = MB$

Vì $AK // MC$ nên $AK // MB$

Xét tứ giác $AKMB$ có: $AK = MB$ và $AK // MB$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AKMB$ là hình bình hành.

c) Giả sử tứ giác $AKMB$ là hình thoi thì $AB = BM$

Vì $\Delta ABM$ vuông tại $M$ nên $AB > BM$ (trái với giải thiết)

Vậy không có trường hợp nào của $\Delta ABC$ để tứ giác $AKMB$ là hình thoi.

**Bài 2.**

a) Vì tứ giác $ABDE$ là hình vuông

$\Rightarrow \widehat{ABE} = 45^\circ$ (vì $BE$ là tia phân giác của $\widehat{ABD}$)

Vì tứ giác $ACGH$ là hình vuông

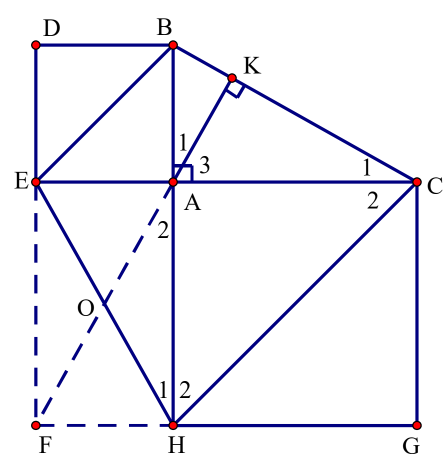
$\Rightarrow \widehat{AHC} = 45^\circ$ (vì $HC$ là tia phân giác của $\widehat{AHG}$)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{AHC}$ mà hai góc này ở vi trí so le trong.

$\Rightarrow BE // CH$

Xét tứ giác $BCHE$ có $BE // CH$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCHE$ là hình thang




Ta có: $AB = AE$ (vì tứ giác $ABDE$ là hình vuông) và $AC = AH$ (vì tứ giác $ACGH$ là hình vuông)

$\Rightarrow AB + AH = AE + AC \;\Rightarrow BH = CE$

Xét hình thang $BCHE$ có $BH = CE \;\Rightarrow BCHE$ là hình thang cân.

b) Gọi $F$ là giao điểm của $DE$ và $HG$. Gọi $O$ là giao điểm của $AF$ và $EH$

Xét tứ giác $AEFH$ có $\widehat{FEA} = \widehat{EAH} = \widehat{AHF} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEFH$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow OA = OH \;\Rightarrow \Delta OAH$ cân tại $O$. $\Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{H}_1$ (1)

Vì $BCHE$ là hình thang cân nên $\widehat{CHE} = \widehat{BCH}$

Vì $ACGH$ là hình vuông nên $\widehat{H}_2 = \widehat{C}_2 = 45^\circ$

Ta có: $\widehat{CHE} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2$ và $\widehat{BCH} = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 \quad \Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{C}_1$ (2)

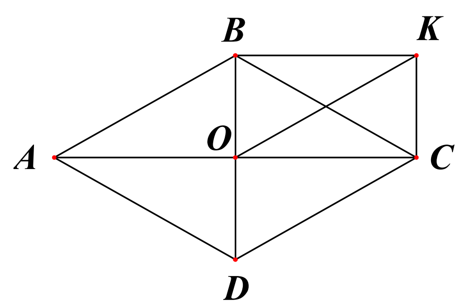
Mặt khác, $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

Ta có: $\widehat{A}_1 + \widehat{KAH} = 180^\circ \;\Rightarrow \widehat{A}_2 + \widehat{KAH} = 180^\circ$ hay $\widehat{KAF} = 180^\circ$

$\Rightarrow K, A, F$ thẳng hàng $\Rightarrow DE, AK, GH$ đồng quy tại $F$.

**Bài 3.**




a) Xét tứ giác $OBKC$, có: $OB // KC$, $BK // OC$ (gt)

$\Rightarrow$ $OBKC$ là hình bình hành (dhnb) (1)

Mà $ABCD$ là hình thoi (gt) nên $AC \perp BD$

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OBKC$ là hình chữ nhật.

b) Ta có: $AB = BC$ ($ABCD$ là hình thoi)

$OK = BC$ ($OBKC$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow AB = OK$

c) Ta có $ABKO$ là hình bình hành.

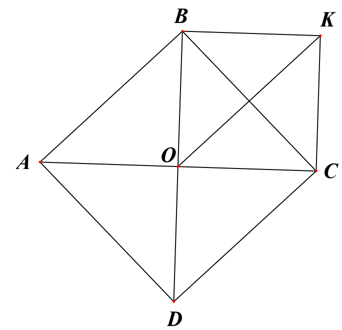
$\Rightarrow OK//AB$.

Để $OBKC$ là hình vuông thì $OK \perp BC$

Mà $OK//AB$ (cmt)

$\Rightarrow AB \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0$.




Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 90^0\,(cmt) \Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

Vậy để $OBKC$ là hình vuông thì $ABCD$ là hình vuông.

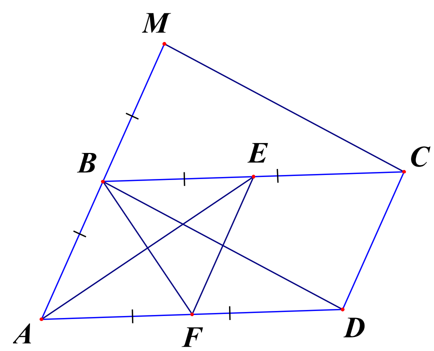
**Bài 4.**

a) Ta có $BE = \frac{1}{2}BC$; $AF = \frac{1}{2}AD$ (do $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của $BC, AD$)

Mà $AD = BC$ (do $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow BE = AF$

Ta lại có $AD = 2AB \Rightarrow AB = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$




Suy ra $BE = AB$

Xét tứ giác $ABEF$ có $BE//AF$ và $BE = AF$ nên là hình bình hành. Lại có $BE = AB$ nên $ABEF$ là hình thoi

$\Rightarrow AE \perp BF$ (hai đường chéo của hình thoi)

b) Xét $\Delta ABF$ có $\hat{A} = 60^0, AB = AF\ (= BE)$ nên là tam giác đều. Do đó $AB = BF$, mà $AB = CD$ (do $ABCD$ là hình bình hành). Suy ra $BF = DC$.

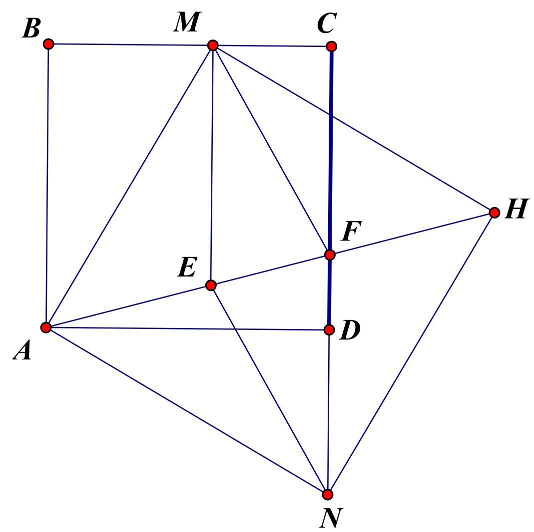
Xét tứ giác $BFDC$ có $FD//BC$ nên là hình thang. Ta lại có $BF = DC$ nên $BFDC$ là hình thang cân.

c) Xét $\Delta ABD$ có $BF$ là trung tuyến ($FA = FD$) thỏa mãn $BF = AF = FD = \frac{1}{2}AD$ nên $\Delta ABD$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MBD} = 90^0$ (kề bù)

Xét tứ giác $BMCD$ có $MB//CD; MB = CD(= AD)$ nên là hình bình hành. Ta lại có $\widehat{MBD} = 90^0$ nên $BMCD$ là hình chữ nhật.

d) Vì $BMCD$ là hình chữ nhật có $E$ là trung điểm của đường chéo $BC$. Do đó, $E$ thuộc đường chéo $MD$ (tính chất giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật).

**Bài 5.**




a) Xét $\Delta ABM$ và $\Delta ADN$ có:

$\widehat{BAM} = \widehat{DAN}$ (cùng phụ với góc $\widehat{MAD}$)

$AB = AD$ ($ABCD$ là hình vuông)

$AM = AN$ ($AMHN$ là hình vuông)

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ADN(c.g.c) \Rightarrow BM = DN$ (đpcm).

b) Theo a) ta có $\Delta ABM = \Delta ADN \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ADN}$ mà $\widehat{ABM} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ADN} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{CDN} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow N, C, D$ thẳng hàng (đpcm).

c) $ME//AB//CD \Rightarrow ME//FN$ ($N, C, D$ thẳng hàng) mà $AM//HN$ ($AMHN$ là hình vuông)

$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{HNF}$ (Góc có cạnh tương ứng song song)

Xét $\Delta AME$ và $\Delta HNF$ có:

$\widehat{AME} = \widehat{HNF}$ (cmt)

$\widehat{MAE} = \widehat{FHN}$ ($AMHN$ là hình vuông) (so le trong)

$AM = HN$ ($AMHN$ là hình vuông)

$\Rightarrow \Delta AME = \Delta HNF(g.c.g) \Rightarrow ME = NF$ mà $ME//NF \Rightarrow$ tứ giác $EMFN$ là hình bình hành (1)

Mà $AE$ là phân giác của $\widehat{MAN}$ ($AMHN$ là hình vuông) $\Rightarrow EM = EN$ (2) (cách khác: $EF \perp MN$ )

Từ (1)(2) $\Rightarrow$ tứ giác $EMFN$ là hình thoi.

d) Tứ giác EMFN là hình thoi (cmt) $\Rightarrow FM = FN = FD + DN$ mà $DN = BM$ (cm câu a)

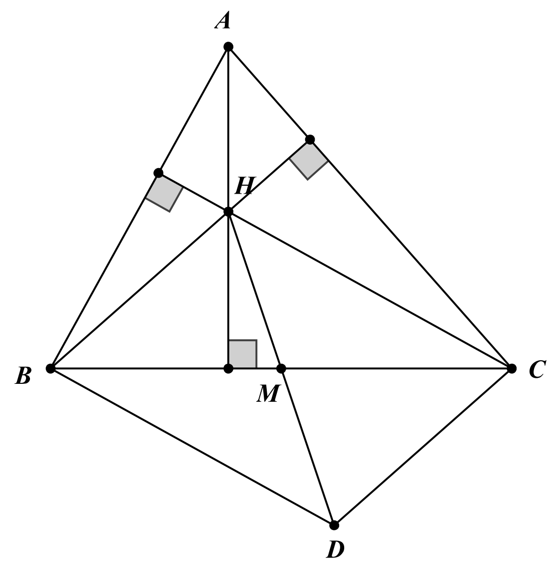
$\Rightarrow FM = BM + FD$ (đpcm).

Chu vi $\Delta MCF = FM + MC + CF = BM + DF + MC + CF$

$= (BM + MC) + (DF + CF) = BC + CD = 2CD$ không đổi (đpcm).

**Câu 6.**

a) Xét tứ giác $BHCD$ có:




$BH \parallel CD$ (vì cùng vuông góc với $AC$)

$CH \parallel BD$ (vì cùng vuông góc với $AB$)

$\Rightarrow BHCD$ là hình bình hành (tứ giác có hai cặp cạnh đối tương ứng song song)

b) Vì $BHCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BDC}$

Xét tứ giác $ABDC$ có:

$\widehat{BAC} + \widehat{BDC} + \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 360^0$ (Định lý tổng các góc trong tứ giác)

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BDC} + 90^0 + 90^0 = 360^0$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$ (vì $\widehat{BHC} = \widehat{BDC}$)

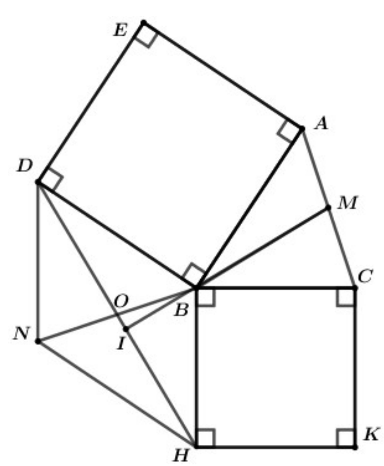
c) Vì $BHCD$ là hình bình hành

$\Rightarrow$ $BC$ và $HD$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (tính chất đường chéo)

Mà $M$ là trung điểm của $BC$ (gt)

Suy ra $M$ cũng là trung điểm của $DH$. Vậy: $H, M, D$ thẳng hàng

**Bài 7.**




a) Ta có $\widehat{DBH} + \widehat{HBC} + \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = 360^0$.

Mà $ABDE$ và $BCKH$ là hình vuông $\widehat{HBC} = \widehat{ABD} = 90^0$

$\Rightarrow$ $\widehat{DBH} + \widehat{ABC} = 180^0$.

b) $\Delta ABC = \Delta NHB$ (c.g.c)

c) Gọi $\{O\} = DH \cap BN$.

$\Rightarrow O$ là trung điểm của $DH$ và $BN$.

Ta có: $\Delta ABC = \Delta NHB \Rightarrow OH = BM$ (2 trung tuyến tương ứng).

Mà $DH = 2OH \Rightarrow$ Đpcm

d) Vì $\Delta BHO = \Delta CBM$ (c.c.c) nên $\widehat{BHO} = \widehat{MBC}$

Gọi $I = BM \cap HD$

$\widehat{IBM} = 180^0 = \widehat{IBH} + \widehat{HBC} + \widehat{CBM}$

$= \widehat{IBH} + 90^0 + \widehat{CBM}$

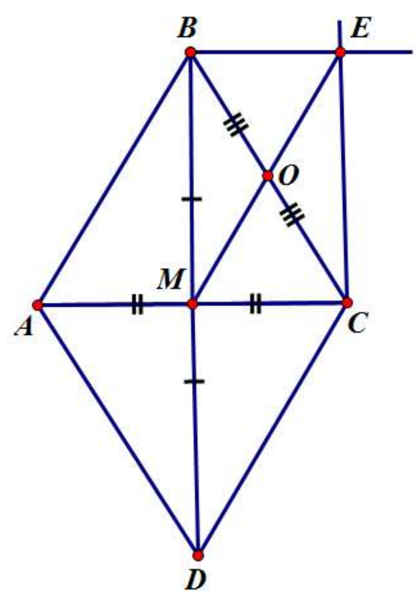
$\Rightarrow \widehat{IBH} + \widehat{CBM} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{IBH} + \widehat{BHO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BIH} = 90^0$

Suy ra $BM \perp DH$.

**Bài 8.**




a) Tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Vì :

Xét tứ giác $ABCD$ có:

$MA = MC$ ($M$ là trung điểm của $AC$ )

$MB = MD$ ($D$ đối xứng với $B$ qua $M$ )

$AC \cap BD = \{M\}$

$\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Mà $\Delta ABC$ cân tại $B$ nên đường trung tuyến $BM$ đồng thời là đường cao $\Rightarrow BD \perp AC$ tại $M$ .

Hay $ABCD$ là hình thoi ( Hình bình hành có 2 đường chéo vg góc với nhau)

b)Tứ giác $BMCE$ là hình chữ nhật.

Vì :

Ta có $EC//BD$ (gt) hay $EC//BM(M \in BD)$

Mà $BE//AC$ (gt) hay $BE//MC(M \in AC)$

Xét tứ giác $BMCE$ có $\begin{cases} BE//MC \\ BM//CE \\ \widehat{M} = 90^o (BD \perp AC = \{M\} \end{cases}$

$\Rightarrow BECM$ là hình chữ nhật (hình bình hành có 1 góc vuông)

c) Vì $O$ là trung điểm của $BC$ (gt) .Mà $BECM$ là hình chữ nhật(cmpb)

$\Rightarrow BC \cap EM$ tại $O$ (t/c đường chéo hình chữ nhật) $\Rightarrow O$ là trung điểm của của $EM$ .

Hay $M;O;E$ thẳng hàng.

d) Để $BMCE$ là hình vuông $\Rightarrow BC$ là đường phân giác của $\widehat{MBE}$ .

Hay $\widehat{MBC} = \dfrac{\widehat{MBE}}{2} = \dfrac{90^o}{2} = 45^o$ .

Mà $\Delta ABC$ cân tại $B$ nên đường trung tuyến $BM$ đồng thời là đường phân giác của $\widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{MBC} = 2.45^o = 90^o$ .

Xét $\Delta ABC$ cân tại $B$ mà $\widehat{ABC} = 90^o \Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại $B$ .

Vậy nếu $\Delta ABC$ vuông cân tại $B$ thì hình chữ nhật $BECM$ là hình vuông.

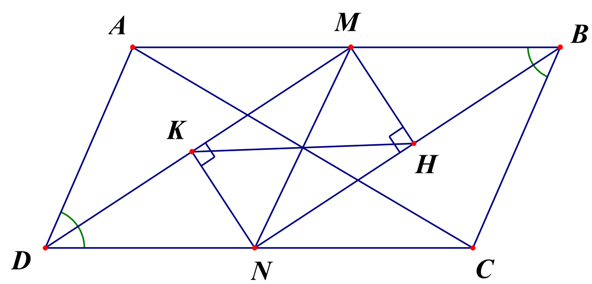
**Bài 9**

a) Ta có: $ABCD$ là hình bình hành (gt) nên $\widehat{D} = \widehat{B}$ ( tính chất)

Mà $DM$ là tia phân giác góc $D$ (gt), nên $\widehat{ADM} = \dfrac{1}{2}\widehat{D}$.

$BN$ là tia phân giác góc $B$ (gt) nên $\widehat{CBN} = \dfrac{1}{2}\widehat{B}$.

$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{CBN}$




Xét $\Delta ADM$ và $\Delta CBN$ có:

$\widehat{ADM} = \widehat{CBN}$ (chứng minh trên)

$AD = CB$ (theo tính chất hình bình hành)

$\widehat{DAM} = \widehat{BCN}$ (theo tính chất hình bình hành)

$\Rightarrow \Delta ADM = \Delta CBN(g.c.g)$

$\Rightarrow AM = CN$ (đpcm).

b) Ta có: $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ mà $AM = CN$ (theo câu a) nên $AB - AM = CD - CN \Rightarrow BM = DN(1)$

Lại có $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$ mà $M \in AB, N \in CD \Rightarrow BM//DN(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra tứ giác $DMBN$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành). (đpcm).

c) Theo câu b, tứ giác $DMBN$ là hình bình hành nên $DM//BN$ mà $K \in DM, H \in BN \Rightarrow KM//HN(3)$

Lại có: $NK \perp DM, MH \perp BN, DM//BN \Rightarrow NK//MH(4)$

Từ $(3)$ và $(4)$ suy ra tứ giác $KNHM$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành).

Vậy tứ giác $KNHM$ là hình bình hành.

d) Ta có: tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AC, BD$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường $(5)$

Theo câu b, tứ giác $DMBN$ là hình bình hành nên $BD, MN$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường $(6)$

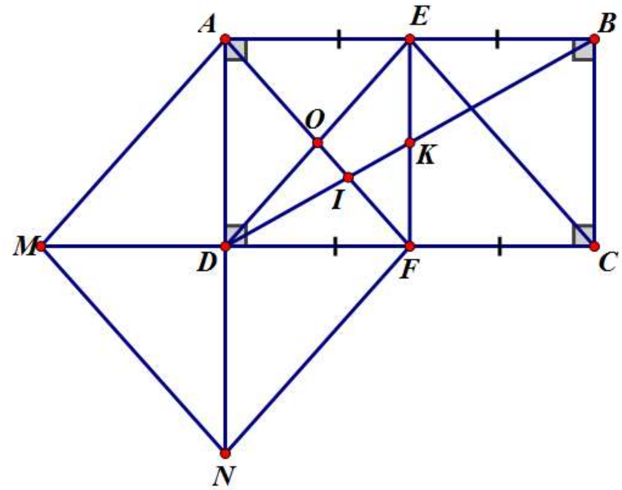
Theo câu c, tứ giác $KNHM$ là hình bình hành nên $MN, KH$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường $(7)$

Từ $(5),(6),(7)$ suy ra ba đường thẳng $AC, MN, KH$ đồng quy (đpcm).

**Bài 10.**

a) Xét tứ giác $AECF$ có: $\begin{cases} AE = CF \\ AE \parallel FC \end{cases}$ $\Rightarrow AECF$ là hình bình hành.

b) Xét tứ giác $AEFD$ có $\begin{cases} AE = DF \\ AE \parallel DF \end{cases}$




$\Rightarrow AEFD$ là hình bình hành.

Lại có $\widehat{DAE} = 90^\circ$ $\Rightarrow AEFD$ là hình chữ nhật.

c) Có $M$ đối xứng với $F$ qua $D$

$\Rightarrow DF = DM$

Điểm $N$ đối xứng với $A$ qua $D$

$\Rightarrow AD = DN$

Lại có $\widehat{ADF} = 90^\circ$ $\Rightarrow AN \perp MF$

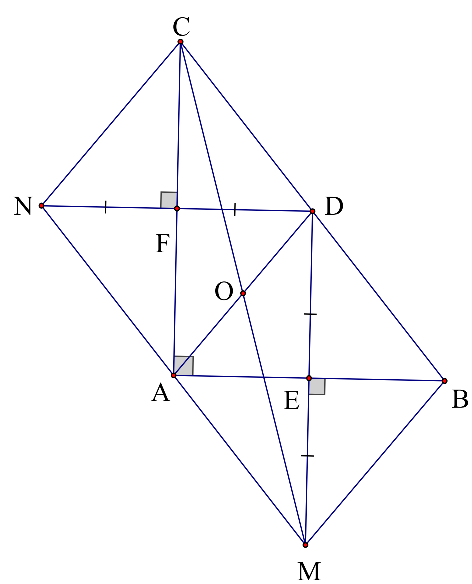
$\Rightarrow AMNF$ là hình thoi.

d) Gọi giao điểm của $AF$ và $DE$ là $O$. Do $AEFD$ là hình chữ nhật, nên $O$ là trung điểm của DE.

Xét tứ giác $BEDF$ có $\begin{cases} BE = DF \\ BE \parallel DF \end{cases}$ $\Rightarrow BEDF$ là hình bình hành, nên $K$ là trung điểm của $EF$.

Xét tam giác $DEF$ có DK và FO là hai trung tuyến cắt nhau tại $I \Rightarrow I$ là trọng tâm của $\Delta DEF$ $\Rightarrow \dfrac{IK}{DK} = \dfrac{1}{3}$.

**Bài 11.**




a) Vì $M$ là điểm đối xứng với $D$ qua $AB$ nên:

$\Rightarrow DM \perp AB$ hay $\widehat{AED} = 90^\circ$

Vì $N$ là điểm đối xứng với $D$ qua $AC$ nên:

$\Rightarrow DN \perp AC$ hay $\widehat{AFD} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AFDE$ có:

$\widehat{EAF} = \widehat{AED} = \widehat{AFD} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AFDE$ là hình chữ nhật.

b) Xét $\Delta ABC$ có: $DB = DC$ ($D$ là trung điểm của $BC$)

$AC // ED$ (Cùng vuông góc với $AB$)

$\Rightarrow EA = EB$

Xét tứ giác $ADBM$ có: $ED = EM$ và $EA = EB$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADBM$ là hình bình hành

Mà $AB \perp DM$ (Vì $M$ là điểm đối xứng với $D$ qua $AB$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADBM$ là hình thoi.

Chứng minh tương tự, tứ giác $ANCD$ là hình thoi.

c) Vì tứ giác $ADBM$ là hình bình hành nên:

$\Rightarrow AM // DB$ hay $AM // CD$

Xét tứ giác $ACDM$ có: $AM // CD$ và $AC // DM$ (vì cùng vuông góc với $AB$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $ACDM$ là hình bình hành.

Vì tứ giác $AFDE$ là hình chữ nhật mà $O$ là giao điểm của $EF$ và $AD$

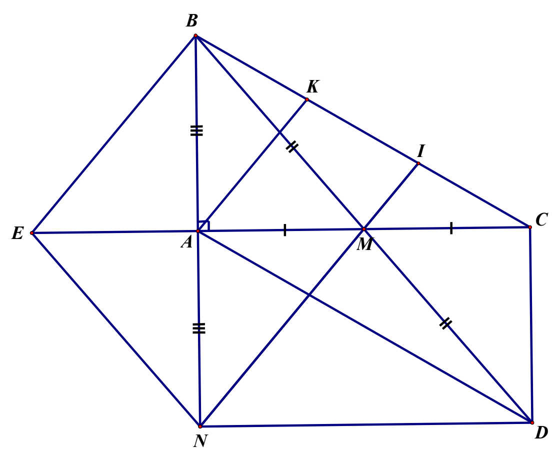
$\Rightarrow O$ là trung điểm của $AD$.

Vì tứ giác $ACDM$ là hình bình hành mà $O$ là trung điểm của $AD$ nên:

$\Rightarrow O$ là trung điểm của $MC$.

$\Rightarrow$ ba điểm $M, O, C$ thẳng hàng.

**Bài 12.**




a) Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo $AC$ và $BD$ cắt nhau tại $M$

Mà: $MA = MC; MB = MD$ (gt)

$\Rightarrow$ $ABCD$ là hình bình hành (Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm)

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành (cmt)

$\Rightarrow$ $CD // AB$ và $CD = AB$

$\Rightarrow$ $CD // AN, CD = AN$ ($N$ đối xứng $B$ qua $A$)

$\Rightarrow$ $ACDN$ là hình bình hành

Mà $\widehat{NAC} = 90^0$ (kề bù với $\widehat{BAC}$)

$\Rightarrow$ $ACDN$ là hình chữ nhật (hình bình hành có một góc vuông).

c) Xét $\Delta CAK$ có: $MI // AK, MA = MC$ (gt)

$\Rightarrow$ $I$ là trung điểm của $CK \Rightarrow$ $CI = IK \Rightarrow$ $CK = 2KI$ (1)

Xét $\Delta BNI$ có: $AB = AN, AK//NI$ (gt)

$\Rightarrow K$ là trung điểm của $BI \Rightarrow$ $BK = KI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KC = 2BK$.

d) Xét $\Delta EAB$ và $\Delta MAN$ có:

$\widehat{EAB} = \widehat{MAN} = 90^0$ (đối đỉnh)

$AB = AN$ (gt)

$\widehat{ABE} = \widehat{ANM}$ (so le trong do $BE//MN$)

$\Rightarrow$ $\Delta EAB = \Delta MAN$ (g-c-g) $\Rightarrow$ $BE = MN$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $BE//MN$ (gt) $\Rightarrow$ $EBMN$ là hình bình hành

Lại có: $BN \perp ME \Rightarrow$ $EBMN$ là hình thoi

Để hình thoi $EBMN$ là hình vuông thì $ME = BN \Rightarrow$ $AB = AM \Rightarrow$ $AB = \dfrac{AC}{2}$

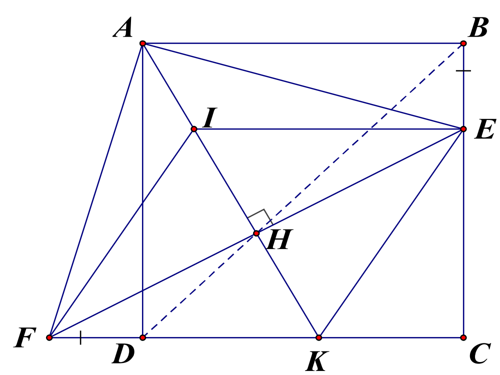
Vậy $\Delta ABC$ cần có thêm điều kiện là $AB = \dfrac{AC}{2}$ để tứ giác $EBMN$ là hình vuông.

**Bài 13.**

a) Ta có: $ABCD$ là hình vuông nên $AB//CD; \widehat{ABC} = 90^0; \widehat{DAC} = 90^0; AB = AD$

Xét tứ giác $ABEI$ có: $IE//AB(//CD)$ và $\widehat{ABC} = 90^0$

nên tứ giác $ABEI$ là hình thang vuông




b) Xét $\Delta ABE$ và $\Delta ADF$ có:

$$\left.\begin{array}{l} AB = AD(cmt) \\ \widehat{ABE} = \widehat{ADF} = 90^0 \\ BE = DF(gt) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ADF(c.g.c)$$

$\Rightarrow AE = AF$ và $\widehat{BAE} = \widehat{DAF}$

Mà

$\widehat{BAE} + \widehat{DAE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DAF} + \widehat{DAE} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{FAE} = 90^0 \Rightarrow AE \perp AF$

c) Xét $\Delta FEA$ có $AE = AF$ và $AE \perp AF$ nên $\Delta FEA$ vuông cân tại $A$ mà $AH \perp FE(gt)$ nên $AH$ là đường trung trực của EF . Do đó $IE = IF$; KE=KF (1)

Ta chứng minh được $\Delta KHF = \Delta KHE(c.g.c) \Rightarrow \widehat{HKF} = \widehat{HKE}$

Mà $IE//CD \Rightarrow \widehat{EIK} = \widehat{IKF}(slt)$

Nên $\widehat{HKE} = \widehat{EIK} \Rightarrow \Delta EIK$ cân tại $E$, do đó $EI = EK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IE = IF = KE = KF$, vì vậy tứ giác FIEK là hình thoi .

d) Tứ giác $FIEK$ là hình thoi (cmt) mà $H$ là giao điểm của hai đường chéo nên $H$ là trung điểm của $FE$ .

Xét $\Delta EFC$ vuông tại $C$ có $H$ là trung điểm của $FE$ nên $CH = \frac{1}{2}EF$

Xét $\Delta EFA$ vuông tại A có H là trung điểm của FE nên $AH = \frac{1}{2}EF$

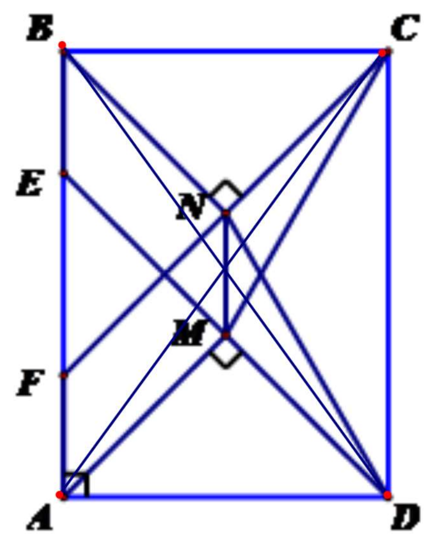
Do đó $CH = AH$ suy ra H thuộc đường trung trực của AC.

Lại có $BD$ là đường trung trực của $AC$ nên suy ra ba điểm $H, B, D$ thẳng hàng.

**Bài 14.**

a) Dễ thấy các tam giác $ADM$, $BCN$, $AME$, $BNF$ là các tam giác vuông cân với các đỉnh lần lượt là $M$, $N$, $M$, $N$.

do đó $AM = DM = EM$ và $BN = CN = FN$.




Mặt khác, vì $AD = BC$ nên $\Delta AMD = \Delta CNB \Rightarrow AM = BN$ .

Vậy $AM = DM = EM = BN = CN = FN$ .

b) Tam giác $ADE$ vuông tại $A$ có $\widehat{ADE} = 45^0 \Rightarrow \widehat{AED} = 45^0$ . Lại có $\widehat{ABN} = 45^0$, do đó $BN//EM$ .

Theo trên $BN = EM$, do vậy $BNME$ là hình bình hành, suy ra $MN//BE//CD$ .

Suy ra $CDMN$ là hình thang, mà $\widehat{DCN} = \widehat{CDM} (= 45^0)$

Vậy $CDMN$ là hình thang cân.

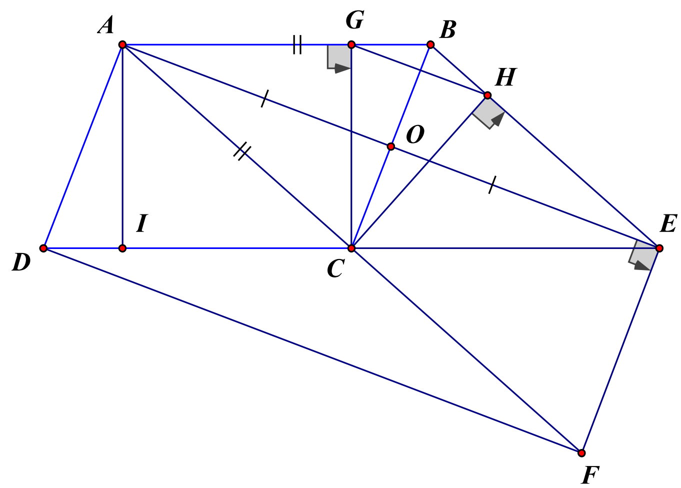
c) Chứng minh tương tự như trên, ta có $AFNM$ cũng là hình bình hành.

Từ đó suy ra $AF = BE = MN$ .

d) Theo chứng minh trên ta có $BN//MD$ và $BN = MD$, do đó $BNDM$ là hình bình hành, suy ra $BD$ và $MN$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn. Mặt khác $BD$ và $AC$ cũng cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Vậy $AC$, $BD$, $MN$ đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

**Bài 15.**




a) Vì $E$ đối xứng với $A$ qua $O$ nên $O$ là trung điểm $AE$ mà $O$ cũng là trung điểm $BC$ nên tứ giác $ABEC$ là hình bình hành mà $AB = AC$ (gt)

Vậy tứ giác $ABEC$ là hình thoi.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$ và $AB = CD$

Tứ giác $ABEC$ là hình thoi nên

$AB//CE$ và $AB = CE$

$\Rightarrow$ $C, D, E$ thẳng hàng và $CD = CE$

$\Rightarrow C$ là trung điểm của $DE$ (1)

Xét tam giác $AEF$ vuông tại $E$ có: $AC = CE$ (vì $ABEC$ là hình thoi) nên tam giác $ACE$ cân.

$\widehat{CAE} = \widehat{CEA}$, lại có $\widehat{CFE} + \widehat{CAE} = \widehat{CEF} + \widehat{CEA} = 90^0$ Vậy $\widehat{CEF} = \widehat{CFE}$ hay tam giác $CEF$ cân tại $C$ suy ra $CE = CF = AC$.

$\Rightarrow$ $C$ là trung điểm $AF$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $AEFD$ là hình bình hành

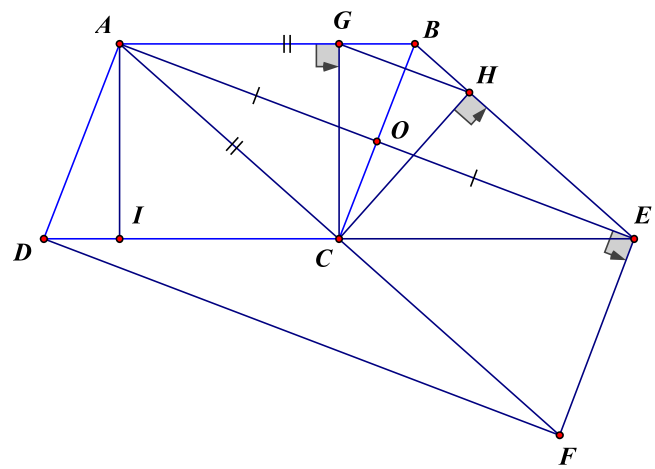
Mà $AE \wedge EF$ nên $AEFD$ là hình chữ nhật.

c) Xét $\Delta BGC$ và $\Delta BHC$ có:

$BC$ là cạnh chung

$\widehat{BGC} = \widehat{BHC} = 90^\circ$

$\widehat{GBC} = \widehat{HBC}$ (vì $BC$ là p/g góc $ABE$ của hình thoi $ABEC$)




Vậy $\Delta BGC = \Delta BHC$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow$ $BG = BH$ mà $BA = BE$

$\Rightarrow \dfrac{BG}{BA} = \dfrac{BH}{BE}$

$\Rightarrow GH//AE$

d) Xét $\Delta ACI$ và $\Delta ACO$ có:

$AC$ chung

$\widehat{AIC} = \widehat{AOC} = 90^0$

$AI = AO$

Vậy $\Delta ACI = \Delta ACO$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{ACI} = \widehat{ACO}$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow AC$ là tia phân giác góc $BCD$

$\Rightarrow$ Hình bình hành $ABCD$ là hình thoi

$\Rightarrow AC \perp BD$ (đpcm) và $BC = CD \Rightarrow BC = AB$

Mà $AB = AC$ (do $ABCE$ là hình thoi)

$\Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow \widehat{ABO} = 60^\circ$ (đpcm)

# BÀI 15. ĐỊNH LÍ THALES TRONG TAM GIÁC

**VD 1.1.**

a) $\frac{AB}{CD}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

b) $PQ=5,4m=54dm \Rightarrow \frac{MN}{PQ}=\frac{45}{54}=\frac{5}{6}$.

**VD 1.2.**

a) Ta có: $AB=5CD$ và $A'B'=5CD \Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{5.CD}{7.CD}=\frac{5}{7}$.

Vậy tỉ số của hai đoạn thẳng $AB$ và $A'B'$ là $\frac{5}{7}$.

b) Ta có: $\frac{MN}{M'N'}=\frac{505}{707}=\frac{5}{7}=\frac{AB}{A'B'}$

Vậy hai đoạn thẳng $AB$ và $A'B'$ tỉ lệ với hai đoạn thẳng $MN$ và $M'N'$.

**VD 1.3.**

*Cách 1.* Theo tính chất của tỉ lệ thức, ta có:

- $\frac{AM}{MB}=\frac{4}{7} \Rightarrow \frac{AM}{AM+MB}=\frac{4}{4+7} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{4}{11}$.
- $\frac{AM}{MB}=\frac{4}{7} \Rightarrow \frac{MB}{AM}=\frac{7}{4} \Rightarrow \frac{MB}{AM+MB}=\frac{7}{4+7}=\frac{7}{11}$.

*Cách 2.* Ta có $\frac{AM}{MB}=\frac{4}{7}$ nên $\begin{cases} AM=4a \\ MB=7a \end{cases} \left(a>0\right)$

Do $M$ thuộc đoạn thẳng $AB$ nên $AB=AM+MB=4a+7a=11a$

Vậy $\frac{AM}{AB}=\frac{4a}{11a}=\frac{4}{11}$ và $\frac{MB}{AB}=\frac{7a}{11a}=\frac{7}{11}$.

**VD 1.4.** Gọi $M$ là giao điểm của AG cắt BC, ta có M là trung điểm $BC$,

$\Delta ABM$ có $GD//AB$ nên áp dụng đinh lí Ta-let ta có:

$\frac{BD}{BM}=\frac{AG}{AM}$ .

Do đó $\frac{BD}{\frac{BC}{2}}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{1}{3}$.