

TỰ HỌC NÂNG CAO KIẾN THỨC

TOÁN 7

- TẬP 2 -

PHẦN ĐÁP ÁN

MỤC LỤC

| | |
|--|------------|
| CHƯƠNG VI. TỈ LỆ THỨC VÀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH | 4 |
| Bài 20. TỈ LỆ THỨC | 5 |
| Bài 21. TÍNH CHẤT DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU | 13 |
| Bài 22. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN | 25 |
| Bài 23. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH | 35 |
| ÔN TẬP CHƯƠNG VI..... | 44 |
| CHƯƠNG VII. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ ĐA THỨC MỘT BIẾN..... | 51 |
| Bài 24. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ..... | 52 |
| Bài 25. ĐA THỨC MỘT BIẾN | 55 |
| Bài 26. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN | 60 |
| Bài 27. PHÉP NHÂN ĐA THỨC MỘT BIẾN..... | 66 |
| Bài 28. PHÉP CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN | 76 |
| ÔN TẬP CHƯƠNG VII | 87 |
| CHƯƠNG VIII. LÀM QUEN VỚI BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ | 93 |
| Bài 29. LÀM QUEN VỚI BIẾN CỐ..... | 94 |
| Bài 30. LÀM QUEN VỚI XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ | 98 |
| ÔN TẬP CHƯƠNG VIII | 103 |
| CHƯƠNG IX. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG MỘT TAM GIÁC | 106 |
| Bài 31. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC..... | 107 |
| Bài 32. QUAN HỆ ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN..... | 117 |
| Bài 33. QUAN HỆ BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC | 122 |
| Bài 34. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN, BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG MỘT TAM GIÁC | 131 |
| Bài 35. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO TRONG MỘT TAM GIÁC | 148 |
| ÔN TẬP CHƯƠNG IX | 167 |

| | |
|---|------------|
| CHƯƠNG X. MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN | 171 |
| Bài 36. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT VÀ HÌNH LẬP PHƯƠNG | 172 |
| Bài 37. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TAM GIÁC VÀ HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TỨ GIÁC | 178 |
| ÔN TẬP CHƯƠNG X | 183 |

CHƯƠNG VI.

TỈ LỆ THỨC

VÀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

BÀI 20. TỈ LỆ THỨC

VD 1.1.

a) Từ bốn trong năm số đã cho ta lập được ba đẳng thức sau:

$$5.3125 = 25.625(1); \quad 25.3125 = 125.625(2); \quad 5.625 = 25.125(3)$$

Từ mỗi đẳng thức trên ta có thể lập được 4 tỉ lệ thức. Chẳng hạn từ đẳng thức (1)

$$\text{ta lập được 4 tỉ lệ thức sau: } \frac{5}{625} = \frac{25}{3125}; \quad \frac{5}{25} = \frac{625}{3125}; \quad \frac{3125}{625} = \frac{25}{5}; \quad \frac{625}{5} = \frac{3125}{25};$$

Làm tương tự với 2 đẳng thức còn lại, ta có được tất cả 12 tỉ lệ thức.

b) Từ bốn trong năm số đã cho ta lập được ba đẳng thức sau:

$$2.162 = 6.54(1); \quad 6.162 = 18.54(2); \quad 2.54 = 6.18(3)$$

Từ mỗi đẳng thức trên ta có thể lập được 4 tỉ lệ thức. Chẳng hạn từ đẳng thức (1)

$$\text{ta lập được 4 tỉ lệ thức sau: } \frac{2}{6} = \frac{54}{162}; \quad \frac{2}{54} = \frac{6}{162}; \quad \frac{162}{6} = \frac{54}{2}; \quad \frac{162}{54} = \frac{6}{2};$$

Làm tương tự với 2 đẳng thức còn lại, ta có được tất cả 12 tỉ lệ thức.

VD 1.2.

a) Ta có : $46\frac{1}{2}.101 = 60\frac{3}{5}.77\frac{1}{2} \left(= 4696\frac{1}{2} \right)$, nên bốn số có thể lập thành 1 tỉ lệ thức.

b) Xét từng cặp tích :

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} \neq -4,5 \cdot 31,5 \\ -\frac{1}{8} \cdot (-4,5) \neq \frac{5}{6} \cdot 31,5 \\ -\frac{1}{8} \cdot 31,5 \neq \frac{5}{6} \cdot (-4,5) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Bốn số đã cho không lập thành một tỉ lệ thức.}$$

c) Ta có : $\frac{(1+2+3)^2}{(1+2+3)^3} = \frac{1}{6}; \quad \frac{1^3+2^3+3^3}{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = \frac{1}{6}.$

Vậy bốn số đã cho lập thành tỉ lệ thức $\frac{(1+2+3)^2}{(1+2+3)^3} = \frac{1^3+2^3+3^3}{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3}.$

VD 2.1.

Cách tìm:

+ Nếu tìm số chưa biết là ngoại tỉ: Lấy tích các trung tỉ chia cho ngoại tỉ đã biết

+ Nếu tìm số chưa biết là trung tỉ: Lấy tích các ngoại tỉ chia cho trung tỉ đã biết.

$$a) \frac{x}{0,9} = \frac{5}{6} \text{ thì } x = \frac{5 \cdot 0,9}{6} = 0,75. \text{ Vậy: } x = 0,75.$$

$$b) \frac{-6}{x} = \frac{9}{-15} \text{ thì } x = \frac{-6 \cdot (-15)}{9} = 10.$$

$$c) 3 : (2x) = \frac{1}{4} : 2\frac{2}{3} \text{ thì } 2x = 3 \cdot 2\frac{2}{3} : \frac{1}{4}. \text{ Suy ra: } x = 16. \text{ Vậy: } x = 16.$$

$$d) \frac{14}{15} : \frac{9}{10} = x : \frac{3}{7} \text{ thì } \frac{9}{10} \cdot x = \frac{14}{15} \cdot \frac{3}{7}. \text{ Suy ra: } \frac{9}{10} \cdot x = \frac{2}{5} \text{ hay } x = \frac{4}{9}. \text{ Vậy: } x = \frac{4}{9}.$$

$$e) 1\frac{3}{5} : 8 = 2,5 : x \text{ thì } x = 2,5 \cdot 8 : 1\frac{3}{5} = 12,5. \text{ Vậy: } x = 12,5$$

$$f) (1-x)^3 : (-0,5625) = 0,525 : 0,7 \text{ thì } (1-x)^3 = \frac{(-0,5625) \cdot 0,525}{0,7} = \frac{-27}{64}$$

$$\text{Suy ra: } (1-x)^3 = \left(\frac{-3}{4}\right)^3 \text{ hay } 1-x = \frac{-3}{4} \Rightarrow x = \frac{7}{4}. \text{ Vậy: } x = \frac{7}{4}$$

$$g) \frac{3x-7}{8} = \frac{5}{2} \text{ thì } 3x-7 = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20. \text{ Vậy: } x = 9$$

$$h) x : 0,2 = 0,8 : x \text{ thì } x^2 = 0,16. \text{ Suy ra: } x = \pm 0,4. \text{ Vậy: } x = \pm 0,4$$

$$i) \frac{x+11}{14-x} = \frac{2}{3} \text{ thì } 3(x+11) = 2(14-x)$$

$$3x + 33 = 28 - 2x$$

$$5x = -5$$

$$x = -1.$$

Vậy: $x = -1$.

VD 2.2.

a) Có $\frac{x-y}{x+2y} = \frac{3}{4}$

$$(x-y).4 = (x+2y).3$$

$$4x - 4y = 3x + 6y$$

$$1.x = 10.y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{10}{1}$$

Vậy: $\frac{x}{y} = 10$

b) Có: $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ thì $x = \frac{2y}{3}$

$$\frac{t}{y} = \frac{4}{9} \text{ thì } t = \frac{4y}{9}$$

$$\frac{z}{t} = \frac{5}{8} \Rightarrow z = \frac{5t}{8}$$

Thay $t = \frac{4y}{9}$ ta có $z = \frac{5t}{8} = \frac{5 \cdot \frac{4y}{9}}{8} = \frac{20y}{72} = \frac{5y}{18}$

Thay $x = \frac{2y}{3}$ và $z = \frac{5y}{18}$ ta có: $\frac{x}{z} = \frac{\frac{2y}{3}}{\frac{5y}{18}} = \frac{2y}{3} \cdot \frac{18}{5y} = \frac{12}{5}$

Vậy: $\frac{x}{z} = \frac{12}{5}$

VD 2.3. Gọi số cần tìm có dạng $\frac{x}{y}$.

Theo đề ta có: $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ thì $3x = 2y$ hay $6x = 4y$ (1)

Mặt khác: $\frac{x+50}{y} = \frac{5}{6}$ thì $6(x+50) = 5y$ hay $6x + 300 = 5y$ (2)

Thay (1) vào (2): $4y + 300 = 5y$

$$300 = 5y - 4y$$

$$y = 300$$

Vậy: $x = 200; y = 300$

VD 3.1. Từ tỉ lệ thức $\frac{a-3}{a+3} = \frac{b-6}{b+6}$, ta có: $(a-3)(b+6) = (a+3)(b-6)$

$$ab + 6a - 3b - 18 = ab - 6a + 3b - 18$$

$$12a = 6b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

Vậy: $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

VD 3.2. Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k (k \in R)$ thì $a = k.b; c = k.d$

$$\text{Ta có: } \frac{5a+3b}{3a-7b} = \frac{5kb+3b}{3kb-7b} = \frac{b(5k+3)}{b(3k-7)} = \frac{5k+3}{3k-7} \quad (1)$$

$$\frac{5c+3d}{3c-7d} = \frac{5kd+3d}{3kd-7d} = \frac{d(5k+3)}{d(3k-7)} = \frac{5k+3}{3k-7} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{5a+3b}{3a-7b} = \frac{5c+3d}{3c-7d}$

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

$$\text{a) } 3,5 : 5,04 = \frac{35}{10} : \frac{504}{10} = \frac{25}{36}$$

$$\text{b) } 1\frac{19}{21} : 4\frac{2}{7} = \frac{40}{21} : \frac{30}{7} = \frac{4}{9}$$

$$\text{c) } 1\frac{21}{25} : 0,23 = \frac{46}{25} : \frac{23}{100} = \frac{8}{1}$$

$$\text{d) } \frac{2}{9} : 0,31 = \frac{2}{9} : \frac{31}{100} = \frac{2}{9} \cdot \frac{100}{31} = \frac{200}{279}$$

Bài 2.

$$\text{a) } (-0,3) : 2,7 \quad \text{và} \quad (-1,71) : 15,39. \text{Ta có: } (-0,3).15,39 = 2,7.(-1,71)$$

Suy ra 2 tỉ số này lập thành tỉ lệ thức

$$\text{b) } 4,86 : (-11,34) \quad \text{và} \quad (-9,3) : 21,6. \text{Ta có: } (-11,34).(-9,3) \neq 4,86.21,6$$

Suy ra 2 tỉ số này không lập thành tỉ lệ thức

Bài 3.

a) Không lập được tỉ lệ thức

b) Ta có: $1,05.42 = 30,1,47 (= 44,1)$. Suy ra có tỉ lệ thức: $1,05 : 30 = 1,47 : 42$

c) Ta có: $-1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$. Suy ra ta có tỉ lệ thức: $-1 : \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)$

d) Ta có: $0,4 \cdot 0,0004 = 0,04 \cdot 0,004$. Suy ra ta có tỉ lệ thức: $0,4 : 0,04 = 0,0004 : 0,004$

Bài 4.

a) Ta có đẳng thức: $5 \cdot 625 = 25 \cdot 125$

Từ đó ra viết được 4 tỉ lệ thức: $\frac{5}{125} = \frac{25}{625}$; $\frac{625}{125} = \frac{25}{5}$; $\frac{5}{25} = \frac{125}{625}$; $\frac{625}{25} = \frac{125}{5}$

b) Từ 5 số trên ta lập được 3 đẳng thức:

$$4 \cdot 1024 = 16 \cdot 256; 16 \cdot 1024 = 64 \cdot 256; 4 \cdot 256 = 16 \cdot 64$$

Từ mỗi đẳng thức trên ta lại lập được 4 tỉ lệ thức (tương tự câu a).

Bài 5.

a) Có 3 TH xảy ra:

+ TH1: $x = \frac{4 \cdot 8}{16} = 2$ Ta có tỉ lệ thức: $4 : 16 = 2 : 8$

+ TH2: $x = \frac{8 \cdot 16}{4} = 32$ Ta có tỉ lệ thức: $8 : 4 = 32 : 16$

+ TH3: $x = \frac{16 \cdot 4}{8} = 8$ Ta có tỉ lệ thức: $16 : 8 = 8 : 4$

b) Có thể lập được tất cả 12 tỉ lệ thức.

Bài 6.

a) $2,5 : 4x = 0,5 : 0,2$

$$4x \cdot 0,5 = 2,5 \cdot 0,2$$

$$2x = 0,5$$

$$x = 0,25$$

Vậy $x = 0,25$.

b) $\frac{1}{5}x : 3 = \frac{2}{3} : 0,25$

$$\frac{1}{5}x \cdot 0,25 = 3 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{20}x = 2$$

$$x = 40$$

Vậy $x = 40$.

$$c) \frac{x-6}{x+4} = \frac{2}{7}$$

$$7(x-6) = 2(x+4)$$

$$7x - 42 = 2x + 8$$

$$5x = 50$$

$$x = 10$$

Vậy $x = 10$.

$$d) (x+5) : 2\frac{1}{2} = 40 : (x+5)$$

$$(x+5)^2 = \frac{5}{2} \cdot 40$$

$$x+5 = \pm 10$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = -15 \end{cases}$$

Vậy $x = 5$ hoặc $x = -15$

Bài 7.

$$a) \frac{x}{y} = \frac{9}{11} \text{ thì } \frac{x}{9} = \frac{y}{11}. \text{ Đặt } \frac{x}{9} = \frac{y}{11} = t \text{ thì } x = 9t; y = 11t.$$

Có $x+y = 60$ nên $9t + 11t = 60$ suy ra $t = 3$

Suy ra $x = 9 \cdot 3 = 27; y = 11 \cdot 3 = 33$

Vậy $x = 27; y = 33$.

$$b) \text{ Đặt: } \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = k. \text{ Có } x = 4k; y = 7k$$

Vì $x \cdot y = 112$ nên $4k \cdot 7k = 112$

$$28k^2 = 112$$

$$k^2 = 4$$

$$k = \pm 2$$

TH1: $k = 2$ thì $x = 4k = 4 \cdot 2 = 8; y = 7k = 7 \cdot 2 = 14$.

TH2: $k = -2$ thì $x = 4k = 4 \cdot (-2) = -8; y = 7k = 7 \cdot (-2) = -14$.

Vậy $x = 8; y = 14$ hoặc $x = -8; y = -14$.

Bài 8. Có $\frac{3x+5y}{x-2y} = \frac{1}{4}$ thì $4(3x+5y) = x-2y$

$$11x = -22y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-22}{11}$$

$$\frac{x}{y} = -2$$

Vậy $\frac{x}{y} = -2$.

Bài 9: Cho $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b+c}{d+a}$

Áp dụng tính chất tỉ lệ thức ta có:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b+c}{d+a} \text{ thì } (a+b).(d+a) = (b+c).(c+d)$$

$$a.d + a.a + b.d + b.a = b.c + b.d + c.c + c.d$$

$$a.d + a.a + b.a = b.c + c.c + c.d$$

$$a.(b+d) + a.a = c.c + c.(b+d)$$

$$a = c$$

Vậy: $a = c$

Bài 10: Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh tỉ lệ thức: $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ (Giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa).

Cách 1: Phương pháp nhân chéo:

Xét tích:

$$a(c-d) = ac - ad$$

$$(a-b)c = ac - bc$$

Có $ad = bc$ nên $a(c-d) = (a-b)c$. Suy ra điều cần chứng minh:

Cách 2: Phương pháp dùng định nghĩa tỉ lệ thức.

Đặt tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ Suy ra: $a = bk, c = dk$

$$\text{Suy ra: } \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} = \frac{k}{k-1}$$

Bài 11. Tỷ lệ giữa nước và muối để làm nước muối sinh lý là: $\frac{3}{27}$.

Vậy có 90 gam muối thì cần pha với $\frac{3}{27} \cdot 90 = 10$ lít nước tinh khiết

Bài 12. Gọi x (công nhân) là số công nhân cần dùng để hoàn thành công việc trong 12 ngày.

Ta có tỉ lệ thức $\frac{18}{14} = \frac{x}{21}$. Suy ra: $x = \frac{18 \cdot 21}{14} = 27$ (công nhân).

Vậy cần 27 công nhân để hoàn thiện trong 21 ngày.

Bài 13. Gọi hai phân số tối giản cần tìm là $x; y (x, y \in \mathbb{Q})$.

Theo đề bài ta có tử số của chúng tỉ lệ với 7;5 và các mẫu số tỉ lệ với 3;2, nên ta có:

$$x : y = \frac{7}{3} : \frac{5}{2} = 14 : 15 \quad \text{thì} \quad \frac{x}{y} = \frac{14}{15} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{14+15}{15} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{29}{15}$$

$$\text{Mà: } x+y = \frac{29}{36} \Rightarrow y = \frac{(x+y) \cdot 15}{29} = \frac{5}{12} \Rightarrow x = \frac{7}{18}$$

$$\text{Vậy: } x = \frac{7}{18}; y = \frac{5}{12}$$

BÀI 21. TÍNH CHẤT DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

VD 1.1.

a) $5x = 4y$ và $x + y = 18$

Từ $5x = 4y$ suy ra $\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$.

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{x+y}{4+5} = \frac{18}{9} = 2$

Suy ra $x = 4 \cdot 2 = 8$ và $y = 5 \cdot 2 = 10$.

Vậy: $x = 8; y = 10$.

b) $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$ và $x - y = 1$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{x-y}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$

Suy ra $x = 3 \cdot 1 = 3$ và $y = 2 \cdot 1 = 2$.

Vậy: $x = 3; y = 2$.

c) $x : 5 = y : 7$ và $2x + 3y = 62$

Từ $x : 5 = y : 7$ suy ra $\frac{x}{5} = \frac{y}{7}$.

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{2x+3y}{2 \cdot 5 + 3 \cdot 7} = \frac{62}{31} = 2$

Suy ra $x = 5 \cdot 2 = 10$ và $y = 7 \cdot 2 = 14$.

Vậy: $x = 10; y = 14$.

d) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ và $x^2 + y^2 = 100$.

Từ $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ suy ra $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ hay $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16}$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{x^2+y^2}{9+16} = \frac{100}{25} = 4$

Suy ra $x^2 = 9 \cdot 4 = 36$ thì $x = \pm 6$ và $y^2 = 4 \cdot 16 = 64$ thì $y = \pm 8$

Vậy: $x = \pm 6; y = \pm 8$.

VD 1.2.

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x + y + z = 18$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2$

Suy ra: $x = 2.2 = 4; y = 3.2 = 6$ và $z = 4.2 = 8$.

Vậy: $x = 4; y = 6; z = 8$.

b) $x : y : z = 3 : 5 : 6$ và $x - y + z = 16$

Từ $x : y : z = 3 : 5 : 6$ ta có $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$.

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{x-y+z}{3-5+6} = \frac{16}{4} = 4$

Suy ra: $x = 3.4 = 12; y = 5.4 = 20$ và $z = 6.4 = 24$.

Vậy: $x = 12; y = 20; z = 24$.

c) $\frac{x}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}$ và $2x + y - 3z = 14$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2} = \frac{2x+y-3z}{2.3+7-3.2} = \frac{14}{7} = 2$

Suy ra: $x = 3.2 = 6; y = 7.2 = 14$ và $z = 2.3 = 4$.

Vậy: $x = 6; y = 14; z = 4$.

d) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$; $\frac{y}{z} = \frac{2}{5}$ và $4x - 3y - 2z = -40$.

Có $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ thì $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$

Có $\frac{y}{z} = \frac{2}{5}$ thì $\frac{y}{2} = \frac{z}{5}$ hay $\frac{y}{4} = \frac{z}{10}$

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{10}$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{10} = \frac{4x - 3y - 2z}{4.3 - 3.4 - 2.10} = \frac{-40}{-20} = 2$$

Suy ra: $x = 3 \cdot 2 = 6; y = 4 \cdot 2 = 8$ và $z = 2 \cdot 10 = 20$.

Vậy: $x = 6; y = 8; z = 10$.

VD 2.1. Gọi tuổi mẹ là x , tuổi con là y (tuổi, $x, y \in \mathbb{N}^*$). Do đó ta có: $x + y = 35$;

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{1}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{4} = \frac{y}{1} = \frac{x+y}{4+1} = \frac{35}{5} = 7$

Suy ra: $x = 4 \cdot 7 = 28; y = 1 \cdot 7 = 7$.

Vậy tuổi mẹ bằng 28, tuổi con bằng 7.

VD 2.2. Gọi x, y, z (triệu đồng) lần lượt là số tiền bác An đầu tư lần lượt vào các mã cổ phiếu MBB, CSV và GEG. Ta có $x + y + z = 100$.

Theo đề bài ta có x, y, z tỉ lệ với $5 : 3 : 2$, nghĩa là $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{5+3+2} = \frac{100}{10} = 10$

Suy ra: $x = 5 \cdot 10 = 50; y = 3 \cdot 10 = 30; z = 2 \cdot 10 = 20$.

Vậy bác An đầu tư lần lượt 50 triệu, 30 triệu và 20 triệu lần lượt vào các mã cổ phiếu MBB, CSV và GEG.

VD 2.3. Gọi a, b, c lần lượt là số học sinh lớp 7A, 7B, 7C ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ta có $\frac{a}{10} = \frac{b}{9} = \frac{c}{8}$ và $a - b = 5$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{10} = \frac{b}{9} = \frac{a-b}{10-9} = \frac{5}{1} = 5$

Suy ra: $a = 50; b = 45; c = 40$.

Vậy số học sinh mỗi lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 50, 45, 40 học sinh.

VD 2.4. Gọi số cây của tổ I, II, III, IV trồng thứ tự là x, y, z, t ($x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$).

Theo bài ra ta có: $x + y + z + t = 184$ và $\frac{x}{10} = \frac{y}{11} = \frac{z}{12} = \frac{t}{13}$.

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{11} = \frac{z}{12} = \frac{t}{13} = \frac{x+y+z+t}{10+11+12+13} = \frac{184}{46} = 4.$$

Suy ra $x = 10.4 = 40; y = 11.4 = 44; z = 12.4 = 48; t = 13.4 = 52$.

Vậy số cây của tổ I, II, III, IV trồng thứ tự là 40, 44, 48, 52.

VD 2.5. *Gọi lượng nước các vòi thứ nhất, thứ hai, thứ ba đã chảy vào hồ thứ tự là x, y, z ($x, y, z > 0$; đơn vị: m^3), thì thời gian mà các vòi đã chảy tương ứng là $3x, 5y, 8z$ (phút).

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 15,8$ và $3x = 5y = 8z$.

Từ $3x = 5y = 8z$ chia cho 120 ta được

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{24} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{40+24+15} = \frac{15,8}{79} = 0,2.$$

Từ đó suy ra $x = 40.0,2 = 8(m^3); y = 24.0,2 = 4,8(m^3); z = 15.0,2 = 3(m^3)$.

Vậy lượng nước vòi thứ nhất, thứ hai, thứ ba đã chảy vào hồ thứ tự là $x = 8m^3; y = 4,8m^3; z = 3m^3$.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

a) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{x+y}{3+6} = \frac{90}{9} = 10$.

Suy ra: $x = 3.10 = 30; y = 6.10 = 60$.

b) $\frac{x}{3} = \frac{y}{6} \Rightarrow \frac{4x}{12} = \frac{y}{6}$. Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{4x}{12} = \frac{y}{6} = \frac{4x-y}{12-6} = \frac{42}{6} = 7.$$

Suy ra: $4x = 12.7 = 84; y = 6.7 = 42$

Vậy: $x = 21; y = 42$.

c) Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = k$ Suy ra: $x = 3k; y = 6k$.

Thay vào $xy = 162$. Ta có: $18k^2 = 162$ thì $k^2 = 9$. Suy ra: $k = \pm 3$.

Với $k = 3$ thì $x = 9; y = 18$.

Với $k = -3$ thì $x = -9; y = -18$.

d) Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = k$. Suy ra: $x = 3k$; $y = 6k$.

Thay vào $2x^2 - y^2 = -8$ ta có $2.(3k)^2 - (6k)^2 = -8$

$$18k^2 - 36k^2 = -8$$

$$-18k^2 = -8$$

$$k^2 = \frac{4}{9}$$

$$k = \pm \frac{2}{3}$$

Với $k = \frac{2}{3}$ thì $x = 2$; $y = 4$.

Với $k = -\frac{2}{3}$ thì $x = -2$; $y = -4$.

Bài 2.

a) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{30}{10} = 3$

Suy ra: $x = 2.3 = 6$; $y = 3.3 = 9$; $z = 5.3 = 15$.

b) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ suy ra: $\frac{x}{2} = \frac{2y}{6} = \frac{3z}{15}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{2} = \frac{2y}{6} = \frac{3z}{15} = \frac{x-2y+3z}{2-6+15} = \frac{33}{11} = 3$

Suy ra: $x = 3.2 = 6$, $y = 3.6 = 18$, $z = 3.15 = 45$.

c) Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k$ suy ra: $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 5k$.

Thay vào $xyz = -240$ ta được: $2k.3k.5k = -240 \Rightarrow 30k^3 = -240 \Rightarrow k^3 = -8 \Rightarrow k = -2$.

Do đó: $x = 2k = -4$; $y = 3k = -6$; $z = 5k = -10$.

Bài 3.

a) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{13}$ suy ra: $\frac{2x+2}{6} = \frac{3y-6}{12} = \frac{z-1}{13}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{2x+2}{6} = \frac{3y-6}{12} = \frac{z-1}{13} = \frac{2x+2-3y+6+z-1}{6-12+13} = \frac{2x-3y+z+3}{7} = \frac{42+7}{7} = \frac{49}{7} = 7.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 2x + 2 = 6 \cdot 7 = 42 \\ 3y - 6 = 7 \cdot 12 = 84 \\ z - 1 = 13 \cdot 7 = 91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 40 \\ 3y = 90 \\ z = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \\ z = 90 \end{cases}.$$

b) Ta có: $\frac{x}{-3} = \frac{y}{5}$ thì $\frac{x}{6} = \frac{y}{-10}$ và $\frac{y}{2} = \frac{z}{7}$ thì $\frac{y}{-10} = \frac{z}{-35}$

Do đó: $\frac{x}{6} = \frac{y}{-10} = \frac{z}{35} = \frac{2x - 3y + z}{12 + 30 - 35} = \frac{42}{7} = 6$

Vậy: $x = 36; y = -60; z = -210$.

c) Ta có: $6x = 4y = z$ nên $\frac{6x}{12} = \frac{4y}{12} = \frac{z}{12}$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{12}$$

Do đó: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{12} = \frac{2x - 3y + z}{4 - 9 + 12} = \frac{42}{7} = 6$.

Vậy: $x = 12; y = 18; z = 72$.

d) Ta có: $x = -2y$ thì $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1}$ và $7y = 2z$ thì $\frac{y}{2} = \frac{z}{7}$

Do đó: $\frac{x}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{7} = \frac{2x - 3y + z}{-8 - 6 + 7} = \frac{42}{-7} = -6$

Vậy: $x = 24; y = -12; z = -42$.

Bài 4.

a) $\frac{x}{y} = \frac{6}{5}$ và $x + y = 121$. Ta có: $\frac{x}{6} = \frac{y}{5} = \frac{x+y}{6+5} = \frac{121}{11} = 11$ Vậy: $x = 66, y = 55$.

b) $4x = 5y$ và $2x - 5y = 40$. Ta có: $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{2x - 5y}{2 \cdot 5 - 5 \cdot 4} = \frac{40}{-10} = -4$. Vậy: $x = -20$,
 $y = -16$.

c) $\frac{x}{3} = \frac{y}{16}$ và $xy = 192$. Đặt: $\frac{x}{3} = \frac{y}{16} = k$. Suy ra: $x = 3k, y = 16k$.

Do đó: $3k \cdot 16k = 192 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$.

Với $k = 2$ thì $x = 6; y = 32$.

Với $k = -2$ thì $x = -6; y = -32$.

d) $\frac{x}{-3} = \frac{y}{7}$ và $x^2 - y^2 = -360$.

Đặt: $\frac{x}{-3} = \frac{y}{7} = k$ Suy ra: $x = -3k, y = 7k$.

Do đó $9k^2 - 49k^2 = -360 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3$.

Với $k = 3$ thì $x = -9; y = 21$.

Với $k = -3$ thì $x = 9; y = -21$.

e) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$ và $x + y + z = 52$.

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{3+4+6} = \frac{52}{13} = 4 \Rightarrow x = 12, y = 16, z = 24$.

f) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và $x - 2y + 3z = 46$.

Ta có: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4} = \frac{x-1-2(y+2)+3(z-3)}{2-2.3+3.4} = \frac{32}{8} = 4$.

Suy ra: $x - 1 = 8, y + 2 = 12, z - 3 = 16$.

Vậy: $x = 9, y = 10, z = 19$.

g) $\frac{x}{y} = \frac{7}{10}; \frac{y}{z} = \frac{5}{8}$ và $2x - y + 3z = 104$.

Từ đề bài $\frac{x}{y} = \frac{7}{10}, \frac{y}{z} = \frac{5}{8}$ ta được: $\frac{x}{7} = \frac{y}{10} = \frac{z}{16} = \frac{2x - y + 3z}{2.7 - 10 + 3.16} = \frac{104}{52} = 2$

Vậy: $x = 14, y = 20, z = 32$.

i) $-3x = 2y; 4y = 5z$ và $x^2 - y^2 + z^2 = 76$.

Từ đề bài ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ hay $\frac{x}{10} = \frac{y}{-15}; \frac{y}{-15} = \frac{z}{-12}$ suy ra: $\frac{x}{10} = \frac{y}{-15} = \frac{z}{-12}$.

$\frac{x^2}{100} = \frac{y^2}{225} = \frac{z^2}{144} = \frac{x^2 - y^2 + z^2}{100 - 225 + 144} = \frac{76}{19} = 4$

Ta được: $x^2 = 400, y^2 = 900, z^2 = 576$.

Vậy $x = -20, y = 30, z = 24$ hoặc $x = 20, y = -30, z = -24$.

Bài 5.

a) Gọi số bi của An và Chi lần lượt là x và y (viên), ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Do đó ta có mối liên hệ: $\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$ và $y - x = 4$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{y-x}{5-4} = \frac{4}{1} = 4$

$\Rightarrow x = 4.4 = 16$; $y = 4.5 = 20$.

Vậy số bi của An là 16 viên, số bi của Chi là 20 viên.

b) Gọi chiều dài và chiều rộng của khu vườn là $x, y(m)$, ($x, y > 0$).

Do diện tích bằng 300 nên $x.y = 300$ (1)

Hai cạnh tỉ lệ với 4 và 3 nên $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$.

Đặt: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = k \Rightarrow x = 4k, y = 3k$, thay vào (1) $\Rightarrow 12k^2 = 300 \Rightarrow k^2 = 25 \Rightarrow k = 5$.

Suy ra: $x = 20, y = 15$.

c) Gọi số sản phẩm của công nhân thứ nhất và thứ hai lần lượt là x, y .

Do đó ta có mối liên hệ: $\frac{x}{8} = \frac{y}{5}$ và $x - y = 60$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{x-y}{8-5} = \frac{60}{3} = 20$ Suy ra: $x = 8.20 = 160$; $y = 20.5 = 100$.

Vậy công nhân thứ nhất làm được 160 sản phẩm, công nhân thứ hai làm được 100 sản phẩm.

Bài 6.

a) Gọi ba cạnh của tam giác lần lượt là x, y, z (cm), ($x, y, z > 0$)

Do đó ta có mối liên hệ: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và chu vi là $x + y + z = 40,5$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x+y+z}{3+5+7} = \frac{40,5}{15} = 2,7$

Suy ra: $x = 8,1$, $y = 13,5$, $z = 18,9$.

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác là 8,1; 13,5; 18,9 cm.

b) Gọi bốn số cần tìm lần lượt là x, y, z, t ($x, y, z, t > 0$).

Do đó ta có mối liên hệ: $x + y + z + t = 48$ và $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{t}{9}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{t}{9} = \frac{x+y+z+t}{3+5+7+9} = \frac{48}{24} = 2.$$

Vậy: $x = 6; y = 10; z = 14; t = 18$.

c) Gọi số học sinh lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (học sinh), ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Do đó ta có mối liên hệ: $x = \frac{7}{8}y$, $y = \frac{16}{15}z$ và $x + y + z = 135$.

Ta có: $\frac{x}{7} = \frac{y}{8}$ hay $\frac{x}{14} = \frac{y}{16}$; $\frac{y}{16} = \frac{z}{15}$. Do đó ta có tỉ lệ thức $\frac{x}{14} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{14} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{14+15+16} = \frac{135}{45} = 3.$$

Vậy: $x = 42; y = 48; z = 45$.

Vậy số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 42, 48 và 45 học sinh.

d) Gọi ba số cần tìm theo thứ tự là x, y, z ($x, y, z > 0$)

Do đó ta có mối liên hệ: $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$; $\frac{y}{8} = \frac{z}{5}$ và $x + y + z = 237$.

Ta có: $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ hay $\frac{x}{40} = \frac{y}{24}$; $\frac{y}{8} = \frac{z}{5}$ hay $\frac{y}{24} = \frac{z}{15}$. Do đó ta có tỉ lệ thức: $\frac{x}{40} = \frac{y}{24} = \frac{z}{15}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{24} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{40+24+15} = \frac{237}{79} = 3$$

Suy ra: $x = 120; y = 72; z = 45$.

e) Gọi số học sinh lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (em), ($x, y, z > 0$).

Theo đề bài ta có : $x + y + z = 105$; $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $\frac{y}{6} = \frac{z}{11}$.

Ta có: $\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{11} = \frac{x+y+z}{4+6+11} = \frac{105}{21} = 5$

Vậy: $x = 20, y = 30, z = 55$.

f) Gọi số học sinh lớp 7A, 7B, 7C, 7D lần lượt là a, b, c, d (em), ($a, b, c, d > 0$).

Theo đề bài ta có : $\frac{a}{11} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13} = \frac{d}{14}$ và $2b - a = 39$.

$$\text{Do đó : } \frac{a}{11} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13} = \frac{d}{14} = \frac{2b-a}{12 \cdot 2 - 11} = \frac{39}{13} = 3$$

Suy ra: $a = 33, b = 36, c = 39, d = 42$.

Bài 7.

a) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ Ta có: $a = bk; c = dk$.

$$\text{Ta có : } \frac{a+b}{b} = \frac{bk+b}{b} = \frac{b(k+1)}{b} = k+1; \frac{c+d}{d} = \frac{dk+d}{d} = \frac{d(k+1)}{d} = k+1.$$

$$\text{Do đó } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

$$\text{b) Ta có : } \frac{a+b}{a-b} = \frac{bk+b}{bk-b} = \frac{b(k+1)}{b(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}; \frac{c+d}{c-d} = \frac{dk+d}{dk-d} = \frac{d(k+1)}{d(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

$$\text{c) Ta có : } \frac{5a+2b}{5a-2b} = \frac{5bk+2b}{5bk-2b} = \frac{b(5k+2)}{b(5k-2)} = \frac{5k+2}{5k-2};$$

$$\frac{5c+2d}{5c-2d} = \frac{5dk+2d}{5dk-2d} = \frac{d(5k+2)}{d(5k-2)} = \frac{5k+2}{5k-2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{5a+2b}{5a-2b} = \frac{5c+2d}{5c-2d}.$$

$$\text{d) Ta có : } \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2+d^2} = \frac{k^2(b^2+d^2)}{b^2+d^2} = k^2;$$

$$\frac{(a+c)^2}{(b+d)^2} = \frac{(bk+dk)^2}{(b+d)^2} = \frac{k^2(b+d)^2}{(b+d)^2} = k^2.$$

$$\text{Vậy } \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{(a+c)^2}{(b+d)^2}.$$

Bài 8.

a) Đặt $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$ thì $a = ck, b = dk$.

$$\text{Ta có: } \frac{a-c}{c} = \frac{ck-c}{c} = \frac{c(k-1)}{c} = k-1; \frac{b-d}{d} = \frac{dk-d}{d} = \frac{d(k-1)}{d} = k-1.$$

$$\text{Vậy } \frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}.$$

$$\text{b) } \frac{a+c}{b+d} = \frac{ck+c}{dk+d} = \frac{c(k+1)}{d(k+1)} = \frac{c}{d}; \frac{a-c}{b-d} = \frac{ck-c}{dk-d} = \frac{c(k-1)}{d(k-1)} = \frac{c}{d}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

$$\text{c) Ta có: } \frac{3a+4c}{3a-4c} = \frac{3ck+4c}{3ck-4c} = \frac{c(3k+4)}{c(3k-4)} = \frac{3k+4}{3k-4};$$

$$\frac{3b+4d}{3b-4d} = \frac{3dk+4d}{3dk-4d} = \frac{d(3k+4)}{d(3k-4)} = \frac{3k+4}{3k-4}.$$

$$\text{Vậy } \frac{3a+4c}{3a-4c} = \frac{3b+4d}{3b-4d}.$$

$$\text{d) } \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

$$\text{Ta có: } \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{c^2k^2+d^2k^2}{c^2+d^2} = \frac{k^2(c^2+d^2)}{c^2+d^2} = k^2; \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{(ck+dk)^2}{(c+d)^2} = \frac{k^2(c+d)^2}{(c+d)^2} = k^2.$$

$$\text{Vậy } \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}.$$

Bài 9.

$$\text{a) Đặt } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ thì } a = bk, c = dk.$$

$$\text{Do đó: } \frac{a-2b}{b} = \frac{bk-2b}{b} = \frac{b(k-2)}{b} = k-2, \frac{c-2d}{d} = \frac{dk-2d}{d} = \frac{d(k-2)}{d} = k-2.$$

$$\text{Vậy } \frac{a-2b}{b} = \frac{c-2d}{d}.$$

$$\text{b) } (a+4c)(2b-3d) = (b+4d)(2a-3c)$$

$$(a+4c)(2b-3d) = (bk+4dk)(2b-3d) = k(b+4d)(2b-3d).$$

$$(b+4d)(2a-3c) = (b+4d)(2bk-3dk) = k(b+4d)(2b-3d).$$

$$\text{Vậy } (a+4c)(2b-3d) = (b+4d)(2a-3c).$$

$$c) \frac{ac}{bd} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}.$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{bk \cdot dk}{b \cdot d} = k^2; \quad \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{b^2 k^2 - d^2 k^2}{b^2 - d^2} = \frac{k^2(b^2 - d^2)}{b^2 - d^2} = k^2.$$

$$\text{Vậy } \frac{ac}{bd} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}.$$

Bài 10. Ta có $a+c = 2b$ thì $d(a+c) = 2bd$. Mà $2bd = c(b+d)$ nên $d(a+c) = c(b+d)$

$$ad + cd = bc + cd$$

$$ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Bài 11. Ta có $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$ suy ra: $(a+b)(c-a) = (c+a)(a-b)$

$$ac - a^2 + bc - ab = ac - bc + a^2 - ab$$

$$a^2 = bc.$$

Bài 12. Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ Suy ra: $a = bk, c = dk$. Có $\frac{a+3b}{b} = \frac{bk+3b}{b} = k+3$,

$$\frac{c+3d}{d} = \frac{dk+3d}{d} = k+3.$$

$$\text{Vậy } \frac{a+3b}{b} = \frac{c+3d}{d}.$$

$$b) \frac{a^2 + 4b^2}{b^2} = \frac{c^2 + 4d^2}{d^2}.$$

$$\frac{a^2 + 4b^2}{b^2} = \frac{b^2 k^2 + 4b^2}{b^2} = k^2 + 4.$$

$$\frac{c^2 + 4d^2}{d^2} = \frac{d^2 k^2 + 4d^2}{d^2} = k^2 + 4.$$

$$\text{Vậy } \frac{a^2 + 4b^2}{b^2} = \frac{c^2 + 4d^2}{d^2}.$$

BÀI 22. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

VD 1.1.

a) Ta có $\frac{y}{x} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Do đó $y = \frac{5}{3}x$.

b) Khi $x = 24$ thì $y = \frac{5}{3} \cdot 24 = 40$.

c) Từ $y = \frac{5}{3}x$ suy ra $x = \frac{3}{5}y$. Do đó, khi $y = \frac{3}{16}$ thì $x = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{16} = \frac{9}{80}$

VD 1.2. Từ dòng đầu ta suy ra: $y = -4x$ và $x = \frac{-1}{4}y$. Điền các số vào bảng ta được:

| | | | | | | | | |
|---|----|-----|-----|----|----|------|----------------|---------------|
| x | 2 | 4 | 5 | -3 | -5 | 0,3 | $\frac{-1}{4}$ | ? |
| y | -8 | -16 | -20 | 12 | 20 | -1,2 | 1 | $\frac{4}{3}$ |

VD 1.3.

a) Quãng đường đi được s (km) theo thời gian t (h) là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Vì vật chuyển động đều với vận tốc 25 (km/h) nên hệ số tỉ lệ $k = 25$.

Ta có công thức tính : $s = 25t$.

b) Khối lượng m (kg) theo thể tích V (m^3) của thanh kim loại đồng chất là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Vì thanh kim loại đồng chất có khối lượng riêng là D (m^3) nên hệ số tỉ lệ $k = D$.

Ta có công thức tính : $m = D.V$.

VD 1.4.

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.

Áp dụng tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận ta có : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau thì : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k$.

Thay số : $\frac{y_1}{4} = \frac{y_2}{-10} = \frac{7}{4 - (-10)} = k$.

Do đó : $k = \frac{7}{4 - (-10)} = \frac{1}{2}$, $y_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ và $y_2 = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5$.

b) Công thức biểu diễn y theo x là : $y = \frac{1}{2}x$.

VD 2.1. Gọi x, y (g) lần lượt là khối lượng của hai thanh đồng. Ta có $y - x = 72$.

Khối lượng của hai thanh đồng tỉ lệ thuận với thể tích của nó nên $\frac{x}{26} = \frac{y}{34}$.

Từ tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có $\frac{x}{26} = \frac{y}{34} = \frac{y-x}{34-26} = \frac{72}{8} = 9$.

Suy ra: $x = 26 \cdot 9 = 234$, $y = 34 \cdot 9 = 306$.

Vậy hai thanh đồng có khối lượng tương ứng là 234 g và 306 g.

VD 2.2. Gọi x, y, z (cuốn sách) lần lượt là số sách thầy tặng lần lượt cho các tổ I, tổ II và tổ III. Ta có : $x + y + z = 30$

Vì số học sinh tỉ lệ thuận với số sách được nhận nên $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Từ tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{36}{9} = 4$.

Suy ra $x = 4 \cdot 2 = 8$; $y = 4 \cdot 3 = 12$; $z = 4 \cdot 4 = 16$.

Vậy số học của ba tổ lần lượt là 8 học sinh, 12 học sinh và 16 học sinh.

VD 2.3. Gọi x, y và z (triệu đồng) là số tiền thưởng lần lượt của ba công nhân. Vì tổng số tiền thưởng người thứ nhất và người thứ ba hơn người thứ hai 15 triệu đồng. ta có $x + z - y = 15$.

Số tiền thưởng và năng suất lao động là hai đại lượng tỉ lệ thuận ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$

.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x-y+z}{3-5+7} = \frac{15}{5} = 3$.

Suy ra $x = 3 \cdot 3 = 9$; $y = 5 \cdot 3 = 15$; $z = 7 \cdot 3 = 21$.

Vậy số tiền thưởng của ba công nhân lần lượt là 9 triệu đồng, 15 triệu đồng và 21 triệu đồng.

VD 2.4. Gọi số đo các góc A, B, C của ΔABC lần lượt là x, y, z độ.

Trong ΔABC thì tổng ba góc A, B, C bằng 180° nên ta có : $x + y + z = 180^\circ$.

Vì số đo các góc A, B, C lần lượt tỉ lệ với các số $1; 2; 3$ nên ta có : $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{1+2+3} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ.$$

Suy ra : $x = 30^\circ$, $y = 2.30^\circ = 60^\circ$, $z = 3.30^\circ = 90^\circ$.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Vì đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $k = 5$ nên ta có $y = 5x$.

Do đó : $x = \frac{1}{5}y$. Cho nên đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{5}.$$

Bài 2.

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận nên ta có công thức : $y = kx$.

Theo điều kiện, khi $x = 8$ thì $y = 3$ nên thay vào công thức ta tính được k :

$$3 = k.8 \Rightarrow k = \frac{3}{8}.$$

b) Ta có : $y = kx$ nên $k = \frac{3}{8}$ thì $y = \frac{3}{8}x$

c) x Tính giá trị của y khi $x = -2$ và $x = 5$. Ta có : $y = \frac{3}{8}x$.

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = \frac{3}{8}.(-2) = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Với } x = 5 \Rightarrow y = \frac{3}{8}.5 = \frac{15}{8}.$$

Bài 3. Vì đại lượng z tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ là $k = 2$ nên $z = k.y$.

Vì đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ là $h = -\frac{3}{5}$ nên $y = h.x$.

Do đó : $z = k.y = k.h.x$. Thay số $z = 2.\left(-\frac{3}{5}\right)x = -\frac{6}{5}x$. Suy ra đại lượng z tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ là $-\frac{6}{5}$.

Bài 4.

Vì y_1 tỉ lệ thuận với x_1 theo hệ số tỉ lệ k nên $y_1 = kx_1$.

Vì y_2 tỉ lệ thuận với x_2 theo hệ số tỉ lệ k nên $y_2 = kx_2$.

Do đó : $y_1 - y_2 = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$ nên $y_1 - y_2$ tỉ lệ thuận với $x_1 - x_2$ theo hệ số tỉ lệ k .

Bài 5.

a) Đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $k(k \neq 0)$ nên ta có công thức : $y = kx$. Thì $y_1 - y_2$ tỉ lệ thuận với $x_1 - x_2$ theo hệ số tỉ lệ k .

Ta có : $y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$. Thay số $-3 = k.12 \Rightarrow k = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$. Do đó ta có biểu diễn y theo x là : $y = -\frac{1}{4}x$.

b) Tính giá trị của y

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \cdot (-2) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Với } x = 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1.$$

Bài 6.

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau. Áp dụng tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận

$$\text{ta có : } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k.$$

$$\text{Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau thì : } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{2y_1}{2x_1} = \frac{3y_2}{3x_2} = \frac{2y_1 - 3y_2}{2x_1 - 3x_2} = k.$$

$$\text{Thay số : } \frac{y_1}{-0,5} = \frac{y_2}{-1,5} = \frac{-10,5}{2 \cdot (-0,5) - 3 \cdot (-1,5)} = k.$$

Do đó : $k = \frac{-10,5}{2.(-0,5) - 3.(-1,5)} = \frac{-10,5}{3,5} = -3$, $y_1 = -0,5.(-3) = 1,5$ và

$y_2 = -1,5.(-3) = 4,5$.

b) Công thức biểu diễn y theo x là : $y = -3x$.

Bài 7.

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.

Áp dụng tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận ta có : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau thì : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{3y_1}{3x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{3y_1 + y_2}{3x_1 + x_2} = k$.

Thay số : $\frac{3}{x_1} = \frac{-15}{x_2} = \frac{3.3 + (-15)}{-4} = k$.

Do đó : $k = \frac{3.3 + (-15)}{-4} = \frac{3}{2}$, $x_1 = 3 : \frac{3}{2} = 2$ và $x_2 = -15 : \frac{3}{2} = -10$.

b) Công thức biểu diễn y theo x là : $y = \frac{3}{2}x$.

Bài 8. Đổi 2 (tấn) = 2000 (kg).

Gọi khối lượng gạo có trong 2 tấn thóc (2000 kg) là x (kg).

Vì khối lượng gạo và khối lượng thóc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Theo tính chất

của đại lượng tỉ lệ thuận ta có : $\frac{x}{2000} = \frac{60}{100} \Rightarrow x = \frac{2000.60}{100} = 1200$.

Vậy lượng gạo có trong 2 tấn thóc là 1200 (kg).

Bài 9.

a) Vì $k = \frac{y}{x} \Rightarrow k = \frac{4}{-2} = -2$.

b) Ta có : Công thức biểu diễn đại lượng y theo đại lượng x là : $y = -2x$.

Do đó ta điền được các kết quả vào ô trống như sau :

| | | | | | |
|-----|----|----|----|----------------|----|
| x | -4 | -3 | -2 | $-\frac{1}{2}$ | 2 |
| y | 8 | 6 | 4 | 1 | -4 |

Bài 10.

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.

Áp dụng tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận ta có : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau thì : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = k$.

Thay số : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-2}{6} = k$.

Do đó : $k = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$. Suy ra hai đại lượng x và y liên hệ với nhau bởi công thức .

b) Do đó ta điền được các kết quả vào ô trống như sau :

| | | | | | | | |
|-----|---------------|---------------|----------------|----|---------------|---|----|
| x | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | -3 | -1 | 0 | 18 |
| y | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | -6 |

Bài 11.

a) Các ô trống đều được điền số 9.

b) Hai đại lượng s và t có tỉ lệ thuận với nhau vì $s = 9t$.

Ta có thể nói : Đại lượng s tỉ lệ thuận với đại lượng t theo hệ số tỉ lệ $k = 9$ hoặc

Đại lượng t tỉ lệ thuận với đại lượng s theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k} = \frac{1}{9}$.

Bài 12.

Ta $y = -\frac{1}{3}x$ có : $1,35 = -0,3.(-0,45)$; $0,9 = -0,3.(-3)$; $0 = -0,3.0$; $-0,45 = -0,3.1,5$; $-0,675 = -0,3.2,25$.

Do đó : Hai đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau vì $y = -0,3x$.

Ta có thể nói : Đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $k = -0,3$

hoặc đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k} = \frac{1}{-0,3} = -\frac{10}{3}$.

Bài 13.

a) Khi chia số 117 thành ba phần thì ta gọi mỗi phần lần lượt là x, y, z .

Vì tổng ba phần x, y, z là 117 nên ta có : $x + y + z = 117$.

Vì ba phần x, y, z lần lượt tỉ lệ với các số 3;4;6 nên ta có : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{3+4+6} = \frac{117}{13} = 9$.

Suy ra : $x = 3.9 = 27$, $y = 4.9 = 36$, $z = 6.9 = 54$.

b) Khi chia số 117 thành ba phần thì ta gọi mỗi phần lần lượt là x, y, z .

Vì tổng ba phần x, y, z là 117 nên ta có : $x + y + z = 117$.

Vì ba phần x, y, z lần lượt tỉ lệ với các số $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}$ nên ta có : $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{6}}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{117}{\frac{4}{12}} = 156.$$

Suy ra : $x = \frac{1}{3}.156 = 52$, $y = \frac{1}{4}.156 = 39$, $z = \frac{1}{6}.156 = 26$.

Bài 14. Vì ba số x, y và z lần lượt tỉ lệ với các số 3;5;7 nên ta có : $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có : $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{z-y}{7-5} = \frac{1}{2}$.

Suy ra : $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2}$ và $z = \frac{7}{2}$.

Bài 15. Gọi khối lượng của hai thanh kim loại đồng chất tương ứng là m_1 gram và m_2 gram.

Vì khối lượng của cả hai thanh là 225 (g) nên ta có : $m_1 + m_2 = 225$ (g).

Do khối lượng và thể tích của vật thể là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau nên ta

có : $\frac{m_1}{10} = \frac{m_2}{15}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có : $\frac{m_1}{10} = \frac{m_2}{15} = \frac{m_1+m_2}{10+15} = \frac{225}{25} = 9$.

Suy ra : $m_1 = 10.9 = 90$ (g) và $m_2 = 15.9 = 135$ (g).

Bài 16. Gọi số cây phải trồng và chăm sóc của các lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z .
Đơn vị (cây).

Vì tổng số cây của ba lớp 7 cần phải trồng và chăm sóc 50 cây nên ta có :
 $x + y + z = 50$.

Do số cây xanh tỉ lệ với số học sinh của mỗi lớp nên ta có : $\frac{x}{45} = \frac{y}{54} = \frac{z}{51}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{45} = \frac{y}{54} = \frac{z}{51} = \frac{x+y+z}{45+54+51} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra : $x = 45 \cdot \frac{1}{3} = 15$, $y = 54 \cdot \frac{1}{3} = 18$ và $z = 51 \cdot \frac{1}{3} = 17$.

Vậy số cây phải trồng và chăm sóc của lớp 7A, 7B, 7C theo thứ tự lần lượt là : 9 (cây), 18 (cây) và 17 (cây).

Bài 17. Gọi khối lượng hàng vận chuyển được của mỗi đơn vị A, B, C lần lượt là x, y, z . Đơn vị (tấn).

Vì tổng khối lượng hàng vận chuyển của cả ba đơn vị là 700 tấn nên ta có :
 $x + y + z = 700$ (tấn).

Mỗi lượt huy động xe, các đơn vị vận chuyển một khối lượng hàng tương ứng là :

Đơn vị A : $12.5 = 60$ (tấn).

Đơn vị B : $15.3 = 45$ (tấn).

Đơn vị C : $20.3,5 = 70$ (tấn).

Vì số lượt huy động xe như nhau nên khối lượng hàng vận chuyển được của ba đơn vị tỉ lệ thuận với khối lượng hàng của các đơn vị vận chuyển được trong mỗi

lượt huy động nên ta có : $\frac{x}{60} = \frac{y}{45} = \frac{z}{70}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{60} = \frac{y}{45} = \frac{z}{70} = \frac{x+y+z}{60+45+70} = \frac{700}{175} = 4.$$

Suy $y = 45.4 = 180$ và ra : $x = 60.4 = 240$, và $z = 70.4 = 280$.

Vậy khối lượng hàng đơn vị A, B, C vận chuyển được lần lượt là 240 (tấn), 180 (tấn) và 280 (tấn).

Bài 18. Gọi số bút bi, chì, dạ có trong mỗi hộp lần lượt là : x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Vì tổng số bút các loại là 240 cái nên ta có : $x + y + z = 240$.

Số bút bi, chì, dạ còn lại sau khi bán lần lượt là : $\frac{x}{2}, \frac{y}{4}, \frac{z}{6}$ cái.

Vì sau khi bán số bút mỗi loại còn lại là bằng nhau nên ta có : $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau : $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{2+4+6} = \frac{240}{12} = 20$.

Từ đó tìm được : $x = 40, y = 80$ và $z = 120$.

Vậy số bút bi, chì, dạ lần lượt là : 40 (cái), 80 (cái) và 120 (cái).

Bài 19. Gọi số giấy vụn thu được của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là : x, y, z ($x > 0, y > 0, z > 0$). Đơn vị (kg).

Vì số kg giấy mỗi lớp thu được lần lượt tỉ lệ với 30, 45, 42 nên ta có :

$$\frac{x}{30} = \frac{y}{45} = \frac{z}{42}.$$

Vì tổng của hai lần số kg giấy vụn của lớp 7C và ba lần số giấy của lớp 7B thì nhiều hơn bốn lần số kg giấy của lớp 7A là 19 kg nên ta có : $3y + 2z - 4x = 19$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{x}{30} = \frac{y}{45} = \frac{z}{42} = \frac{4x}{120} = \frac{3y}{135} = \frac{2z}{84} = \frac{3y + 2z - 4x}{135 + 84 - 120} = \frac{198}{99} = 2.$$

Từ đó tìm được : $x = 60, y = 90$ và $z = 84$.

Vậy khối lượng giấy thu được của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là : 60 (kg), 90 (kg) và 84 (kg).

Bài 20. Gọi khối lượng giấy vụn thu được của ba chi đội 7A, 7B và 7C lần lượt là : m_1, m_2 và m_3 ($m_1 > 0, m_2 > 0, m_3 > 0$). Đơn vị (kg).

Từ điều kiện đề bài, ta có : $m_1 + m_2 + m_3 = 120$ (kg) và $\frac{m_1}{9} = \frac{m_2}{7} = \frac{m_3}{8}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{m_1}{9} = \frac{m_2}{7} = \frac{m_3}{8} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{9 + 7 + 8} = \frac{120}{24} = 5.$$

Tìm được : $m_1 = 45$ (kg), $m_2 = 35$ (kg) và $m_3 = 40$ (kg).

Bài 21. Gọi số học sinh giỏi ở các khối 6, 7, 8, 9 lần lượt là : x, y, z, t ($x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$). Đơn vị (học sinh).

Từ điều kiện đề bài : $t - z = 6$ (học sinh) và $\frac{x}{1,4} = \frac{y}{1,2} = \frac{z}{1,3} = \frac{t}{1,5}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{1,4} = \frac{y}{1,2} = \frac{z}{1,3} = \frac{t}{1,5} = \frac{t-z}{1,5-1,3} = \frac{6}{0,2} = 30.$$

Tìm được : $x = 42$ (học sinh), $y = 36$ (học sinh), $z = 39$ (học sinh) và $t = 45$.

BÀI 23. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

VD 1.1.

a) Ta có $xy = 2 \cdot 5 = 15$. Do đó $y = \frac{15}{x}$.

b) Khi $x = 3$ ta có $y = \frac{15}{-6} = -\frac{5}{3}$.

c) Từ $y = \frac{15}{x}$ suy ra $x = \frac{15}{y}$. Do đó với $x = \frac{15}{0,8} = \frac{75}{4}$.

VD 1.2.

| | | | | | |
|---|--|---|----|-----|------|
| x | | 2 | -2 | 2,5 | |
| y | | 4 | -4 | | -0,4 |

VD 1.3. Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là x và y (m).

Ta có $x \cdot y = 14m^2$. Vậy chiều dài và chiều rộng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

VD 2.1.

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên áp dụng tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch ta có :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \text{ hay } \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}. \text{ Suy ra: } \frac{y_1}{15} = \frac{y_2}{-10} = \frac{y_1 - y_2}{15 - (-10)} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

Do đó : $y_1 = 15 \cdot \frac{1}{5} = 3$ và $y_2 = -10 \cdot \frac{1}{5} = -2$.

b) Ta có $a = x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = -30$ nên ta có biểu diễn y theo x là : $y = \frac{-30}{x}$.

VD 2.2.

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên áp dụng tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch ta có :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \text{ hay } \frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có : $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1} = \frac{2x_2}{2y_1} = \frac{x_1 - 2x_2}{y_2 - 2y_1}$

Suy ra: $\frac{x_1}{15} = \frac{x_2}{5} = \frac{2x_2}{2.5} = \frac{8}{15 - 2.5} = \frac{8}{5}$. Do đó : $x_1 = 15 \cdot \frac{8}{5} = 24$ và .

b) Ta có $a = x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = 120$ nên ta có biểu diễn y theo x là : $y = \frac{120}{x}$.

$\forall x_2 = 5 \cdot \frac{8}{5} = 8$ **D 2.3.** Gọi thời gian để 5 máy cày cày xong cánh đồng là x (giờ).

Vì năng suất của mỗi máy cày là như nhau, nên để cày cùng một cánh đồng, số máy cày tỉ lệ nghịch với số giờ cày xong cánh đồng.

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch ta có : $\frac{30}{x} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 30}{5} = 18$.

Vậy 5 máy cày cày xong cánh đồng đồng đó hết 18 (giờ).

VD 3.1. Gọi x, y, z (giờ) lần lượt là thời gian ô tô đi trên ba chặng đường. Ta có $x + y + z = 6$.

Do độ dài mỗi chặng đường là bằng nhau nên thời gian đi trên mỗi chặng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do đó ta có: $60x = 80y = 120z$.

Suy ra $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.

Từ tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{4+3+2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Suy ra $x = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$ (giờ)

Do đó khoảng cách giữa hai tỉnh A và B là $60 \cdot \frac{8}{3} = 480$ (km).

VD 3.2. Khi chia số 520 thành ba phần tỉ lệ nghịch với 2;3;4 thì ta được mỗi phần lần lượt là x, y, z và ($x > 0, y > 0, z > 0$).

- Vì tổng ba số là 520 nên ta có : $x + y + z = 520$.

- Vì Chia số 520 thành ba phần tỉ lệ nghịch với 2;3;4 nên ta có :

$$2x = 3y = 4z.$$

- Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$2x = 3y = 4z = \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$$

Suy ra: $2x = 3y = 4z = \frac{520}{\frac{13}{12}} = 480$.

Suy ra: $x = 480 : 2 = 240$, $y = 480 : 3 = 160$, $z = 480 : 4 = 120$.

VD 3.3. Gọi x, y, z (máy) là số máy lần lượt của ba tổ I, II và III. Ta có $x+y+z=52$.

Do khối lượng công việc không đổi. Vậy số máy và thời gian làm việc là hai đại

lượng tỉ lệ nghịch. Do đó ta có $4x = 6y = 8z$. Suy ra $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

Từ tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{52}{13} = 4$

Suy ra: $x = 4.6 = 24$; $y = 4.4 = 16$; $z = 4.3 = 12$

Vậy số máy của ba tổ là 24;16 và 12.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

a) Vì đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ -2 nên ta có :

$$y = \frac{-2}{x}.$$

Do đó : $x = \frac{-2}{y}$ nên đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ -2 .

b) Vì đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ a nên ta có : $y = \frac{a}{x}$.

Do đó : $x = \frac{a}{y}$ nên đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ a .

Bài 2.

a) $x.y = a$ nên x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hệ số tỉ lệ nghịch là a .

b) $u.t = S$ nên u và t là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hệ số tỉ lệ nghịch là S .

c) $S = \pi R^2$ nên S và R không phải là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

d) $a = N.t$ nên N và t là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hệ số tỉ lệ nghịch là a .

Bài 3.

a) Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số nên ta có : $x = \frac{a}{y}$.

Vì y và z tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số b nên ta có : $y = \frac{b}{z}$.

Do đó : $x = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot z$. Suy ra : Đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng z theo hệ số tỉ

lệ thuận $k = \frac{a}{b}$.

b) Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số c nên ta có : .

Vì y và z tỉ lệ thuận với nhau theo hệ số d nên ta có : $y = dz$.

Do đó : $x = \frac{c}{dz}$. Suy ra : Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ

nghịch $a = \frac{c}{d}$.

Bài 4.

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có công thức : $y = \frac{a}{x}$.

Theo điều kiện, khi $x = 6$ thì $y = 15$ nên thay vào công thức ta tính được a :

$$15 = \frac{a}{6} \Rightarrow a = 15 \cdot 6 = 90.$$

b) Ta có : $y = \frac{a}{x}$ nên $a = 90$ thì $y = \frac{90}{x}$.

c) Tính giá trị của y khi $x = 3$ và $x = -45$.

Ta có : $y = \frac{90}{x}$.

- Với $x = 3 \Rightarrow y = \frac{90}{3} = 30$.

- Với $x = -45 \Rightarrow y = \frac{90}{-45} = -2$.

Bài 5. Khi bổ sung 6 người nữa thì đội sẽ có $24 + 6 = 30$ (người).

Gọi thời gian để 30 (người) trồng xong số cây theo dự định là x (ngày).

Vì số cây không đổi nên số người và số ngày trồng cây là tỉ lệ nghịch với nhau.

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch ta có : $\frac{24}{30} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{24 \cdot 5}{30} = 4$.

Vậy thời gian để 30 (người) trồng xong số cây theo dự định là 4 (ngày).

Do đó sẽ trồng xong số cây sớm $5 - 4 = 1$ (ngày).

Bài 6.

a) Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có công thức : $y = \frac{a}{x}$ (với $a \neq 0$).

Nếu $x = \frac{c}{y}$ thì : $y_4 = \frac{a}{x_4} \Rightarrow a = x_4 \cdot y_4$ thay số $a = 2 \cdot 3 = 6$.

Vậy hệ số tỉ lệ nghịch của y đối với x là : $a = 6$.

b) Công thức biểu diễn của đại y theo đại lượng x là : $y = \frac{6}{x}$.

Do đó : $y_1 = 6 : (-1) = -6$, $y_2 = 6 : (-2) = -3$, $y_3 = 6 : 1 = 6$ và $y_5 = 6 : 4 = \frac{3}{2}$.

c) Các tích đó đều bằng 6 (hệ số tỉ lệ).

Bài 7.

Ta có : x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có công thức : $y = \frac{a}{x} \Rightarrow a = xy$.

Thay số : $a = 8 \cdot 1,5 = 12$.

Từ đó, điền được các số thích hợp vào các ô trống như sau :

| | | | | | | |
|-----|----|------|---|-----|-----|-----|
| x | -3 | -1,2 | 3 | -12 | 8 | 2,5 |
| y | -4 | -10 | 4 | -1 | 1,5 | 4,8 |

Bài 8.

Ta có : Kích thước x và y của hình chữ nhật là hai đại lượng tỉ lệ nghịch vì $xy = 160$ không đổi.

Nên : $y = \frac{160}{x}$.

Từ đó, lập được bảng các giá trị của y tương ứng với các giá trị của x là :

| | | | | | |
|-----|----|----|----|----|-----|
| x | 8 | 10 | 16 | 20 | 25 |
| y | 20 | 16 | 10 | 8 | 6,4 |

Bài 9. Ta có : $3 \cdot 50 = 150 \neq 40 \cdot 4 = 160$. Vậy x và y không phải là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Bài 10. Ta có : $10.10 = 20.5 = 25.4 = 30.\frac{10}{3} = 40.2,5 = 100$. Vậy x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Bài 11. Gọi số máy của ba đội lần lượt là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$). Đơn vị (máy).

Vì ba đội có tất cả 26 máy nên ta có : $x + y + z = 26$.

Vì ba đội máy sản xuất làm ba khối lượng công việc như nhau mà các máy có cùng năng suất nên số máy tỉ lệ nghịch với số ngày hoàn thành công việc, do đó : $4x = 6y = 8z$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$4x = 6y = 8z = \frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = \frac{26}{\frac{13}{24}} = 48.$$

Suy ra : $x = 48 : 4 = 12, y = 48 : 6 = 8, z = 48 : 8 = 6$.

Vậy số máy của ba đội lần lượt là : 12 (máy), 8 (máy) và 6 (máy).

Bài 12. Gọi thời gian xe đi hết mỗi chặng lần lượt là t_1, t_2, t_3 giờ ($t_1 > 0, t_2 > 0, t_3 > 0$).

Đơn vị (giờ).

Vì tổng thời gian xe chạy từ A đến B hết 4 giờ nên ta có : $t_1 + t_2 + t_3 = 4$.

Vì xe chạy trên ba chặng đường có chiều dài là như nhau nên vận tốc và thời gian đi trên mỗi chặng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, do đó : $72t_1 = 60t_2 = 40t_3$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$72t_1 = 60t_2 = 40t_3 = \frac{t_1}{\frac{1}{72}} = \frac{t_2}{\frac{1}{60}} = \frac{t_3}{\frac{1}{40}} = \frac{t_1+t_2+t_3}{\frac{1}{72} + \frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = \frac{4}{\frac{1}{18}} = 72.$$

Suy ra : $t_1 = 72 : 72 = 1, t_2 = 72 : 60 = 1,2$ và $t_3 = 72 : 40 = 1,8$.

Chiều dài của đoạn đường AB là tổng chiều dài của ba chặng :

$$72t_1 + 60t_2 + 40t_3 = 72.1 + 60.1,2 + 40.1,8 = 216.$$

Vậy chiều dài của đoạn đường AB là : 216 (km).

Bài 13. Đổi 30 (phút) = 0,5 (giờ).

Gọi thời gian để đi hết quãng đường AB của hai xe ô tô lần lượt là t_1 và t_2 giờ ($t_1 > 0, t_2 > 0$). Đơn vị (giờ).

Vì thời gian đi của xe thứ nhất ít hơn xe thứ hai là 30 phút (0,5 (giờ) nên ta có $t_2 - t_1 = 0,5$.

Vì hai xe ô tô cùng chạy trên một quãng đường AB nên vận tốc và thời gian đi là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, do đó : $60t_1 = 40t_2$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$60t_1 = 40t_2 = \frac{t_1}{\frac{1}{60}} = \frac{t_2}{\frac{1}{40}} = \frac{t_2 - t_1}{\frac{1}{40} - \frac{1}{60}} = \frac{0,5}{\frac{1}{120}} = 60.$$

Suy ra : $t_1 = 60 : 60 = 1$ và $t_2 = 60 : 40 = 1,5$.

Chiều dài của quãng đường AB là : $60.1 = 40.1,5 = 60$.

Vậy quãng đường AB có chiều dài là : 60 (km).

Bài 14. Gọi số lượng xe ô tô mỗi loại 40 tấn, 25 tấn và 5 tấn lần lượt là x, y, z chiếc ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$). Đơn vị (xe).

Vì tổng số xe ô tô của cả ba loại là 114 chiếc nên ta có : $x + y + z = 114$.

Vì $\frac{2}{3}$ số xe loại 40 tấn bằng $\frac{2}{5}$ số xe loại 25 tấn và bằng $\frac{3}{7}$ số xe loại 5 tấn nên

ta có : $\frac{2}{3}x = \frac{2}{5}y = \frac{3}{7}z$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{2}{3}x = \frac{2}{5}y = \frac{3}{7}z = \frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{5}{2}} = \frac{z}{\frac{7}{3}} = \frac{x+y+z}{\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{3}} = \frac{114}{\frac{19}{3}} = 18.$$

Suy ra : $x = 18. \frac{3}{2} = 27$, $y = 18. \frac{5}{2} = 45$ và $z = 18. \frac{7}{3} = 42$.

Vậy số lượng xe ô tô mỗi loại 40 tấn, 25 tấn và 5 tấn lần lượt là : 27 (xe), 45 (xe) và 42 (xe).

Bài 15. Đổi 7 giờ 30 phút = $\frac{15}{2}$ giờ.

Gọi số sản phẩm mà mỗi công nhân sản xuất trong một giờ của công nhân thứ nhất, hai, ba lần lượt là x, y, z sản phẩm $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. Đơn vị (sản phẩm).

Vì trong 1 giờ, công nhân thứ hai sản xuất nhiều hơn công nhân thứ ba là 3 sản phẩm nên ta có :

$$y - z = 3.$$

Vì ba công nhân phải sản xuất số phẩm là như nhau nên năng suất lao động và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, do đó : $9x = 6y = \frac{15}{2}z$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$9x = 6y = \frac{15}{2}z = \frac{x}{\frac{9}{9}} = \frac{y}{\frac{6}{6}} = \frac{z}{\frac{2}{15}} = \frac{y-z}{\frac{6}{6} - \frac{2}{15}} = \frac{3}{\frac{1}{30}} = 90.$$

$$\text{Suy ra : } x = 90 : 9 = 10, \quad y = 90 : 6 = 15 \quad \text{và} \quad z = 90 : \frac{15}{2} = 12.$$

Vậy số sản phẩm mà mỗi công nhân sản xuất trong một giờ của công nhân thứ nhất, hai, ba lần lượt là 10 (sản phẩm), 15 (sản phẩm), 12 (sản phẩm).

Bài 16.

a) Ta có : $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có : $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1} = \frac{5x_2}{5y_1} = \frac{x_1 - 5x_2}{y_2 - 5y_1}$.

Thay số : $\frac{x_1}{-12} = \frac{x_2}{8} = \frac{-39}{-12 - 5 \cdot 8} = \frac{-39}{-52} = \frac{3}{4}$. Tìm được : $x_1 = -9$ và $x_2 = 6$.

b) Hệ số tỉ lệ của y đối với x là : $a = x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = -72$. Biểu diễn của y theo x là :

$$y = -\frac{72}{x}.$$

Bài 17. Gọi số máy của đội 1, đội 2, đội 3 lần lượt là : x, y và z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$). Đơn vị (máy).

- Theo điều kiện đề bài, ta có : $4x = 6y = 8z$ và $x - y = 2$.

- Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} = \frac{x-z}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{12}} = 24.$$

Tìm được : $x = 6$ (máy), $y = 4$ (máy) và $z = 3$ (máy).

Bài 18. Gọi số sản phẩm tổ A, B, C làm được lần lượt là : x, y và z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Đơn vị (sản phẩm).

- Vì trong cùng một thời gian làm việc thì số sản phẩm làm được tỉ lệ nghịch với thời gian để hoàn thành một sản phẩm nên ta có : $2x = 3y = 4z$.

- Vì tổng số sản phẩm tổ A và C làm được nhiều hơn số sản phẩm của tổ B làm được 30 sản phẩm nên ta có :

$$x + z - y = 30.$$

- Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{x+z-y}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}} = \frac{30}{\frac{5}{12}} = 72.$$

Tìm được : $x = 36$ (sản phẩm), $y = 24$ (sản phẩm) và $z = 18$ (sản phẩm).

Bài 19.

Gọi số dụng cụ của công nhân thứ nhất, thứ hai, thứ ba tiện được lần lượt là : x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$). Đơn vị là (dụng cụ).

Vì tổng số dụng cụ phải tiện là 860 nên ta có : $x + y + z = 860$.

Vì số dụng cụ tiện được tỉ lệ nghịch với thời gian để tiện xong một dụng cụ, do đó : $5x = 6y = 9z$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$5x = 6y = 9z = \frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{9}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}} = \frac{860}{\frac{43}{90}} = 1800.$$

Từ đó tìm được : $x = 360, y = 300$ và $z = 200$.

Vậy số dụng cụ tiện được của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là : 360 (dụng cụ), 300 (dụng cụ) và 200 (dụng cụ).

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

Bài 1. Thay tỉ số giữa các số sau bằng tỉ số giữa các số nguyên :

a) $1,2 : 3,36 = \frac{12}{10} : \frac{336}{100} = \frac{12}{10} \cdot \frac{100}{336} = \frac{5}{14} = 5 : 14$. Vậy: $1,2 : 3,36 = 5 : 14$.

b) $3\frac{1}{7} : 2\frac{5}{14} = \frac{22}{7} : \frac{33}{14} = \frac{22}{7} \cdot \frac{14}{33} = \frac{4}{3} = 4 : 3$. Vậy: $3\frac{1}{7} : 2\frac{5}{14} = 4 : 3$.

c) $\frac{3}{8} : 0,54 = \frac{3}{8} : \frac{54}{100} = \frac{3}{8} \cdot \frac{100}{54} = \frac{25}{36} = 25 : 36$. Vậy: $\frac{3}{8} : 0,54 = 25 : 36$.

a) $\frac{2}{7} : \frac{20}{28} = \frac{2}{7} : \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2}{5} = 2 : 5$. Vậy $\frac{2}{7} : \frac{20}{28} = 2 : 5$.

b) $2,4 : 3,2 = \frac{24}{10} : \frac{32}{10} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} = 3 : 4$. Vậy $2,4 : 3,2 = 3 : 4$.

c) $0,4 : \frac{6}{22} = \frac{4}{10} : \frac{3}{11} = \frac{2}{5} \cdot \frac{11}{3} = \frac{22}{15}$. Vậy $0,4 : \frac{6}{22} = 22 : 15$.

Bài 2.

a) Có $(-2) \cdot 15 = 3 \cdot (-10)$ thì $\frac{-2}{3} = \frac{-10}{15}$; $\frac{15}{3} = \frac{-10}{-2}$; $\frac{3}{15} = \frac{-2}{-10}$; $\frac{3}{-2} = \frac{15}{-10}$.

b) $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ suy ra $\frac{15}{5} = \frac{9}{3}$; $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$; $\frac{3}{9} = \frac{5}{15}$.

Bài 3. Lập tất cả các tỉ lệ thức có được từ các số : 3; 9; 27; 81.

$$3 \cdot 81 = 9 \cdot 27 \text{ Suy ra: } \frac{3}{9} = \frac{27}{81}; \frac{81}{9} = \frac{27}{3}; \frac{9}{81} = \frac{3}{27}; \frac{3}{3} = \frac{81}{27}.$$

Bài 4.

a) $3\frac{4}{5} : \frac{8}{5} = 0,25 : x \Rightarrow \frac{19}{8} = \frac{0,25}{x} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 0,25}{19} = \frac{2}{19}$.

b) $\frac{2x+3}{24} = \frac{3x-1}{32} \Rightarrow \frac{2x+3}{3} = \frac{3x-1}{4} \Rightarrow 4(2x+3) = 3(3x-1) \Rightarrow x = 15$.

c) $\frac{13x-2}{2x+5} = \frac{76}{17} \Rightarrow 17(13x-2) = 76(2x+5) \Rightarrow x = 6$.

d) $\frac{x}{15} = \frac{60}{x} \Rightarrow x^2 = 15 \cdot 60 = 900 \Rightarrow x = \pm 30$.

$$e) \frac{2-x}{4} = \frac{3x-1}{-3} \Rightarrow -3(2-x) = 4(3x-1) \Rightarrow -6+3x = 12x-4$$

$$\Rightarrow 3x - 12x = -4 + 6 \Rightarrow -9x = 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{9}.$$

$$f) \frac{12-3x}{32} = \frac{6}{4-x} \Rightarrow \frac{3(4-x)}{32} = \frac{6}{4-x} \Rightarrow 3(4-x)^2 = 6 \cdot 32 = 192$$

$$\Rightarrow (4-x)^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} 4-x=8 \\ 4-x=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x=4 \\ -x=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=12 \end{cases}.$$

Bài 5.

$$a) \frac{x}{y} = \frac{6}{5} \text{ và } x+y=121. \text{ Ta có: } \frac{x}{6} = \frac{y}{5} = \frac{x+y}{6+5} = \frac{121}{11} = 11 \Rightarrow x=66, y=55.$$

$$b) 4x=5y \text{ và } 2x-5y=40. \text{ Ta có: } \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{2x-5y}{2 \cdot 5 - 5 \cdot 4} = \frac{40}{-10} = -4 \Rightarrow x=-20, y=-16.$$

$$c) \frac{x}{3} = \frac{y}{16} \text{ và } xy=192. \text{ Đặt: } \frac{x}{3} = \frac{y}{16} = k \Rightarrow x=3k, y=16k. \text{ Do đó: } 3k \cdot 16k = 192$$

$$\Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2.$$

$$\text{Với } k=2 \Rightarrow x=6; y=32.$$

$$\text{Với } k=-2 \Rightarrow x=-6; y=-32.$$

$$d) \frac{x}{-3} = \frac{y}{7} \text{ và } x^2 - y^2 = -360.$$

$$\text{Đặt: } \frac{x}{-3} = \frac{y}{7} = k \Rightarrow x=-3k, y=7k. \text{ Do đó } 9k^2 - 49k^2 = -360 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3.$$

$$\text{Với } k=3 \Rightarrow x=-9; y=21.$$

$$\text{Với } k=-3 \Rightarrow x=9; y=-21.$$

$$e) \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \text{ và } x+y+z=52.$$

$$\text{Có } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{3+4+6} = \frac{52}{13} = 4 \Rightarrow x=12, y=16, z=24.$$

$$f) \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ và } x-2y+3z=46.$$

$$\text{Có } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4} = \frac{x-1-2(y+2)+3(z-3)}{2-2 \cdot 3+3 \cdot 4} = \frac{32}{8} = 4.$$

$$\Rightarrow x-1=8, y+2=12, z-3=16 \Rightarrow x=9, y=10, z=19.$$

g) $\frac{x}{y} = \frac{7}{10}; \frac{y}{z} = \frac{5}{8}$ và $2x - y + 3z = 104$.

Từ đề bài $\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{10}, \frac{y}{5} = \frac{z}{8} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{10} = \frac{z}{16} = \frac{2x - y + 3z}{2 \cdot 7 - 10 + 3 \cdot 16} = \frac{104}{52} = 2$

$\Rightarrow x = 14, y = 20, z = 32$.

i) $-3x = 2y; 4y = 5z$ và $x^2 - y^2 + z^2 = 76$.

Từ đề bài $\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{-3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{-15}; \frac{y}{-15} = \frac{z}{-12} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{-15} = \frac{z}{-12}$.

$\Rightarrow \frac{x^2}{100} = \frac{y^2}{225} = \frac{z^2}{144} = \frac{x^2 - y^2 + z^2}{100 - 225 + 144} = \frac{76}{19} = 4 \Rightarrow x^2 = 400, y^2 = 900, z^2 = 576$.

Vậy $x = -20, y = 30, z = 24$ hoặc $x = 20, y = -30, z = -24$.

Bài 6. Gọi số học sinh lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (em), ($x, y, z > 0$).

Theo đề bài ta có: $x + y + z = 105; \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $\frac{y}{6} = \frac{z}{11}$.

$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{11} = \frac{x + y + z}{4 + 6 + 11} = \frac{105}{21} = 5 \Rightarrow x = 20, y = 30, z = 55$.

Bài 7. Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích $300m^2$. Hai cạnh tỉ lệ với 4 và 3.

Tính chiều dài, chiều rộng của khu vườn.

Gọi chiều dài và chiều rộng của khu vườn là x, y (m), ($x, y > 0$).

Do diện tích bằng 300 nên $x \cdot y = 300$ (1)

Hai cạnh tỉ lệ với 4 và 3 nên $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$.

Đặt: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = k \Rightarrow x = 4k, y = 3k$, thay vào (1) $\Rightarrow 12k^2 = 300 \Rightarrow k^2 = 25 \Rightarrow k = 5$.

$\Rightarrow x = 20, y = 15$.

Bài 8. Số học sinh của các lớp 7A, 7B, 7C, 7D tỉ lệ với các số 11, 12, 13, 14. Biết hai lần số học sinh lớp 7B nhiều hơn số học sinh lớp 7A là 39 em. Tính số học sinh mỗi lớp.

Gọi số học sinh lớp 7A, 7B, 7C, 7D lần lượt là a, b, c, d (em), ($a, b, c, d > 0$).

Theo đề bài ta có: $\frac{a}{11} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13} = \frac{d}{14}$ và $2b - a = 39$.

Do đó: $\frac{a}{11} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13} = \frac{d}{14} = \frac{2b - a}{12 \cdot 2 - 11} = \frac{39}{13} = 3 \Rightarrow a = 33, b = 36, c = 39, d = 42$.

Bài 9. Gọi số bi của An và Chi lần lượt là x và y (viên), ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Do đó ta có mối liên hệ: $\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$ và $y - x = 4$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{y-x}{5-4} = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow x = 4.4 = 16; y = 4.5 = 20.$$

Vậy số bi của An là 16 viên, số bi của Chi là 20 viên.

Bài 10. Gọi số sản phẩm của công nhân thứ nhất và thứ hai lần lượt là x, y .

Do đó ta có mối liên hệ: $\frac{x}{8} = \frac{y}{5}$ và $x - y = 60$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{x-y}{8-5} = \frac{60}{3} = 20 \Rightarrow x = 8.20 = 160; y = 5.20 = 100.$$

Vậy công nhân thứ nhất làm được 160 sản phẩm, công nhân thứ hai làm được 100 sản phẩm.

Bài 11. Gọi ba cạnh của tam giác lần lượt là x, y, z (cm), ($x, y, z > 0$)

Do đó ta có mối liên hệ: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và chu vi là $x + y + z = 40,5$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x+y+z}{3+5+7} = \frac{40,5}{15} = 2,7 \Rightarrow x = 8,1, y = 13,5, z = 18,9.$$

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác là 8,1; 13,5; 18,9 cm.

Bài 12. Gọi bốn số cần tìm lần lượt là x, y, z, t ($x, y, z, t > 0$).

Do đó ta có mối liên hệ: $x + y + z + t = 48$ và $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{t}{9}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{t}{9} = \frac{x+y+z+t}{3+5+7+9} = \frac{48}{24} = 2 \Rightarrow x = 6; y = 10; z = 14; t = 18.$$

Bài 13. Gọi số học sinh lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (học sinh), ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Do đó ta có mối liên hệ: $x = \frac{7}{8}y, y = \frac{16}{15}z$ và $x + y + z = 135$.

Ta có: $\frac{x}{7} = \frac{y}{8} \Rightarrow \frac{x}{14} = \frac{y}{16}$; $\frac{y}{16} = \frac{z}{15}$. Do đó ta có tỉ lệ thức $\frac{x}{14} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{14} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{14+15+16} = \frac{135}{45} = 3 \Rightarrow x = 42; y = 48; z = 45.$$

Vậy số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 42, 48 và 45 học sinh.

Bài 14. Gọi ba số cần tìm theo thứ tự là x, y, z ($x, y, z > 0$)

Do đó ta có mối liên hệ: $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$; $\frac{y}{8} = \frac{z}{5}$ và $x + y + z = 237$.

Ta có: $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{y}{24}$; $\frac{y}{8} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{z}{15}$. Do đó ta có tỉ lệ thức: $\frac{x}{40} = \frac{y}{24} = \frac{z}{15}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{24} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{40+24+15} = \frac{237}{79} = 3 \Rightarrow x = 120; y = 72; z = 45.$$

Bài 15.

a) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk; c = dk$.

Ta có: $\frac{a+b}{b} = \frac{bk+b}{b} = \frac{b(k+1)}{b} = k+1$; $\frac{c+d}{d} = \frac{dk+d}{d} = \frac{d(k+1)}{d} = k+1$.

Do đó $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

b) Ta có: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{bk+b}{bk-b} = \frac{b(k+1)}{b(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}$; $\frac{c+d}{c-d} = \frac{dk+d}{dk-d} = \frac{d(k+1)}{d(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}$.

Vậy $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

c) Ta có : $\frac{5a+2b}{5a-2b} = \frac{5bk+2b}{5bk-2b} = \frac{b(5k+2)}{b(5k-2)} = \frac{5k+2}{5k-2}$;

$$\frac{5c+2d}{5c-2d} = \frac{5dk+2d}{5dk-2d} = \frac{d(5k+2)}{d(5k-2)} = \frac{5k+2}{5k-2}.$$

Vậy $\frac{5a+2b}{5a-2b} = \frac{5c+2d}{5c-2d}$.

$$d) \text{ Ta có: } \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{b^2 k^2 + d^2 k^2}{b^2 + d^2} = \frac{k^2(b^2 + d^2)}{b^2 + d^2} = k^2;$$

$$\frac{(a+c)^2}{(b+d)^2} = \frac{(bk+dk)^2}{(b+d)^2} = \frac{k^2(b+d)^2}{(b+d)^2} = k^2.$$

$$\text{Vậy } \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{(a+c)^2}{(b+d)^2}.$$

Bài 16. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa). Chứng minh :

$$a) \text{ Do } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc.$$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \Rightarrow ac + ad = ac + bc \Rightarrow ad = bc \text{ (đúng).}$$

$$b) \text{ Ta có: } \frac{a-b}{c-d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = t \Rightarrow a = bt \text{ và } c = dt$$

$$\text{Do đó: } \frac{a-b}{c-d} = \frac{bt-b}{dt-d} = \frac{b(t-1)}{d(t-1)} = \frac{b}{d}; \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{bt+b}{dt+d} = \frac{b(t+1)}{d(t+1)} = \frac{b}{d}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a-b}{c-d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

$$c) \frac{a-2b}{b} = \frac{c-2d}{d}$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk.$$

$$\text{Do đó: } \frac{a-2b}{b} = \frac{bk-2b}{b} = \frac{b(k-2)}{b} = k-2, \quad \frac{c-2d}{d} = \frac{dk-2d}{d} = \frac{d(k-2)}{d} = k-2.$$

$$\text{Vậy } \frac{a-2b}{b} = \frac{c-2d}{d}.$$

$$d) (a+4c)(2b-3d) = (b+4d)(2a-3c)$$

$$(a+4c)(2b-3d) = (bk+4dk)(2b-3d) = k(b+4d)(2b-3d).$$

$$(b+4d)(2a-3c) = (b+4d)(2bk-3dk) = k(b+4d)(2b-3d).$$

$$\text{Vậy } (a+4c)(2b-3d) = (b+4d)(2a-3c).$$

$$\text{e) } \frac{ac}{bd} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}.$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{bk \cdot dk}{b \cdot d} = k^2; \quad \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{b^2 k^2 - d^2 k^2}{b^2 - d^2} = \frac{k^2(b^2 - d^2)}{b^2 - d^2} = k^2.$$

$$\text{Vậy } \frac{ac}{bd} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}.$$

Bài 17. Chứng minh nếu $a+c=2b$ và $2bd=c(b+d)$ ($b \neq 0, d \neq 0$) thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Ta có $a+c=2b \Rightarrow d(a+c)=2bd$. Mà $2bd=c(b+d)$ nên

$$d(a+c) = c(b+d) \Rightarrow ad + cd = bc + cd \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Bài 18. Ta có $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a} \Rightarrow (a+b)(c-a) = (c+a)(a-b)$

$$\Rightarrow ac - a^2 + bc - ab = ac - bc + a^2 - ab \Rightarrow a^2 = bc.$$

CHƯƠNG VII.

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

VÀ ĐA THỨC MỘT BIẾN

BÀI 24. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

VD 1.1. Biểu thức đại số biểu thị

a) Nửa tổng của x và y là $\frac{1}{2}(x+y)$

b) Tổng của tích 2 và x nhân với tích 3 và y là $2x+3y$

VD 1.2. Biểu thức đại số biểu thị

a) Diện tích của hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng là a và b là $a.b$

b) Diện tích hình thang có hai đáy là a và b , chiều cao là h là $\frac{(a+b)h}{2}$

VD 1.3.

a) Biểu thức tích của ba số nguyên liên tiếp $n(n+1)(n+2)$.

b) Biểu thức lũy thừa bậc n của tổng hai số a và b $(a+b)^n$.

Dạng 2. Bài toán dẫn đến việc viết biểu thức đại số

Bước 1: Phân tích tìm ra ẩn số của bài toán

Bước 2: Viết biểu thức chứa các ẩn đó theo yêu cầu bài toán.

VD 2.1.

a) Số tiền thầy Trung phải trả cho x kg cam là $40x$ (nghìn đồng). Tiền mua 2 quả bưởi là $2.35=70$ nghìn đồng. Vậy biểu thức biểu thị tổng số tiền thầy Trung phải trả là: $40x+70$ (nghìn đồng).

b) Thay $x=3$ vào biểu thức $40x+70$, ta được: $40 \cdot 2+70=150$ (nghìn đồng)

Vậy thầy Trung phải trả tất cả 150 nghìn đồng.

VD 2.2. Có x quả bưởi có giá là $60.000x$

y cân cam có giá là $50.000y$

Biểu thức đại số cho số tiền ứng với x quả bưởi Năm roi và y cân cam là :

$$30.000x+20.000y.$$

VD 2.3.

a) Đến 9 giờ thì ô tô đi từ A đi được 2 giờ với vận tốc x km/h thì đi được quãng đường $2x$ km.

Xe máy đi từ B đi sau 30 phút (bằng $\frac{1}{2}$ giờ) thì đi được $\frac{3}{2}$ giờ với vận tốc y km/h thì đi được quãng đường y km.

Sau 9 sáng thì quãng đường hai xe đi được là $\left(2x + \frac{3}{2}y\right)$ km thì khoảng cách hai xe là $310 - \left(2x + \frac{3}{2}y\right)$ (km).

Vậy biểu thức cần tìm là $T = 310 - \left(2x + \frac{3}{2}y\right)$ (km)

b) Khi vận tốc ô tô là 80km/h và vận tốc xe máy là 60km/h thì $x = 80$ và $y = 60$.

Thay vào biểu thức ta được $T = 310 - \left(2.80 + \frac{3}{2}.60\right) = 60$ (km)

Khi đó xe máy phải đi thêm $60 : 60 = 1$ giờ thì mới gặp được xe ô tô.

Vậy hai xe gặp nhau lúc 10h cùng ngày.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau $P = 2x - 3y + 4z$ tại $x = 1; y = 2; z = 3$:

Giá trị của biểu thức đại số cần tìm $P = 2x - 3y + 4z = 2.1 - 3.2 + 4.3 = 8$

Bài 2. Biểu thức đại số biểu diễn cho số tiền cần trả là $5x + 4y$

Bài 3. Biểu thức đại số biểu diễn cho chu vi hình vuông có cạnh a cm là $4a$

Bài 4. Biểu thức đại số biểu diễn cho nửa chu vi một tam giác có độ lớn ba cạnh

lần lượt $a; b; c$ là $p = \frac{a+b+c}{2}$

Bài 5. Giá trị của các biểu thức đại số $P = 3x^2 - 9$ tại $x = -1$ và $x = -\frac{1}{2}$ là $-6; -\frac{33}{4}$

Bài 6. Giá trị của các biểu thức đại số $B = 2x^2 + y$ tại $x = 1$ và $y = 1$ là 3

Bài 7. Bạn An đi mua 4kg táo giá x đồng một kg, 5kg cam giá y đồng một kg, 6kg xoài giá z đồng một kg. Hỏi số tiền An phải trả là $4x + 5y + 6z$

Bài 8. Diện tích còn lại của khu vườn $a(a - 8) - b^2$.

Thay $a = 50m; b = 10m$ ta có : $50(50 - 8) - 10^2 = 2000(m^2)$.

Bài 9. Tính giá trị của các biểu thức đại số

a) Ta có $x + y + 1 = 0$ thì $x + y = -1$. Khi đó

$$\begin{aligned} M &= x^2(x+y) - y^2(x+y) + x^2 - y^2 + 2(x+y) + 3 = (x+y)(x^2 - y^2) + (x^2 - y^2) + 2(x+y) + 3 \\ &= (x^2 - y^2)(x+y+1) + 2(x+y) + 3 = 0 + 2 \cdot (-1) + 3 = 1. \end{aligned}$$

b) Ta có $x + y = 0$ thì $y = -x$

$$M = x^4 - x(-x)^3 + x^3(-x) - (-x)^4 - 1 = x^4 + x^4 - x^4 - x^4 - 1 = -1.$$

Bài 10. Quãng đường người đó từ nhà đến nơi làm việc là $S = \frac{15}{60}x + \frac{24}{60}y$ (km).

$$\text{Thay } x = 30 \text{ km/h và } y = 50 \text{ km/h ta có } S = \frac{15}{60} \cdot 30 + \frac{24}{60} \cdot 50 = 27,5 \text{ km}$$

Bài 11. Quãng đường viên đá rơi được $h = 5t^2 = 5 \cdot 1,5^2 = 11,25$ (m).

Bài 12. Tuyến đường AB dài : $2v + 2(v - 3)$ (km) thay $v = 60$ (km/h).

$$\text{Ta có } 2 \cdot 60 + 2(60 - 3) = 234 \text{ (km).}$$

BÀI 25. ĐA THỨC MỘT BIẾN

VD 1.1.

| | Hệ số | Bậc |
|----------------------|----------------|-----|
| a) $2x^6$ | 2 | 3 |
| b) $\frac{-1}{5}x^2$ | $\frac{-1}{5}$ | 2 |
| c) -5 | -5 | 0 |
| d) $(-5)^2 x$ | 25 | 1 |

VD 1.2.

| | Hệ số | Bậc |
|-----------|-------|-----|
| a) $2y^6$ | 2 | 6 |
| b) $3y^2$ | 3 | 2 |
| c) 6 | 6 | 0 |
| d) 0 | 0 | 0 |

VD 2.1.

a) $5x^2 - 4x^2 = (5 - 4).x^2 = x^2$

b)

$6x^3 - 17x^3 = (6 - 17).x^3 = -11x^3$

c) $6x^2.(-7x^4) = 6.(-7).(x^2.x^4) = -42.x^6$

d) $6x^4.(-5) = (-5).6x^4 = -30.x^4.$

VD 2.2.

a) Ta có $3x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 2x^2 = \left(3 + \frac{1}{2} + 2\right).x^2 = \frac{11}{2}x^2.$

b) Ta có $3y + y - 5y = (3 + 1 - 5).y = -y.$

VD 2.3.

a) Ta có $-3x^2 - 0,5x^2 + 2,5x^2 = -x^2.$

b) Ta có $5x^3 - 3x^2 + x - x^3 - 4x^2 - x = 4x^3 - 7x^2$.

c) Ta có $\left(-\frac{2}{3}y^3\right) + 3y^2 - \frac{1}{2}y^3 - y^2 = -\frac{7}{6}y^3 + 2y^2$.

VD 3.1.

a) $A = 6x^3 - 4x^3 - 5x^2 - 5x + 4x - 6 = (6-4)x^3 - 5x^2 + (-5+4)x - 6 = 2x^3 - 5x^2 - x - 6$.

b) $B = 2x^5 - 3x^3 + x^4 + 5x^5 - x^4 - 7x + 7 - 2x^2 = 2x^5 + 5x^5 + x^4 - x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = 7x^5 - 3x^3 - 2x^2 - 7x + 7$.

c)

$C = 4x^2 - 5x^5 + x^4 - 3x^2 - x + 7 - x^2 = -5x^5 + x^4 + 4x^2 - 3x^2 - x^2 - x + 7 = -5x^5 + x^4 - x + 7$

d)

$D = 3x^3 - 5x^2 + 6x^3 + 5x + 8 - x^2 + x = 3x^3 + 6x^3 - 5x^2 - x^2 + 5x + x + 8 = 9x^3 - 6x^2 + 6x + 8$

VD 3.2.

a) $A = 3x - 4x^3 + x^2 = -4x^3 + x^2 + 3x$

b) $B = -2x^3 - 5x^2 + 2x^3 + 4x + x^3 - 5 = -2x^3 + 2x^3 + x^3 - 5x^2 + 4x - 5 = x^3 - 5x^2 + 4x - 5$

c)

$C = 7 + x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - x^5 + 6x^2 - 2x = x^5 - x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x - 2x + 7 = -\frac{1}{2}x^3 + 6x^2 - \frac{1}{2}x + 7$

d) $D = 6x^2 - 2x - x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^3 - x^4 = -x^4 - x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^3 + 6x^2 - 2x = x^3 + 6x^2 - 2x$.

VD 4.1.

a) $5x^2 - 2x + 1 - 3x^4 = -3x^4 + 5x^2 - 2x + 1$. Bậc của đa thức là 4, hệ số cao nhất là -3 và hệ số tự do là 1.

b) $-3x + 7 + 5x^2 - 4x^4 + \frac{1}{2}x^2 = -4x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 5x^2 - 3x + 7 = -4x^4 + \frac{11}{2}x^2 - 3x + 7$. Bậc của đa thức là 4, hệ số cao nhất là -4 và hệ số tự do là 7.

VD 5.1.

a) Thay $x = 1$ thì $A = 12 \cdot 1^2 = 12$

b) Thay $x = 2$ thì

$A = 12 \cdot 2^2 = 12 \cdot 4 = 48$

VD 5.2.

Thay $x = 1$ ta có $F(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 2$.

Thay $x = 2$ ta có $F(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$.

Thay $x = 3$ ta có $F(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$.

Thay $x = 4$ ta có $F(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$.

Đa thức $F(x) = x^2 - 5x + 6$ có 2 nghiệm là $x = 2; x = 3$.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= y^2 - 2y + \frac{1}{2}y^2 + 5y - y^2 = \left(y^2 + \frac{1}{2}y^2 - y^2\right) + (-2y + 5y) = \left(1 + \frac{1}{2} - 1\right)y^2 + (-2 + 5)y \\ &= \frac{1}{2}y^2 + 3y. \end{aligned}$$

$$\text{b) } A = 2x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 + 5x = \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^2\right) + (x + 5x) = \left(2 - \frac{1}{2}\right)x^2 + (1 + 5)x = \frac{3}{2}x^2 + 6x.$$

Bài 2.

a) Ta có $-3x^4 - x^3 + 2x^2 + 3 + 3x^4 = -x^3 + 2x^2 + 3$. Đa thức có bậc 3.

b) Đa thức $y^4 + 4y^2 - 3y - 3y^4 = -2y^4 + 4y^2 - 3y$ có bậc 4.

Bài 3.

$$\text{a) } M = 2x^3 - 3x^2 + 1 - x^3 + 5x^2 - 2 = (2x^3 - x^3) + (-3x^2 + 5x^2) + (1 - 2) = x^3 + 2x^2 - 1$$

b) Đa thức M có bậc là 3

c) Thay $x = 2$ vào đa thức M sau khi thu gọn ta có: $M = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 1 = 15$

Bài 4.

a) Có $\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot (8x^4) = -\frac{1}{2} \cdot 8x^2 \cdot x^4 = -4x^6$. Hệ số của đơn thức là -4 và bậc của đơn thức là 6.

b) Có $\frac{1}{2}x^4 - 5x^4 = \left(\frac{1}{2} - 5\right)x^4 = \frac{-9}{2}x^4$. Hệ số của đơn thức là $\frac{-9}{2}$ và bậc của đơn thức là 4.

c) Có $\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 5x^2 = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 5\right)x^2 = -2x^2$. Hệ số của đơn thức là -2 và bậc của đơn thức là 2.

Bài 5.

a) Có

$$A(x) = x^3 - 4x^2 - 7x^4 + \frac{1}{2}x + x^2 - x^3 + 9 = -7x^4 + x^3 - x^3 - 4x^2 + x^2 + \frac{1}{2}x + 9 = -7x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 9$$

Có

$$B(x) = x^5 - 3x^2 + 8x^4 - 2x^3 - x^5 + 2x + 1 = x^5 - x^5 + 8x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 8x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

b) Đa thức $A(x)$ có bậc là 4, hệ số cao nhất là -7 và hệ số tự do là 9 .

Đa thức $B(x)$ có bậc là 4, hệ số cao nhất là 8 và hệ số tự do là 1 .

Bài 6. Đa thức $F(x) = 4x^3 + 7x^2 + 3x + 3$

Bài 7.

a) Thay $x = 1$ vào đa thức $A(x)$ ta được $A(1) = 2 \cdot 1 - 6 = 2 - 6 = -4$.

Thay $x = 2$ vào đa thức $A(x)$ ta được $A(2) = 2 \cdot 2 - 6 = 4 - 6 = -2$.

Thay $x = 3$ vào đa thức $A(x)$ ta được $A(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 6 - 6 = 0$. Vậy $x = 3$ là nghiệm của đa thức $A(x) = 2x - 6$.

b) Thay $x = 1$ vào đa thức $B(x)$ ta được $B(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$. Vậy $x = 1$ là nghiệm của đa thức.

Thay $x = 2$ vào đa thức $B(x)$ ta được $B(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$. Vậy $x = 2$ là nghiệm của đa thức.

Thay $x = 3$ vào đa thức $B(x)$ ta được $B(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$. Vậy $x = 3$ không là nghiệm của đa thức.

Bài 8.

a) Đa thức $A(x) = x^2 + 1$ không có nghiệm vì tại giá trị bất kì của x , ta luôn có $x^2 \geq 0$ nên $A(x) = x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

b) Đa thức $B(x) = -2x^2 - 3$ không có nghiệm vì tại giá trị bất kì của x , ta luôn có $-2x^2 \leq 0$ nên $B(x) = -2x^2 - 3 \leq -3 < 0$.

Bài 9. Thời gian người thợ thứ nhất làm là x ngày thì số sản phẩm làm được $3x$. Thời gian người hai làm là $x+5$ ngày thì số sản phẩm làm được là $(x+5).5$. Vậy tổng số công việc hai người làm được là: $F(x) = 3x + 5x + 5 = 8x + 5$.

Bài 10.

$$\begin{aligned}5x^{n+2} + 3x^n + 2x^{n+2} + 4x^n + x^{n+2} + x^n &= 0 \\(5x^{n+2} + 2x^{n+2} + x^{n+2}) + (3x^n + 4x^n + x^n) &= 0 \\8x^{n+2} + 8x^n &= 0 \\8x^n(x^2 + 1) &= 0\end{aligned}$$

Do đó $x^n = 0$ hoặc $x^2 + 1 = 0$.

Mà $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$ nên $x^n = 0$ hay $x = 0$.

Vậy $x = 0$ là giá trị cần tìm.

BÀI 26. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

VD 1.1.

$$\begin{aligned}P(x) + Q(x) &= (x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2) + (x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \\&= x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\&= (x^4 + x^4) + (3x^3 + x^3) + (x^2 + 2x^2) + (2x + 2x) + (2 + 1) \\&= 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(x) - Q(x) &= (x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2) - (x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \\&= x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2 - x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 \\&= (x^4 - x^4) + (3x^3 - x^3) + (x^2 - 2x^2) + (2x - 2x) + (2 - 1) \\&= 0 + 2x^3 - x^2 + 0 + 1 \\&= 2x^3 - x^2 + 1.\end{aligned}$$

VD 1.2.

$$\begin{aligned}P(x) + Q(x) &= (x^4 + 5x^3 - x^2 - x + 1) + (x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2) \\&= x^4 + 5x^3 - x^2 - x + 1 + x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2 \\&= (x^4 + x^4) + (5x^3 + 2x^3) + (-x^2 - 2x^2) + (-x - 3x) + (1 + 2) \\&= 2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 4x + 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(x) - Q(x) &= (x^4 + 5x^3 - x^2 - x + 1) - (x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2) \\&= x^4 + 5x^3 - x^2 - x + 1 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x - 2 \\&= (x^4 - x^4) + (5x^3 - 2x^3) + (-x^2 + 2x^2) + (-x + 3x) + (1 - 2) \\&= 0 + 3x^3 + x^2 + 2x - 1 \\&= 3x^3 + x^2 + 2x - 1.\end{aligned}$$

VD 2.1:

a) Ta có $P + (x^2 - x) = x^2 - x + 3x^3 - 1$

$$\begin{aligned}P &= x^2 - x + 3x^3 - 1 - (x^2 - x) \\&= x^2 - x + 3x^3 - 1 - x^2 + x \\&= 3x^3 + (x^2 - x^2) + (x - x) - 1 \\&= 3x^3 - 1\end{aligned}$$

Vậy : $P = 3x^3 - 1$.

b) Ta có $Q - (5x^2 - x) = x + 2x^2 - 3x^3 + 5$.

$$\begin{aligned} Q &= x + 2x^2 - 3x^3 + 5 + (5x^2 - x) \\ &= -3x^3 + (2x^2 + 5x^2) + x - x + 5 \\ &= -3x^3 + 7x^2 + 5 \end{aligned}$$

Vậy: $Q = -3x^3 + 7x^2 + 5$

VD 2.2:

Có $A + B = 3x^4 - 7x^3 - 1$ thì $B = A - (3x^4 - 7x^3 - 1)$

$$B = x^4 - 5x^3 - 3x + 1 - (3x^4 - 7x^3 - 1)$$

$$B = (x^4 - 3x^4) + (-5x^3 + 7x^3) - 3x + 1 + 1$$

$$B = -2x^4 + 2x^3 - 3x + 2$$

Có $A - C = -x^3 + 1$ thì $C = A - (-x^3 + 1)$

$$C = x^4 - 5x^3 - 3x + 1 - (-x^3 + 1)$$

$$C = x^4 - 5x^3 - 3x + 1 + x^3 - 1$$

$$C = x^4 - 4x^3 - 3x$$

Vậy: $B = -2x^4 + 2x^3 - 3x + 2$; $C = x^4 - 4x^3 - 3x$

VD 3.1.

a) Đa thức biểu thị số tiền sách bán được loại sách Tự học là: $100x$ (nghìn đồng), sách Bộ Đề là: $150(x + 5)$ (nghìn đồng) và sách Trắc nghiệm là $80(x + 7)$ (nghìn đồng).

b) Tổng số tiền nhà sách bán được của ba đầu sách là:

$$T(x) = 100x + 150(x + 5) + 80(x + 7) = 100x + 150x + 750 + 80x + 560 = 330x + 1310$$

(nghìn đồng)

c) Khi $x = 25$ thay vào biểu thức ta được $T(25) = 330.25 + 1310 = 12860$ (nghìn đồng)

VD 3.2.

a) Đa thức biểu thị diện tích đất trồng cây là $A(x) = x.3x = 3x^2$ (m^2).

b) Chiều dài mảnh đất là $5 + x + 18 = 23 + x$ (m). Đa thức biểu thị diện tích mảnh đất là $B(x) = (23 + x).120$ (m^2).

c) Đa thức biểu thị diện tích phần đất còn lại là: $C(x) = (23 + x).120 - 3x^2$ (m^2).

d) Khi $x = 15$ thì diện tích đất trồng cây là: $A(15) = 3.15^2 = 675$. Diện tích phần đất còn lại là: $C(15) = (23 + 15).120 - 3.15^2 = 3885$ (m^2).

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

a)

$$A(x) = -2x^2 + 3x - x^4 + 5 + 3x^2 - 4x = -x^4 + (3x^2 - 2x^2) + (3x - 4x) + 5 = -x^4 + x^2 - x + 5.$$

$$B(x) = 3x - 5 + 4x^3 - 8x + 10 = 4x^3 + (3x - 8x) + (10 - 5) = 4x^3 - 5x + 5.$$

$$C(x) = -3x^2 + 5 - 8x + 2x^4 + x^3 - 4 = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 8x + (5 - 4) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 8x + 1.$$

b)

| Đa thức | Hệ số cao nhất | Hệ số của bậc | | | | | Hệ số tự do |
|---------|----------------|---------------|---|----|----|---|-------------|
| | | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
| $A(x)$ | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 5 | 5 |
| $B(x)$ | 4 | 0 | 4 | 0 | -5 | 5 | 5 |
| $C(x)$ | 2 | 2 | 1 | -3 | -8 | 1 | 1 |

Bài 2.

a) Sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến như sau:

$$F(x) = -x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 6x - 7;$$

$$G(x) = x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 5.$$

b) $F(x) + G(x) = 6x - 2;$

$$F(x) - G(x) = -2x^4 - 16x^3 + 10x^2 + 6x - 12;$$

c) Đặt $P(x) = F(x) + G(x) = 6x - 2$. Khi $|x| = 1 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$

+) $x = 1$ thì $P(x) = 4$.

+) $x = -1$ thì $P(x) = -8$.

Bài 3.

$$a) M(x) - N(x) = (-5 + 3x^2 - 4x^4 + x^3) - (3x^4 - 2x + 2x^3) = -5 + 3x^2 - 4x^4 + x^3 - 3x^4 + 2x - 2x^3$$

$$= -(4x^4 + 3x^4) + (x^3 - 2x^3) + 3x^2 + 2x - 5 = -7x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x - 5.$$

$$b) N(x) + P(x) = (3x^4 - 2x + 2x^3) + (-8 + 5x - 6x^3) = 3x^4 - 2x + 2x^3 - 8 + 5x - 6x^3$$

$$= 3x^4 + (2x^3 - 6x^3) + (5x - 2x) - 8 = 3x^4 - 4x^3 + 3x - 8.$$

$$c) P(x) - M(x) = (-8 + 5x - 6x^3) - (-5 + 3x^2 - 4x^4 + x^3) = -8 + 5x - 6x^3 + 5 - 3x^2 + 4x^4 - x^3$$

$$= 4x^4 - (6x^3 + x^3) - 3x^2 + 5x + (5 - 8) = 4x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x - 3.$$

$$d) N(x) - P(x) + M(x) = (3x^4 - 2x + 2x^3) - (-8 + 5x - 6x^3) + (-5 + 3x^2 - 4x^4 + x^3)$$

$$= 3x^4 - 2x + 2x^3 + 8 - 5x + 6x^3 - 5 + 3x^2 - 4x^4 + x^3 = (3x^4 - 4x^4) + (2x^3 + 6x^3) + 3x^2 - (5x + 2x) + (8 - 5)$$

$$= -x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 7x + 3.$$

Bài 4.

$$a) 5E(x) - 3F(x) = 5(x^2 - 4x + 5) - 3(2x^2 + 3x - 6) = 5x^2 - 20x + 25 - 6x^2 - 9x + 18$$

$$= (5x^2 - 6x^2) - (20x + 9x) + (25 + 18) = -x^2 - 29x + 43.$$

$$b) 2x.G(x) + x^2.E(x) = 2x(x^2 - 2) + x^2(x^2 - 4x + 5) = 2x^3 - 4x + x^4 - 4x^3 + 5x^2$$

$$= x^4 + (2x^3 - 4x^3) + 5x^2 - 4x = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x.$$

$$c) G(x).E(x) - F(x) = (x^2 - 2).(x^2 - 4x + 5) - (2x^2 + 3x - 6)$$

$$= x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x^2 + 8x - 10 - 2x^2 - 3x + 6$$

$$= x^4 - 4x^3 + x^2 + 5x - 4.$$

Bài 5.

a) Từ giả thiết $M(x) + N(x) = 2x^2 + 4$ và $M(x) - N(x) = 6x$. Suy ra

$$M(x) + N(x) + M(x) - N(x) = 2x^2 + 4 + 6x$$

$$2M(x) = 2x^2 + 4 + 6x$$

$$M(x) = \frac{2x^2 + 4 + 6x}{2} = x^2 + 3x + 2.$$

$$+) \text{ Từ } M(x) + N(x) = 2x^2 + 4$$

$$\text{Suy ra } N(x) = 2x^2 + 4 - M(x) = 2x^2 + 4 - (x^2 + 3x + 2) = 2x^2 + 4 - x^2 - 3x - 2 = x^2 - 3x + 1.$$

b) Từ giả thiết $M(x) + N(x) = 5x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 4$ và $M(x) - N(x) = 3x^4 + 7x^2 + 8x + 2$. Suy ra

$$M(x) + N(x) + M(x) - N(x) = (5x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 4) + (3x^4 + 7x^2 + 8x + 2)$$

$$\begin{aligned}
 2M(x) &= 5x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 4 + 3x^4 + 7x^2 + 8x + 2 \\
 &= (5x^4 + 3x^4) - 6x^3 + (7x^2 - 3x^2) + 8x - 4 + 2 \\
 &= 8x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8x - 2.
 \end{aligned}$$

$$M(x) = \frac{8x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8x - 2}{2}$$

$$M(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 1.$$

$$\text{Từ } M(x) - N(x) = 3x^4 + 7x^2 + 8x + 2 \Rightarrow N(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 1 - (3x^4 + 7x^2 + 8x + 2)$$

$$N(x)$$

$$= 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 1 - 3x^4 - 7x^2 - 8x - 2 = x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 4x - 3.$$

$$\text{Bài 6. Ta có: } 2f(x) = 6x^2 - 4x + 8 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 2x + 4$$

$$\text{Do } f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 5 \Rightarrow g(x) = f(x) - (x^2 - 2x + 5)$$

$$\Rightarrow g(x) = 3x^2 - 2x + 4 - (x^2 - 2x + 5) = 2x^2 - 1.$$

Bài 7.

$$\text{a) } P(x) = 5x^4 - 3x^2 + 9x^3 - 2x^4 + 4 + 5x = 3x^4 + 9x^3 - 3x^2 + 5x + 4;$$

$$Q(x) = -10x + 5 + 8x^3 + 3x^2 + x^3 = 9x^3 + 3x^2 - 10x + 5$$

$$\text{b) } P(x) + Q(x) = 3x^4 + 18x^3 - 5x + 9;$$

$$\text{c) } P(x) - Q(x) = 3x^4 - 6x^2 + 15x - 1.$$

Bài 8.

$$\text{a) } P(x) = x^5 + 7x^4 - 9x^3 - 2x^2 - \frac{1}{4}x; \quad Q(x) = -x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } P(x) + Q(x) = 12x^4 - 11x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4};$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

$$\text{c) } P(1) = -3\frac{1}{4}, \quad Q(0) = -\frac{1}{4}, .$$

Bài 9.

a)

$$A - B - C = (5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2) - (-8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2) - (x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2)$$

$$= 5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2 + 8xy^3 - xy^2 + 4x^2y^2 - x^3 - 4x^3y + 6xy^3 + 4xy^2 - 5x^2y^2$$

$$= x^3y - xy^2 - 7x^2y^2 + 14xy^3 - x^3$$

b)

$$\begin{aligned} B + A - C &= (-8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2) + (5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2) - (x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2) \\ &= -8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2 + 5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2 - x^3 - 4x^3y + 6xy^3 + 4xy^2 - 5x^2y^2 \\ &= -2xy^3 + xy^2 - 15x^2y^2 + x^3y - x^3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C - A - B &= (x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2) - (5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2) - (-8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2) \\ &= x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2 - 5x^3y + 4xy^2 + 6x^2y^2 + 8xy^3 - xy^2 + 4x^2y^2 \\ &= x^3 - x^3y + 2xy^3 - xy^2 + 15x^2y^2 \end{aligned}$$

Bài 10.

a) $M = -3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 7x + 9$; $N = 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x - 9$.

b) $C - A - B = -3x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x + 5$; $A - C + B = x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 7$.

Bài 27. PHÉP NHÂN ĐA THỨC MỘT BIẾN

VD 1.1.

$$\begin{aligned} \text{a) } (3x+1)(2x+7) - (x+1)(6x-7) &= [(3x+1).2x + (3x+1).7] - [(x+1).6x - (x+1).7] \\ &= (6x^2 + 2x + 21x + 7) - (6x^2 + 6x - 7x - 7) = 6x^2 + 2x + 21x + 7 - 6x^2 - 6x + 7x + 7 \\ &= (6x^2 - 6x^2) + (2x + 21x - 6x + 7x) + (7 + 7) = 24x + 14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (3x+1)(5x-1) - (4x-1)(3x+2) - 3(x^2+x+1) \\ &= [(3x+1).5x - (3x+1)] - [(4x-1).3x + (4x-1).2] - 3(x^2+x+1) \\ &= (15x^2 + 5x - 3x - 1) - (12x^2 - 3x + 8x - 2) - (3x^2 + 3x + 3) \\ &= 15x^2 + 5x - 3x - 1 - 12x^2 + 3x - 8x + 2 - 3x^2 - 3x - 3 \\ &= (15x^2 - 12x^2 - 3x^2) + (5x - 3x + 3x - 8x - 3x) + (-1 + 2 - 3) = -6x - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (x^2+x+1)(x-1) + (x^2-x+1)(x+1) \\ &= [x^2.(x-1) + x.(x-1) + (x-1)] + [x^2.(x+1) - x.(x+1) + (x+1)] \\ &= (x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1) + (x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1) = (x^3 - 1) + (x^3 + 1) = 2x^3. \end{aligned}$$

VD 1.2.

$$\text{a) } (x^3 + 2x^2 - 2x + 1)(x - 2)$$

Đặt phép tính nhân như sau:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\ \times \quad x - 2 \\ \hline \quad -2x^3 - 4x^2 + 4x - 2 \\ + \quad x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x \\ \hline x^4 \quad -6x^2 + 5x - 2 \end{array}$$

$$\text{Vậy: } (x^3 + 2x^2 - 2x + 1)(x - 2) = x^4 - 6x^2 + 5x - 2.$$

$$\text{b) } (2x + x^4 + 3)(5 - 2x + x^2)$$

Ta viết $2x + x^4 + 3$ thành $x^4 + 2x + 3$ và viết $5 - 2x + x^2$ thành $x^2 - 2x + 5$ rồi đặt tính nhân như sau:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^4 \\
 \times \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 + 2x + 3 \\
 x^2 - 2x + 5 \\
 \hline
 5x^4 + 10x + 15 \\
 + -2x^5 - 4x^2 - 6x \\
 \hline
 x^6 + 2x^3 + 3x^2 \\
 \hline
 x^6 - 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 15
 \end{array}
 \end{array}$$

Vậy: $(2x + x^4 + 3)(5 - 2x + x^2) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 15$.

VD 2.1.

a) Ta có $A = (x-1)(x^2 + x + 1) = x.(x^2 + x + 1) - 1.(x^2 + x + 1)$

$$= x.x^2 + x.x + x.1 - 1.x^2 - 1.x - 1.1$$

$$= x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 + x^2 - x^2 + x - x - 1 = x^3 - 1.$$

Thay $x = 10$ vào biểu thức M ta có: $A = 10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999$.

Vậy $A = 999$ khi $x = 10$.

b) Ta có $B = 2(x-1)(x+1) - (2x-1)(x+1) = (2x-2)(x+1) - (2x-1)(x+1)$

$$= 2x(x+1) - 2(x+1) - 2x(x+1) + 1.(x+1) = -2(x+1) + 1.(x+1) = -1(x+1) = -x - 1$$

Thay $x = 2$ vào biểu thức B ta có: $B = -2 - 1 = -3$.

Vậy $B = -3$ khi $x = 2$.

VD 2.2.

a) Vì $x = 100$. Ta thay $99 = x - 1$ vào biểu thức M

Ta có: $M = x^5 - (x-1).x^4 - (x-1).x^3 - (x-1).x^2 - (x-1).x - (x-1)$

$$= x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - x + 1 = 1.$$

Vậy $M = 1$ khi $x = 100$.

b) Vì $x = 100$. Ta thay $101 = x + 1$ vào biểu thức M

Ta có: $M = x^5 - (x+1).x^4 + (x+1).x^3 - (x+1).x^2 + (x+1).x - (x+1)$

$$= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 + x^2 + x - x - 1 = 1.$$

Vậy $N = 1$ khi $x = 100$.

VD 3.1. Có $P = (2x - 1)(x + 1) - (x + 1)(2x - 3) - 2x + 7$
 $= 2x \cdot (x + 1) - 1 \cdot (x + 1) - x \cdot (2x - 3) - 1 \cdot (2x - 3) - 2x + 7$
 $= 2x^2 + 2x - x - 1 - 2x^2 + 3x - 2x + 3 - 2x + 7 = (2x^2 - 2x^2) - (x - 3x + 2x) - 1 + 3 + 7 = 9. \Rightarrow$
đpcm.

VD 3.2.

a) Ta có $(3x + 7)(2x + 3) - (3x - 5)(2x + 11)$
 $= 3x \cdot (2x + 3) + 7(2x + 3) - 3x \cdot (2x + 11) + 5 \cdot (2x + 11)$
 $= 6x^2 + 9x + 14x + 21 - 6x^2 - 33x + 10x + 55$
 $= (6x^2 - 6x^2) + (14x + 9x - 33x + 10x) + 21 + 55 = 76.$

\Rightarrow đpcm.

b) Ta có $(3x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 3) - 4x(x^2 - 1) - 3x^2(x^2 + 2)$

$$= 3x^2 \cdot (x^2 + 2x + 3) - 2x \cdot (x^2 + 2x + 3) + 1 \cdot (x^2 + 2x + 3) - 4x \cdot x^2 - 4x \cdot (-1) - 3x^2 \cdot x^2 - 3x^2 \cdot 2$$

$$= 3x^2 \cdot x^2 + 3x^2 \cdot 2x + 3x^2 \cdot 3 - 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 2x - 2x \cdot 3 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 3 - 4x^3 + 4x - 3x^4 - 6x^2$$

$$= 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x^3 - 4x^2 - 6x + x^2 + 2x + 3 - 4x^3 + 4x - 3x^4 - 6x^2$$

$$= (3x^4 - 3x^4) + (6x^3 - 2x^3 - 4x^3) + (9x^2 - 4x^2 + x^2 - 6x^2) + (-6x + 2x + 4x) + 3$$

$$= 3 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

VD 4.1. Ta có $5(2x^2 - 1) - (5x - 4)(2x + 3) = 0$

$$10x^2 - 5 - 10x^2 - 15x + 8x + 12 = 0$$

$$(10x^2 - 10x^2) + (8x - 15x) + 12 - 5 = 0$$

$$-7x + 7 = 0$$

$$-7x = -7$$

$$x = 1$$

Vậy $x = 1$.

VD 4.2.

a) Ta có $(4x + 12)(3x - 2) - (3x - 3)(4x - 1) = -27$

$$4x.(3x-2) + 12.(3x-2) - 3x.(4x-1) + 3.(4x-1) = -27$$

$$4x.3x - 4x.2 + 12.3x + 12.(-2) - 3x.4x - 3x.(-1) + 3.4x + 3.(-1) = -27$$

$$12x^2 - 8x + 36x - 24 - 12x^2 + 3x + 12x - 3 = -27$$

$$(12x^2 - 12x^2) + (-8x + 36x + 3x + 12x) - (24 + 3) = -27$$

$$43x - 27 = 0$$

$$43x = 0$$

$$x = 0$$

Vậy $x = 0$

b) Ta có $(x+1)(x+2) - x(x+3) = 1$

$$x.(x+2) + 1.(x+2) - x.x - x.3 = 1$$

$$x.x + x.2 + 1.x + 1.2 - x^2 - 3x = 1$$

$$x^2 + 2x + x + 2 - x^2 - 3x = 1$$

$$x^2 - x^2 + 3x - 3x + 2 = 1$$

$$2 = 1$$

Vậy không có x thỏa mãn.

c) Ta có $(x-1)(x+2) - (x+1)(x-3) - 3x = 1$

$$x.(x+2) - 1.(x+2) - x.(x-3) - 1.(x-3) - 3x = 1$$

$$x.x + x.2 - 1.x - 1.2 - x.x - x.(-3) - 1.x - 1.(-3) - 3x = 1$$

$$x^2 + 2x - x - 2 - x^2 + 3x - x + 3 - 3x = 1$$

$$x^2 - x^2 + 2x - x + 3x - x - 3x - 2 + 3 = 1$$

$$1 = 1$$

Vậy đẳng thức thỏa mãn với mọi x .

VD 5.1.

Ta có: $(x+2)(x+3) + (x-1).(2x-3) = 3(x^2+3)$

$$x.(x+3) + 2.(x+3) + x.(2x-3) - 1.(2x-3) = 3x^2 + 9$$

$$x^2 + 3x + 2x + 6 + 2x^2 - 3x - 2x + 3 = 3x^2 + 9$$

$$(x^2 + 2x^2) + (3x + 2x - 3x - 2x) + 9 = 3x^2 + 9$$

$$3x^2 + 9 = 3x^2 + 9$$

$$VT = VP \Rightarrow \text{đpcm.}$$

VD 5.2.

$$a) (x+a).(x+b) = x^2 + (a+b)x + a.b$$

$$VT = x.(x+b) + a.(x+b) = x^2 + a.x + b.x + ab = x^2 + (a+b)x + ab = VP$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

$$b) (x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc;$$

$$\begin{aligned} VT &= [x.(x+b) + a.(x+b)].(x+c) \\ &= [x.x + xb + a.x + a.b](x+c) \\ &= [x^2 + (a+b)x + a.b](x+c) \\ &= x^3 + (a+b)x^2 + a.bx + x^2.c + (a+b).c.x + a.b.c \\ &= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc \\ &= VP \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

VD 5.3.

$$a) \text{Ta có } (x-1)(x+1) = x^2 + ax + b$$

$$x.(x+1) - 1.(x+1) = x^2 + ax + b$$

$$x^2 - 1 = x^2 + ax + b. \text{ Suy ra } a = 0; b = -1.$$

$$b) \text{Ta có } x^2(x-1) + (2x-1)(x-a) = bx^3 + cx^2 + dx + 1$$

$$x^3 - x^2 + 2x^2 - 2ax - x + a = bx^3 + cx^2 + dx + 1$$

$$x^3 + x^2 - (2a+1)x + a = bx^3 + cx^2 + dx + 1$$

Do đó $b = 1; c = 1; a = 1$ và $-2a - 1 = d$ Suy ra $b = 1; c = 1; a = 1$ và $d = -3$.

VD 6.1. Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $n, n+1, n+2$ ($n \in \mathbb{N}$).

Tích của hai số đầu là $n(n+1)$.

Tích của hai số sau là $(n+1)(n+2)$.

Vì tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 100.

$$\text{Ta có : } (n+1)(n+2) - n(n+1) = 100$$

$$n^2 + 2n + n + 2 - n^2 - n = 100$$

$$2n + 2 = 100$$

$$2n = 98$$

$$n = 49$$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow n = 49$ thỏa mãn

Vậy 3 số cần tìm là 49; 50 và 51.

VD 6.2. Gọi 3 số tự nhiên lẻ liên tiếp là $n-2$; n ; và $n+2$ với $n \in \mathbb{N}$ và n là số lẻ.

$$\text{Tích của hai số sau là : } n(n+2) = n^2 + 2n$$

$$\text{Tích của hai số đầu là: } n.(n-2) = n^2 - 2n$$

Ta có : Tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 52.

Vậy:

$$(n^2 + 2n) - (n^2 - 2n) = 52$$

$$4n = 52$$

$$n = 13$$

Kết hợp điều kiện có $n = 13$ (thỏa mãn)

Vậy 3 số cần tìm là: 11; 13 và 15.

Từ các ví dụ trên ta có bài toán tổng quát

Tổng quát bài toán : Với ba số tự nhiên cách đều nhau k đơn vị thì: Hiệu giữa tích hai số cuối và hai số đầu bằng $2k$ lần số giữa.

VD 6.3. Ba số tự nhiên chẵn cách nhau 2 đơn vị. Vậy số đứng giữa bằng $624 : 4 = 156$. Vậy 3 số cần tìm là : 154; 156 và 158.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

$$\text{a) } x^2.(2x^2 - 3x + 1) = x^2.2x^2 + x^2. - (3x) + x^2.1 = 2x^4 - 3x^3 + x^2.$$

$$\text{b) } (x+2)(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 2.3 = x^2 - x - 6.$$

$$\text{c) } 2x.(x^2 - 1) = 2x.x^2 - 2x.1 = 2x^3 - 2x.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (2x-3)(x+1) &= 2x \cdot (x+1) - 3 \cdot (x+1) = 2x \cdot x + 2x \cdot 1 - 3 \cdot x - 3 \cdot 1 = 2x^2 + 2x - 3x - 3 \\ &= 2x^2 - x - 3. \end{aligned}$$

Bài 2.

$$\text{a) } (x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6.$$

$$\text{b) } (2x-1)(6x^2+3x-3) = 12x^3 + 6x^2 - 6x - 6x^2 - 3x + 3 = 12x^3 - 9x + 3.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (5x^2 - 3x^3 + 4x - 1)(-2x^2 + 3) \\ = -10x^4 + 15x^2 + 6x^5 - 9x^3 - 8x^3 + 12x + 2x^2 - 3 = 6x^5 - 10x^4 - 17x^3 + 17x^2 + 12x - 3. \end{aligned}$$

$$\text{d) } (2x^2 - 3x - 5)(x^2 - 4) = 2x^4 - 8x^2 - 3x^3 + 12x - 5x^2 + 20 = 2x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 12x + 20.$$

Bài 3.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } (x-1)(x-2)(2x+1) &= [x \cdot (x-2) - 1 \cdot (x-2)](2x+1) = (x^2 - 2x - x + 2)(2x+1). \\ &= (x^2 - 3x + 2)(2x+1) = x^2 \cdot (2x+1) - 3x \cdot (2x+1) + 2 \cdot (2x+1) \\ &= x^2 \cdot 2x + x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2x - 3x \cdot 1 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 = 2x^3 + x^2 - 6x^2 - 3x + 4x + 2 = 2x^3 - 5x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } x(1-3x)(4-3x) - (x-4)(3x+5) &= (x - x \cdot 3x)(4-3x) - [x \cdot (3x+5) - 4(3x+5)] \\ &= (x - 3x^2)(4-3x) - (3x^2 + 5x - 12x - 20) = x \cdot (4-3x^2) - 3x^2(4-3x^2) - 3x^2 + 7x + 20 \\ &= 4x - 12x^2 - 3x^2 + 9x^3 - 3x^2 + 7x + 20 = 9x^3 - 18x^2 + 11x + 20. \end{aligned}$$

Bài 4.

$$\text{a) } -5x(5x-2) + (5x+1)(5x-1) - 10x = -25x^2 + 10x + 25x^2 - 1 - 10x = -1.$$

$$\text{b) } (x-8)(x-4) - x(x-12) - 32 = x^2 - 4x - 8x + 32 - x^2 + 12x - 32 = 0.$$

$$\text{c) } (2x+3)(3x-1) - 6x(x-2) - 19(x-1) = 6x^2 - 2x + 9x - 3 - 6x^2 + 12x - 19x + 19 = 16.$$

$$\text{d) } (x-1)(x+1)(x^2+1) - x^4 = (x^2-1)(x^2+1) - x^4 = x^4 - 1 - x^4 = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x(x^3 + x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x + 3) + 4(x^2 - x - 2) \\ = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x^2 + 2x + 6 + 4x^2 - 4x - 8 = -2. \end{aligned}$$

Bài 5.

$$\text{a) } (x+8)(x+6) - x^2 = 104$$

$$x^2 + 6x + 8x + 48 - x^2 = 104$$

$$14x = 56$$

$$x = 4$$

Vậy: $x = 4$.

$$b) (x+1)(x+2) - (x-3)(x+4) = 6$$

$$x^2 + 2x + x + 2 - x^2 - 4x + 3x + 12 = 6$$

$$2x = -8$$

$$x = -4$$

Vậy: $x = -4$.

$$c) 3(2x-1)(x+2) - 2(3x+2)(x-4) = -19$$

$$3(2x^2 + 3x - 2) - 2(3x^2 - 10x - 8) = -19$$

$$6x^2 + 9x - 6 - 6x^2 + 20x + 16 = -19$$

$$29x = -29$$

$$x = -1$$

Vậy: $x = -1$.

Bài 6.

a) Ta có $A = x(2x-3) - 2x(x+1) = 2x^2 - 3x - 2x^2 - 2x = -5x$ Vậy A chia hết cho 5.

b) Ta có: $B = n(3-2n) - (n-1)(1+4n) - 1 = 3n - 2n^2 - n(1+4n) + 1(1+4n) - 1$

$$= 3n - 2n^2 - n - 4n^2 + 1 + 4n - 1 = -6n^2 + 6n = -6n(n-1):6.$$

c) Ta có $C = n^2(n+1) + (n+1)(n+2) + (n+2)(n-3) + 4 = n.(n+1).(n+2)$

Ta có $n.(n+1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2. Do đó C chia hết cho 2.

Có $n.(n+1).(n+2)$ là ba số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 3. Do đó C chia hết cho 3.

Vậy C chia hết cho 6.

Bài 7. Ta có $(x+a)(x+5) = x^2 + 3x + b$

$$x^2 + 5x + ax + 5a = x^2 + 3x + b$$

$$x^2 + (5+a)x + 5a = x^2 + 3x + b$$

Do đó $5+a=3$; $5a=b$. Suy ra $a=-2$ và $b=-10$. Vậy $a=-2$ và $b=-10$.

Bài 8.

a) Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $n; n+1; n+2$; và $n+3$; với $n \in \mathbb{N}$

Tích hai số đầu là : $n^2 + n$

Tích hai số cuối là: $n^2 + 5n + 6$

Vậy: $(n^2 + 5n + 6) - (n^2 + n) = 38$

$$4n + 6 = 38$$

$$n = 8$$

Vậy 4 số cần tìm là: 8; 9; 10 và 11.

b) Đặt $a = 3k + 1$ và $b = 3h + 2$ với $h; k \in \mathbb{N}$

Vậy $a.b = (3k + 1).(3h + 2) = 9hk + 3h + 6k + 2 = 3(3hk + h + 2k) + 2$

Vậy $a.b$ chia cho 3 dư 2.

Bài 9.

a) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $n, n+1, n+2$ ($n \in \mathbb{N}$).

Tích của hai số đầu là $n(n+1)$.

Tích của hai số sau là $(n+1)(n+2)$.

Theo đầu bài, ta có:

$$(n+1)(n+2) - n(n+1) = 100$$

$$n^2 + 2n + n + 2 - n^2 - n = 100$$

$$2n + 2 = 100$$

$$2n = 98$$

$$n = 49$$

Vậy : Ba số cần tìm là : 49; 50; 51

b) 62, 64 và 66.

c) 15; 17 và 19.

Bài 10.

a) $A = b^3 + c^3 + ab^2 + ac^2 - abc$

$$= b^2(b+a) + c^2(c+a) - abc = -b^2.c - c^2.b - abc = -bc(b+c+a) = 0.$$

b) Thay $5 = x + 1$. Ta có: $B = x^5 - (x+1)x^4 + (x+1)x^3 - (x+1)x^2 + (x+1)x - 1$

$$= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 + x^2 + x - 1 = x - 1 = 4 - 1 = 3.$$

c) Thay $80 = x + 1$. Ta có:

$$C = x^7 - (x+1)x^6 + (x+1)x^5 - (x+1)x^4 + \dots + (x+1)x + 15 = x + 15 = 94.$$

d) Có $x = 2222$ nên $2223 = x + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } & x^4 - 2223x^3 + 2223x^2 - 2223x + 2223 \\ &= x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1) = 1. \end{aligned}$$

e) Có $x = 2022$ nên $x + 1 = 2023$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } E &= x^{14} - 2023x^{13} + 2023x^{12} - 2023x^{11} + \dots + 2023x^2 - 2023x + 2023 \\ &= x^{14} - (x+1)x^{13} + (x+1)x^{12} - (x+1)x^{11} + \dots + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1) = 1. \end{aligned}$$

Bài 28. PHÉP CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN

VD 1.1.

$$a) 3x^7 : 7x^3 = \frac{3}{7}x^{7-3} = \frac{3}{7}x^4$$

$$b) (-3x^2) : 3x^2 = \frac{-3}{3}x^{2-2} = -1x^0 = -1$$

$$c) (0,25x^3) : 5x = (0,25 : 5)x^{3-1} = 0,5x^2$$

$$d) 0 : 6x^4 = 0$$

VD 1.2.

a)

$$(-2x^6 + 10x^4 - 2x^3) : 0,2x^2 = -(2x^6 : 0,2x^2) + (10x^4 : 0,2x^2) - (2x^3 : 0,2x^2) = -10x^4 + 50x^2 - 4x$$

$$b) (-6x^5 + 7x^4 - 9x^3) : 3x^3 = (-6x^5 : 3x^3) + (7x^4 : 3x^3) + (-9x^3 : 3x^3) = -2x^2 + \frac{7}{3}x - 3$$

VD 1.3.

a) Để $8x^2$ chia hết cho $9x^n$ thì $n \leq 2$. Vậy $n \in \{0; 1; 2\}$.

b) Để $(6x^2 + 3x)$ chia hết cho x^n thì $n \leq 1$. Vậy $n \in \{0; 1\}$.

VD 2.1.

$$a) (x^2 - 5x + 4) : (x - 1)$$

$$b) (2x^3 - 5x^2 - 6x + 1) : (x + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 4 & x - 1 \\ - & \\ \hline x^2 - x & x - 4 \\ \hline -4x + 4 & \\ - & \\ \hline -4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - 6x + 1 & x + 1 \\ - & \\ \hline 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 - 7x + 1 \\ \hline -7x^2 - 6x + 1 & \\ - & \\ \hline -7x^2 - 7x & \\ \hline x + 1 & \\ - & \\ \hline x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{Vậy: } (x^2 - 5x + 4) : (x - 1) = x - 4$$

Vậy:

$$(2x^3 - 5x^2 - 6x + 1) : (x + 1) = 2x^2 - 7x + 1$$

$$c) (4x^2 - 81) : (2x - 9)$$

$$d) (8x^3 - 27) : (4x^2 + 6x + 9)$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 & -81 \\ - & 2x-9 \\ \hline 4x^2-18x & 2x+9 \\ \hline 18x-81 & \\ - & \\ \hline 18x-81 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Vậy: $(4x^2 - 81) : (2x - 9) = 2x + 9$

$(8x^3 - 27) : (4x^2 + 6x + 9) = 2x - 3.$

$$\begin{array}{r|l} 8x^3 & -27 \\ - & 4x^2+6x+9 \\ \hline 8x^3+12x^2+18x & 2x-3 \\ \hline -12x^2-18x-27 & \\ - & \\ \hline -12x^2-18x-27 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Vậy:

VD 2.2.

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = M.(x + 1)$

Thì $M = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (x + 1) = (x + 1)^3 : (x + 1) = (x + 1)^2$

Vậy: $M = (x + 1)^2$

b) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = M.(2x + 3)$

$M = (2x^3 + 5x^2 + 5x + 3) : (2x + 3) = x^2 + x + 1.$

Vậy: $M = x^2 + x + 1$

c) $x^3 - 5x^2 + x - 5 = (x - 5).M$

Thì $M = (x^3 - 5x^2 + x - 5) : (x - 5)$

$= (x^3 - 5x^2 + x - 5) : (x - 5) = (x^2(x - 5) + x - 5) : (x - 5)$

$= ((x - 5)(x^2 + 1)) : (x - 5) = x^2 + 1.$

Vậy: $M = x^2 + 1.$

d) $(x^2 - 4x - 3).M = 2x^4 - 13x^3 + 14x^2 + 15x$

Thì

$M = (2x^4 - 13x^3 + 14x^2 + 15x) : (x^2 - 4x - 3) = (x^2 - 4x - 3).(2x^2 - 5x) : (x^2 - 4x - 3) = 2x^2 - 5x$

.

Vậy: $M = 2x^2 - 5x$

$$e) (2x^6 - x^4 - 2x^2 + 1) = M.(2x^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Thì } M &= (2x^6 - x^4 - 2x^2 + 1) : (2x^2 - 1) = [(2x^6 - x^4) - (2x^2 - 1)] : (2x^2 - 1) \\ &= (2x^2 - 1).(x^3 - 1) : (2x^2 - 1) = x^3 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } M = x^3 - 1$$

$$f) (x^2 + x + 1).M = x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3$$

$$M = (x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3) : (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1).(x^2 - 2x - 3) : (x^2 + x + 1) = x^2 - 2x - 3$$

$$\text{Vậy: } M = x^2 - 2x - 3.$$

VD 3.1.

$$a) A = x^3 - 3x^2 + 6x - 1 \text{ và } B = x - 1.$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 6x - 1 & x - 1 \\ - & \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - 2x + 4 \\ \hline -2x^2 + 6x - 1 & \\ - & \\ \hline -2x^2 + 2x & \\ \hline 4x - 1 & \\ - & \\ \hline 4x - 4 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Đã thức dư là: 3.

$$b) A = 4x^4 - x^2 + 5x - 7 \text{ và } B = 2x - 3.$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - x^2 + 5x - 7 & 2x - 3 \\ - & \\ \hline 4x^4 - 6x^3 & 2x^3 - 3x^2 - 5x - 5 \\ \hline -6x^3 - x^2 + 5x - 7 & \\ - & \\ \hline -6x^3 + 9x^2 & \\ \hline -10x^2 + 5x - 7 & \\ - & \\ \hline -10x^2 + 15x & \\ \hline -10x - 7 & \\ - & \\ \hline -10x + 15 & \\ \hline -22 & \end{array}$$

Đã thức dư là: -22

c) $A = x^5 + 5x^4 - 3x^2 + x - 7$ và $B = x^2 - 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 + 5x^4 - 3x^2 + x - 7 & x^2 - 1 \\
 - x^5 & \quad \quad \quad \\
 \hline
 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 7 & \\
 - 5x^4 & \quad \quad \quad \\
 \hline
 x^3 + 2x^2 + x - 7 & \\
 - x^3 & \quad \quad \quad \\
 \hline
 2x^2 + 2x - 7 & \\
 - 2x^2 & \quad \quad \quad \\
 \hline
 2x - 5 &
 \end{array}$$

Đã thức dư là $2x - 5$.

d) $A = x^4 - 3x^2 + x + 6$ và $B = x^2 + x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 3x^2 + x + 6 & x^2 + x + 1 \\
 - x^4 + x^3 + x^2 & \\
 \hline
 x^3 - 4x^2 + x + 6 & \\
 - x^3 + x^2 + x & \\
 \hline
 -5x^2 + 6 & \\
 - -5x^2 - 5x - 5 & \\
 \hline
 5x + 11 &
 \end{array}$$

Đã thức dư là: $5x + 11$.

VD 3.2.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a & x^2 - x + 5 \\
 - x^4 - x^3 + 5x^2 & \\
 \hline
 x^2 - x + a & \\
 - x^2 - x + 5 & \\
 \hline
 a - 5 &
 \end{array}$$

Để A chia hết cho B thì phần dư bằng 0. Tức là: $a - 5 = 0$ hay $a = 5$.

Vậy: $a = 5$.

VD 3.3. Ta thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b \\
 - \quad x^4 - x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 -8x^3 + 23x^2 + ax + b \\
 - \quad -8x^3 + 8x^2 + 16x \\
 \hline
 15x^2 + (a-16)x + b \\
 - \quad 15x^2 - 15x - 30 \\
 \hline
 (a-1)x + (b+30)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 x^2 - x - 2 \\
 \hline
 x^2 - 8x + 15
 \end{array} \right.$$

Để A chia hết cho B thì phần dư bằng 0

Tức là: $(a-1)x + b + 30 \equiv 0$. Suy ra: $\begin{cases} a-1=0 \\ b+30=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a=1 \\ b=-30 \end{cases}$.

Vậy: $a=1; b=-30$.

VD 4.1. Ta có: $A = \frac{2x+7}{x+1} = \frac{2x+2+5}{x+1} = 2 + \frac{5}{x+1}$. Để $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5:(x+1)$

- $x+1=1 \Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow A=2+5=7$
- $x+1=-1 \Leftrightarrow x=-2 \Leftrightarrow A=2-5=-3$
- $x+1=5 \Leftrightarrow x=4 \Leftrightarrow A=2+1=3$
- $x+1=-5 \Leftrightarrow x=-6 \Leftrightarrow A=2-1=1$

Để $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-6; -2; 0; 4\}$.

Vậy: $x \in \{-6; -2; 0; 4\}$

VD 4.2. Ta có: $B = \frac{2x+7}{x-2} = \frac{2x-4+11}{x-2} = 2 + \frac{11}{x-2}$. Để $B \in \mathbb{Z} \Rightarrow 11:(x-2)$

- $x-2=1 \Leftrightarrow x=3 \Leftrightarrow B=2+11=13$
- $x-2=-1 \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow B=2-11=-9$
- $x+1=11 \Leftrightarrow x=10 \Leftrightarrow B=2+1=3$
- $x+1=-11 \Leftrightarrow x=-12 \Leftrightarrow B=2-1=1$

Để $B \in \mathbb{Z}$ thì $x \in \{-12; 1; 3; 10\}$.

Vậy: $x \in \{-12; 1; 3; 10\}$.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

a) $(2x^4 - 5x^2 + x^3 - 3 - 3x) : (x^2 - 3)$

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x - 3 \quad | \quad x^2 - 3 \\
 - \quad 2x^4 \quad - 6x^2 \quad \quad \quad | \quad 2x^2 + x + 1 \\
 \hline
 \quad \quad x^3 + x^2 - 3x - 3 \\
 - \quad \quad x^3 \quad \quad - 3x \\
 \hline
 \quad \quad \quad x^2 \quad - 3 \\
 - \quad \quad \quad x^2 \quad - 3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

b) $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1)$

$$\begin{array}{r}
 x^5 + x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad x^3 + 1 \\
 - \quad x^5 \quad \quad + x^2 \quad \quad \quad | \quad x^2 + 1 \\
 \hline
 \quad \quad x^3 \quad + 1 \\
 - \quad \quad x^3 \quad + 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

c) $(2x^3 + 5x^2 - 2x + 3) : (2x^2 - x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3 \quad | \quad 2x^2 - x + 1 \\
 - \quad 2x^3 - x^2 + x \quad \quad \quad | \quad 2x + 3 \\
 \hline
 \quad \quad 6x^2 - 3x + 3 \\
 - \quad \quad 6x^2 - 3x + 3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

d) $(8x - 8x^3 - 10x^2 + 3x^4 - 5) : (3x^2 - 2x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 8x - 5 \quad | \quad 3x^2 - 2x + 1 \\
 - \quad 3x^4 - 2x^3 + x^2 \quad \quad \quad | \quad x^2 - 2x - 5 \\
 \hline
 \quad \quad -6x^3 - 11x^2 + 8x - 5 \\
 - \quad \quad -6x^3 + 4x^2 - 2x \\
 \hline
 \quad \quad \quad -15x^2 + 10x - 5 \\
 - \quad \quad \quad -15x^2 + 10x - 5 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Bài 2.

a) Có $8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

$\Rightarrow (8x^3 + 1) : (4x^2 - 2x + 1) = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) : (4x^2 - 2x + 1) = 2x + 1$

b) Có $x^2 - 3x + xy - 3y = (x^2 + xy) - (3x + 3y) = x(x + y) - 3(x + y) = (x + y)(x - 3)$

$\Rightarrow (x^2 - 3x + xy - 3y) : (x + y) = (x + y)(x - 3) : (x + y) = x - 3$

c) Có $(a^3b^3 - 6a^2b^2c + 12abc^2 - 8c^3) = (ab - 2c)^3$

$\Rightarrow (a^3b^3 - 6a^2b^2c + 12abc^2 - 8c^3) : (2c - ab) = (ab - 2c)^3 : (2c - ab) = -(2c - ab)^3 : (2c - ab) = -(2c - c$

Bài 3. Ta có $(2x^2 - 2x + 1).M = 6x^4 - 4x^3 + x^2 + x$

$M = (6x^4 - 4x^3 + x^2 + x) : (2x^2 - 2x + 1)$

$M = (6x^4 - 4x^3 + x^2 + x) : (2x^2 - 2x + 1)$

$M = (3x^2 + x)(2x^2 - 2x + 1) : (2x^2 - 2x + 1)$

$M = (3x^2 + x)$

Vậy: $M = (3x^2 + x)$

Bài 4.

a) Ta thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 10x^2 - 5 + a & 3x + 1 \\ - 3x^3 + x^2 & x^2 + 3x - 1 \\ \hline 9x^2 + a - 5 & \\ - 9x^2 + 3x & \\ \hline -3x + a - 5 & \\ - -3x - 1 & \\ \hline a - 4 & \end{array}$$

Để $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ thì phần dư bằng 0, tức là: $a - 4 \equiv 0$ thì $a = 4$.

Vậy: $a = 4$.

b) Thực hiện phép chia đa thức $3x^3 + 2x^2 - 7x + a$ cho đa thức $3x - 1$, thu được đa thức dư: $a - 2$

Để phép chia trên là phép chia hết, đa thức dư là đa thức 0: $a - 2 = 0$ thì $a = 2$.

Vậy: $a = 2$.

Bài 5.

a) Ta thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 - x^2 + (2a-b)x + 3b + a \\ - x^4 + 3x^3 - x^2 \\ \hline (2a-b)x + 3b + a \end{array} \left| \begin{array}{l} x^2 + 3x - 1 \\ x^2 \end{array} \right.$$

Để A chia hết cho B thì phần dư bằng 0, tức là: $(2a-b)x + 3b + a \equiv 0$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 2a-b=0 \\ 3b+a=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}.$$

Vậy: $a=0; b=0$.

b) Thực hiện phép chia đa thức $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b$ cho đa thức $g(x) = x^2 - x - 2$, thu được đa thức dư: $(a-1)x + (b+30)$

Để phép chia trên là phép chia hết, đa thức dư là đa thức 0: $(a-1)x + b + 30 \equiv 0$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} a-1=0 \\ b+30=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=1 \\ b=-30 \end{cases}$$

Vậy: $a=1; b=-30$.

c) Cách 1. Phân tích $g(x) = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2)$

$$\text{Nếu } f(x) \text{ chia hết cho } g(x) \text{ thì } \begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+a+b=0 \\ 16+4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=4 \end{cases}$$

Thực hiện phép chia $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ cho $g(x) = x^2 - 3x + 2$ ta được $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

Cách 2. Giả sử đa thức thương là $q(x) = x^2 + cx + d$

$$\text{Ta có } x^4 + ax^2 + b = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + cx + d)$$

$$x^4 + ax^2 + b = x^4 + (c-3)x^3 + (d+2-3c)x^2 + (2c-3d)x + 2d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c-3=0 \\ d+2-3c=a \\ 2c-3d=0 \\ b=2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=3 \\ d=2 \\ a=-5 \\ b=4 \end{cases}$$

Vậy với $a=-5; b=4$ thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ và đa thức thương là $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

Bài 6.

a) Ta thực hiện phép chia

$$\begin{array}{r|l}
 k^3 + 2k^2 + 15 & k + 3 \\
 - k^3 + 3k^2 & k^2 - k + 3 \\
 \hline
 -k^2 + 15 & \\
 - k^2 - 3k & \\
 \hline
 3k + 15 & \\
 - 3k + 9 & \\
 \hline
 6 &
 \end{array}$$

Để $f(k) = k^3 + 2k^2 + 15$ chia hết cho $g(k) = k + 3$ thì $k + 3$ phải là các ước số dương của 6:

$$\begin{cases} k+3=1 \\ k+3=2 \\ k+3=3 \\ k+3=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-2 \\ k=-1 \\ k=0 \\ k=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k & x^2 - x - 2 \\
 - x^4 - x^3 - 2x^2 & x^2 - 8x + 15 \\
 \hline
 -8x^3 + 23x^2 + x + k & \\
 - -8x^3 + 8x^2 + 16x & \\
 \hline
 15x^2 - 15x + k & \\
 - 15x^2 - 15x - 30 & \\
 \hline
 k + 30 &
 \end{array}$$

Phép chia đa thức $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k$ cho đa thức $g(x) = x^2 - x - 2$, thu được đa thức dư: $k + 30$

Để phép chia trên là phép chia hết, đa thức dư là đa thức 0: $k + 30 \equiv 0$ thì $k = -30$

Bài 7. Thực hiện phép chia đa thức $4x^3 + 11x^2 + 5x + 5$ cho đa thức $x + 2$, thu được đa thức thương: $4x^2 + 3x - 1$, và đa thức dư: 7.

Viết lại: $\frac{4x^3 + 11x^2 + 5x + 5}{x+2} = 4x^2 + 3x - 1 + \frac{7}{x+2}$, phép chia trên là phép chia hết khi

$\frac{7}{x+2}$ phải là số nguyên. Vậy $x+2$ phải là các ước số nguyên của 7.

Tìm x để $x+2$ phải là các ước số nguyên của 7: $(x+2) = \{-1; -7; 1; 7\}$. Đáp số:

$$x = \{-9; -3; -1; 5\}$$

Bài 8. Thực hiện phép chia đa thức tử số $2x^2 + 4x + 15$ cho đa thức mẫu số $x^2 + 2x + 5$, thu được đa thức thương: 2, và đa thức dư: 5

$$\text{Viết lại: } A = \frac{2x^2 + 4x + 15}{x^2 + 2x + 5} = \frac{2x^2 + 4x + 10 + 5}{x^2 + 2x + 5} = 2 + \frac{5}{x^2 + 2x + 5} = 2 + \frac{5}{(x+1)^2 + 4}$$

Sử dụng đánh giá $(x+1)^2 \geq 0$, biến đổi tương đương để thu được biểu thức A:

$$(x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{5}{(x+1)^2 + 4} \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow A \leq 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$$

Vậy $\max A = \frac{13}{4}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bài 9. Ta thực hiện phép chia

| | |
|-----------------------|-----------|
| $x^3 - 2x^2 + 7x - 7$ | $x^2 + 3$ |
| $x^3 \quad + 3x$ | $x - 2$ |
| $-2x^2 + 4x - 7$ | |
| $-2x^2 \quad - 6$ | |
| $4x - 1$ | |

Để $x^3 - 2x^2 + 7x - 7$ chia hết cho $x^2 + 3$ thì $(4x - 1) : (x^2 + 3)$

Suy ra $(4x - 1) : (x^2 + 3)$ hay $16x^2 - 1 : (x^2 + 3)$

$$16(x^2 + 3) - 49 : (x^2 + 3)$$

$$49 : (x^2 + 3)$$

Suy ra: $(x^2 + 3) \in \{7; 49\}$ thì $x^2 \in \{4; 46\}$. Mà x là số nguyên thì $x^2 = 4$ hay $x = \pm 2$.

Vậy: $x = \pm 2$.

Bài 10. Do $P(x)$ chia cho các nhị thức $(x-1)$, $(x-2)$ và $(x-3)$ đều có dư là 6 nên $P(x)-6$ chia hết cho $x-1; x-2; x-3$. Vì $P(x)$ là đa thức bậc ba nên

$$P(x)-6 = m(x-1)(x-2)(x-3) \text{ với } m \text{ là hằng số.}$$

và $P(-1) = -18$ nên $-18-6 = m(x-1)(x-2)(x-3)$ với m là hằng số.

$$P(-1) = -18 \text{ nên } -18-6 = m(-2)(-3)(-4) \Leftrightarrow m = 1.$$

$$P(x)-6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

$$\text{Vậy } P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x.$$

Bài 11. Đặt $f(x) = (2x^3 + ax + b)$ ta có $\begin{cases} f(-1) = -6 \\ f(2) = 21 \end{cases}$ hay $\begin{cases} -2 - a + b = -6 \\ 16 + 2a + b = 21 \end{cases}$. Ta giải được

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy với $a = 3; b = -1$.

Bài 12. Theo yêu cầu bài toán thì $f(x) = 5x^2(x-1)(x+2) + ax + b$

Vì khi chia cho $x-1$ thì dư 4 nên khi $x = 1$ thì $f(x) = 4$ nên $a + b = 4$

Vì khi chia cho $x+2$ thì dư 1 nên khi $x = -2$ thì $f(x) = 1$ nên $-2a + b = 1$

Ta tìm được: $a = 1, b = 3$ Suy ra: $f(x) = 5x^2(x-1)(x+2) + x + 3$

$$\text{Vậy: } f(x) = 5x^2(x-1)(x+2) + x + 3$$

Bài 13. Vì bậc của đa thức chia là 2 nên gọi đa thức dư cần tìm là $ax + b$.

$$\text{Ta có: } x^{49} + x^{13} - x^8 = (x^2 - 1).Q(x) + ax + b \quad (*)$$

($Q(x)$ là đa thức thương của phép chia đa thức)

Thay $x = 1$ vào (*), ta có: $a + b = 1$

Thay $x = -1$ vào (*), ta có: $-a + b = -3$.

$$\text{Do vậy } a + b - a + b = 1 - 3 \Leftrightarrow 2b = -2 \Leftrightarrow b = -1$$

Ta có $a + (-1) = 1$ thì $a = 2$.

Vậy: $a = 2$.

ÔN TẬP CHƯƠNG VII

Bài 1.

a) Chu vi của hình chữ nhật có chiều dài là a , chiều rộng là b : $2(a + b)$

b) Chu vi hình vuông có cạnh là x : $4x$

c) Diện tích của hình tròn có bán kính là R là πR^2 .

Bài 2.

a) $a = \frac{S}{5}$

b) $s = 15t$

Bài 3.

a) $M = x^2 - 2x + 5x^2 + 3x - x^2 = (x^2 + 5x^2 - x^2) + (-2x + 3x) = 4x^2 + x$

b) $N = 2x^2 + x - x^2 + 5x = (2x^2 - x^2) + (x + 5x) = x^2 + 6x$

Bài 4.

a) $A = 3x^2 + 7x^3 - 3x^3 + 6x^3 - 3x^2 = (7x^3 - 3x^3 + 6x^3) + (3x^2 - 3x^2) = 10x^3$ có bậc là 3

b) $B = 3x^2 + x - 3x^2 - 5 = (3x^2 - 3x^2) + x - 5 = x - 5 \Rightarrow B$ có bậc là 1

Bài 5.

a) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 7x + 5$.

b) Bậc 4, Hệ số tự do là 5, Hệ số cao nhất là 1.

Bài 6.

a) $M = A + B = (x^3 - 2x^2 + 1) + (2x^2 - 1) = x^3$

b) Thay $x = \frac{1}{2}$ vào đa thức M ta được: $M = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Vậy tại $x = \frac{1}{2}$ giá trị của đa thức M là $\frac{1}{8}$

c) $M = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy với $x = 0$ thì $M = 0$

Bài 7. Tính $M(x) + N(x)$, $M(x) - N(x)$ và $N(x) - M(x)$ biết:

$$M(x) = 5 - 2x^3 + \frac{1}{4}x^2; N(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x^3 + 5 + x.$$

$$\begin{aligned}
 * M(x) + N(x) &= \left(5 - 2x^3 + \frac{1}{4}x^2\right) + \left(-\frac{3}{4}x^2 + x^3 + 5 + x\right) \\
 &= (-2x^3 + x^3) + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^2\right) + x + (5 + 5) = -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * M(x) - N(x) &= \left(5 - 2x^3 + \frac{1}{4}x^2\right) - \left(-\frac{3}{4}x^2 + x^3 + 5 + x\right) \\
 &= (-2x^3 - x^3) + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^2\right) - x + (5 - 5) = -3x^3 + x^2 - x
 \end{aligned}$$

$$* M(x) - N(x) = 3x^3 - x^2 + x.$$

Bài 8.

$$a) P(x) = +3x^4 - 2x^2 - 3x + \frac{1}{2} \text{ và } Q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$b) P(x) + Q(x) = 4x^4 + x^3 - 6x + \frac{1}{2} \text{ và } P(x) - Q(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2} \text{ đều có bậc } 4.$$

$$\text{Bài 9. } P(x) + Q(x) - R(x) = x^2 + 4x + 1 \text{ và } P(x) - Q(x) - R(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 5.$$

Bài 10.

$$a) f(x) - h(x) = g(x)$$

$$\text{thì } h(x) = f(x) - g(x) = (2x^4 + 5x^3 - x + 8) - (x^4 - x^2 + 3x + 9) = x^4 + 5x^3 - 4x - 1$$

$$b) k(x) - g(x) = f(x)$$

$$\text{thì } k(x) = f(x) + g(x) = (2x^4 + 5x^3 - x + 8) + (x^4 - x^2 + 3x + 9) = 3x^4 + 5x^3 + 2x + 17$$

Bài 11.

$$\begin{aligned}
 \text{Có } f(x) &= \frac{1}{2} \{ [f(x) + g(x)] + [f(x) - g(x)] \} = \frac{1}{2} [(2x^4 + 5x^2 - 3x) + (x^4 - x^2 + 2x)] \\
 &= \frac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Có } g(x) &= \frac{1}{2} \{ [f(x) + g(x)] - [f(x) - g(x)] \} = \frac{1}{2} [(2x^4 + 5x^2 - 3x) - (x^4 - x^2 + 2x)] \\
 &= \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}x.
 \end{aligned}$$

Bài 12.

$$a) \text{ Cho đa thức } P(x) = 2x^4 - 2x^3 - x + 1. \text{ Do } P(x) + Q(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x + 1 + 5x^2$$

Suy ra: $Q(x) = (2x^4 - 3x^3 + 3x + 1 + 5x^2) - P(x)$
 $= (2x^4 - 3x^3 + 3x + 1 + 5x^2) - (2x^4 - 2x^3 - x + 1) = -x^3 + 5x^2 + 4x.$

b) $M(x) + (6x^2 - 4x) = 7x^2 - 8x + x^3$. Suy ra:

$$M(x) = (7x^2 - 8x + x^3) - (6x^2 - 4x) = x^3 + x^2 - 4x.$$

Bài 13.

a) $(3x - 2) - (5x + 4) = (x - 3) - (x + 5)$

$$3x - 2 - 5x - 4 = x - 3 - x - 5$$

$$-2x - 6 = -8$$

$$x = 1$$

b) $(x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 2x + 1) = 3$

$$x^2 - 4x + 5 - x^2 + 2x - 1 = 3$$

$$-2x + 4 = 3$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

c) $\left(5x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) + (3x^2 + 5x - 5x^4 + 1) = 3$

$$\frac{13}{2}x + \frac{1}{2} = 3$$

$$x = \frac{5}{13}$$

Bài 14.

a) Đa thức bậc nhất $P(x) = ax + b$

Do $P(-1) = 5 \Rightarrow -a + b = 5$ và $P(-2) = 7 \Rightarrow -2a + b = 7$

$\Rightarrow a = -2; b = 3$ hay $P(x) = -2x + 5$.

b) Đa thức bậc hai $Q(x) = ax^2 + bx + c$

Do $Q(-1) = 6 \Rightarrow a - b + c = 6$ (1); $Q(2) = 3 \Rightarrow 4a + 2b + c = 3$ (2)

và tổng các hệ số của đa thức bằng 0 nên $a + b + c = 0$ (3)

Lấy (3) trừ (1), ta được $b = -3 \Rightarrow 4a + c = 9$ và $a + c = 3$ nên $a = 2; c = 1$.

Vậy $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Bài 15. Cho đa thức $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Do $Q(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi x là số nguyên nên $Q(0) = c$ là số nguyên.

$$Q(1) = a + b + c \text{ nguyên và } Q(-1) = a - b + c \text{ nguyên.}$$

Do đó, $a + b = Q(1) - Q(0)$ là số nguyên.

$$Q(1) + Q(-1) = 2a + 2c \text{ nguyên nên } 2a \text{ cũng là số nguyên.}$$

b) Do $Q(x)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên x , và a, b, c nguyên nên $Q(0) = c : 3$.

$$Q(1) + Q(-1) = 2a + 2c : 3 \text{ nên } a : 3. \text{ Mà } Q(1) = a + b + c : 3 \text{ nên } b : 3.$$

Vậy các hệ số a, b, c đều chia hết cho 3.

c) Biết $7a + b = 0$

$$\begin{aligned} f(10).f(-3) &= (100a + 10b + c)(9a - 3b + c) \\ &= [(98a + 14b) + 2a - 4b + c].[(7a + b) + 2a - 4b + c] = (2a - 4b + c)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Nên không thể là số âm không?

Bài 16. Gọi số tự nhiên có hai chữ số là: $\overline{ab} = 10a + b$.

a) Tổng của một số tự nhiên có hai chữ số với số gồm hai chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là: $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b) : 11$.

b) Hiệu của một số tự nhiên có hai chữ số với số gồm hai chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là: $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) : 9$.

Bài 17. Ta có: $3a + 5b = 8c \Leftrightarrow 3a - 3b = 8c - 8b \Leftrightarrow 3(a - b) = 8(c - b)$.

Do đó: $3(a - b) : 8$. Từ đó $(a - b) : 8$

Do $a \neq b$ nên $a - b \in \{-8; 8\}$

TH1: $a - b = 8$ thì $c - b = 3$ nên $a = 8; b = 0; c = 4$ hoặc $a = 9; b = 1; c = 4$.

TH2: $a - b = -8$ thì $c - b = -3$ nên $a = 1; b = 9; c = 6$;

Vậy các số cần tìm là: 803; 914; 196.

Bài 18. Cho $f(x) = (8x^2 + 5x - 14)^{50} \cdot (x + 1)$.

Sau khi bỏ dấu ngoặc thì tổng các hệ số của $f(x)$ là chính là giá trị của đa thức

$$f(x) \text{ tại } x = 1 \text{ nên tổng các hệ số là: } f(1) = (8 + 5 - 14)^{50} \cdot (1 + 1) = 2.$$

Bài 19. Cho $f(x) = x^8 - 101x^7 + 101x^6 - \dots + 101x^2 - 101x + 25$. $f(100)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^8 - 101x^7 + 101x^6 - \dots + 101x^2 - 101x + 25 \\ &= (x^8 - 100x^7) - (x^7 - 100x^6) + \dots + (x^2 - 100x) - (x - 100) - 75 \\ &= x^7(x - 100) - x^6(x - 100) + \dots + x(x - 100) - (x - 100) - 75 \\ &\Rightarrow f(100) = -75. \end{aligned}$$

Bài 20. Từ $\overline{abc} = \frac{\overline{bca} + \overline{cab}}{2}$, ta tìm được: $7a = 3b + 4c$.

$$\text{Từ đó: } 7(a - c) = 3(b - c) \Rightarrow (b - c):7$$

$$\text{Do } b \neq c \text{ nên } (b - c) \in \{7; -7\}$$

Giải tương tự Bài 10, ta được: 481; 592; 629; 518.

Bài 21. Ta có: $\overline{abcd}:\overline{ab.cd}$ (1)

$$\Rightarrow (100.\overline{ab} + \overline{cd}):\overline{ab.cd}$$
 (2)

$$\Rightarrow \overline{cd}:\overline{ab}$$

$$\text{Đặt } \overline{cd} = k.\overline{ab} \text{ với } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 9$$
 (3)

$$\text{Thay vào (2), ta có: } (100.\overline{ab} + k.\overline{ab}):k.\overline{ab} \Rightarrow (100 + k):k.\overline{ab}$$
 (4)

$$\Rightarrow 100:k$$
 (5)

$$\text{Từ (3) và (5) suy ra } k \in \{1; 2; 4; 5\}$$

Với $k = 1$, thay vào (4), ta có: $101:\overline{ab}$ (loại)

Với $k = 2$, thay vào (4), ta có: $102:2.\overline{ab} \Rightarrow 51:\overline{ab}$. Khi đó:

$$\overline{ab} = 17 \text{ và } \overline{cd} = 34, \text{ hoặc } \overline{ab} = 51 \text{ và } \overline{cd} = 102 \text{ (loại)}$$

Với $k = 4$, thay vào (4), ta có: $104:4.\overline{ab} \Rightarrow 26:\overline{ab}$. Khi đó:

$$\overline{ab} = 13 \text{ và } \overline{cd} = 52, \text{ hoặc } \overline{ab} = 26 \text{ và } \overline{cd} = 104 \text{ (loại)}$$

Với $k = 5$, thay vào (4), ta có: $105:5.\overline{ab} \Rightarrow 21:\overline{ab}$. Khi đó:

$$\overline{ab} = 21 \text{ và } \overline{cd} = 105 \text{ (loại)}$$

Vậy có hai số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: 1734 và 1352.

Bài 22.

a) Vì $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó:

- Với $x = 0$, ta có $f(0) = b = g(0) = d$. Vậy $b = d$.

- Với $x = 1$, ta có $f(1) = a + b = g(1) = c + d$ nhưng $b = d$, do đó $a = c$.

b) Nếu $f(x) \neq g(x)$, thì theo câu a, suy ra $a \neq c$ hoặc $b \neq d$. Nếu $a = c$ và $b \neq d$ thì hai đa thức trên không nhận giá trị bằng nhau nào tại mọi giá trị của biến x . Thật vậy, nếu tại $x = x_0$ mà $f(x_0) = ax_0 + b = g(x_0) = cx_0 + d$ thì từ $a = c$, suy ra $b = d$.

Bài 23.

a) Ta có $P(0) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 0 + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$; b) $a = -1$; c) $a = 5$.

Bài 24. Ta có $f(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ $f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a + b = -4$. Mà $b = 0$ nên $a = -1$

CHƯƠNG VIII.

LÀM QUEN VỚI BIẾN CỐ

VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

BÀI 29. LÀM QUEN VỚI BIẾN CỐ

VD 1.1.

- a) Tháng Ba năm tới có 32 ngày: Không thể
- b) Tại Hà Nội vào sáng ngày mai, trời sáng: Chắc chắn
- c) Các bạn học sinh trong lớp có máy tính cầm tay: Ngẫu nhiên
- d) Em sẽ có bài tập về nhà vào tối nay: Ngẫu nhiên
- e) Nước đóng đá ở nhiệt độ 10°C : Không thể
- f) Ở biển sẽ có nước: Chắc chắn

VD 1.2.

- a) Tung một đồng xu và được mặt úp: Ngẫu nhiên
- b) Tung một đồng xu và được mặt úp hoặc ngửa: Chắc chắn
- c) Tung một đồng xu và được mặt úp và ngửa: Không thể
- d) Tung một đồng xu và được mặt số 3: Không thể
- e) Tung hai đồng xu và được hai mặt ngửa: Ngẫu nhiên
- f) Tung hai đồng xu và được một mặt úp, một mặt ngửa: Ngẫu nhiên

VD 1.3.

- a) Tung một xúc xắc và được số chẵn: Ngẫu nhiên
- b) Tung một xúc xắc và được một trong các số từ 1 tới 6: Chắc chắn
- c) Tung một xúc xắc và được một số nguyên tố: Ngẫu nhiên
- d) Tung hai xúc xắc và được hai số có tổng là 13: Không thể

VD 1.4.

- a) An bốc 1 viên và được bi xanh: Ngẫu nhiên
- b) An bốc 1 viên và được bi hồng: Không thể
- c) An bốc 1 viên và được 2 bi đỏ: Không thể
- d) An bốc 2 viên và được 2 bi xanh: Không thể

VD 2.1.

- a) Xét các khả năng:

- Bình tung được số lẻ: Biến cố "Cường thắng" trở thành ngẫu nhiên vì Cường có thể thắng hoặc hòa ở ván này.
- Bình tung được số chẵn: Biến cố "Cường thắng" trở thành không thể vì ván đầu chỉ còn có thể hòa hoặc thua cho Cường.

b) Với trường hợp Bình tung được số lẻ, Cường cần tung được số 1, 3 hoặc 5 để có thể thắng.

c) Với trường hợp Bình tung được số chẵn, Cường không thể thắng. Nếu Cường tung được số lẻ, ván đấu hòa; nếu Cường tung được số chẵn, Cường thua.

VD 2.2. Dương được yêu cầu chọn 1 số trong tập hợp số sau: $\{1; 2; 3; 5; 7; a\}$ (với $a \in \mathbb{N}^*$).

Các giá trị của a để biến cố "Số được chọn nhỏ hơn 8" là:

a) biến cố chắc chắn: a có thể là 4 hoặc 6.

b) biến cố ngẫu nhiên: $a \geq 8$.

VD 2.3. Trong hộp có x bi đỏ và 5 bi vàng (với $x \in \mathbb{N}$). Giá trị của x để biến cố "Bốc được 3 viên bi cùng màu" trở thành:

a) biến cố chắc chắn là 0. Khi đó trong hộp chỉ có 5 bi vàng.

b) biến cố ngẫu nhiên là số tự nhiên lớn hơn 0.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

- Tháng Năm năm trước có đúng 28 ngày: Không thể
- Tại Hà Nội, tuyết sẽ rơi vào giữa tháng 6: Không thể
- Các bạn học sinh đều có điện thoại riêng để sử dụng: Ngẫu nhiên
- Tối nay em sẽ xem TV: Ngẫu nhiên
- Con chó biết nói tiếng Anh: Không thể
- Em bé mới sinh là con trai: Ngẫu nhiên

Bài 2.

A: "Tung một đồng xu và được mặt ngửa": Ngẫu nhiên

B: "Tung một đồng xu và được mặt úp hoặc ngửa": Chắc chắn

C: "Tung hai đồng xu và được mặt úp và ngửa": Không thể

D: "Tung một xúc xắc và được số lẻ": Ngẫu nhiên

E: "Tung một xúc xắc và được một hợp số": Ngẫu nhiên

F: "Tung hai xúc xắc và được hai số có tổng là 10": Ngẫu nhiên

Bài 3.

| Biến cố | Loại biến cố |
|---|--------------|
| Giang bốc được số chẵn | Ngẫu nhiên |
| Giang bốc được thẻ màu đỏ | Ngẫu nhiên |
| Giang bốc được số chẵn hoặc số lẻ | Chắc chắn |
| Giang bốc được số từ 3 tới 7 | Ngẫu nhiên |
| Giang bốc được thẻ màu đỏ ghi số nguyên tố | Ngẫu nhiên |
| Giang bốc được thẻ màu xanh có số nhỏ hơn 5 | Không thể |

Bài 4.

a) Được hai số chẵn: Ngẫu nhiên

b) Được hai số từ 1 tới 6: Chắc chắn

c) Được hai số có tổng là 7: Ngẫu nhiên

d) Được hai số nguyên tố: Ngẫu nhiên

e) Được hai số có hiệu giữa số lớn và số bé là 6: Ngẫu nhiên

f) Được hai số có tích là số lẻ: Ngẫu nhiên

Bài 5. Các giá trị của x, y để biến cố "Số được chọn lớn hơn 3 và nhỏ hơn 12" là:

a) biến cố chắc chắn: x, y có thể là 4; 10 hoặc 11.

b) biến cố ngẫu nhiên: x, y có thể là mọi số tự nhiên lớn hơn 0.

Bài 6. Vào ngày Tết nguyên đán, Vân chuẩn bị lì xì để mừng tuổi các em. Bạn ấy có năm phong bao lì xì với một tờ tiền mệnh giá khác nhau bên trong, gồm có: x nghìn đồng, 20 nghìn đồng, 50 nghìn đồng, 100 nghìn đồng, 200 nghìn đồng". Em hãy xác định giá trị của x để các biến cố có kết quả như sau:

- a) Biến cố "Người nhận lì xì được từ 10 nghìn đồng trở lên" là biến cố chắc chắn: x có thể là 10 hoặc 500.
- b) Biến cố "Người nhận lì xì được ít hơn 500 nghìn đồng" là biến cố ngẫu nhiên: x khác 500.
- c) Biến cố "Người nhận lì xì được nhiều nhất 200 nghìn đồng" là biến cố chắc chắn: x nhỏ hơn 200.

BÀI 30. LÀM QUEN VỚI XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

VD 1.1.

- a) Con người **không thể** sống 1000 năm.
- b) **Không thể** có tuyết rơi ở Hà Nội vào mùa hè.
- c) Ở học kì 1, Bình gần đủ điểm để đạt danh hiệu học sinh giỏi. Trong học kì 2, bạn ấy đã có rất nhiều điểm 9 và 10, **nhiều khả năng** bạn ấy sẽ đạt danh hiệu học sinh giỏi kì này.
- d) **Chắc chắn** tháng Hai năm 2024 có 29 ngày.

e) Bác Toàn than thở:

- Đúng là mùa hè. Hôm nay nắng nóng oi bức quá.

Bác Trung nghe vậy, liền nói:

- Công nhận. Nhìn trời như này thì hôm nay **ít khả năng** có mưa.

VD 1.2.

- a) Ngày 25 có khả năng (xác suất) nắng nóng nhất.
- b) Ngày 22 có khả năng (xác suất) chỉ xuất hiện mưa nhỏ.

VD 1.3. Đội tuyển Anh có khả năng vô địch cao nhất.

VD 2.1.

- a) Biến cố A: "Ngày mai, Mặt Trời lặn đằng Đông": 100%
- b) Biến cố B: "Tháng Năm này có 6 ngày thứ 2": 0%

VD 2.2.

- a) "Tổng số chấm hai mặt của xúc xắc bằng 1": 0%
- b) "Tổng số chấm hai mặt của xúc xắc nhỏ hơn 13": 0%
- c) "Hiệu số chấm giữa số lớn và số bé lớn hơn hoặc bằng 0": 100%
- d) "Hiệu số chấm giữa số lớn và số bé bằng 6": 0%
- e) "Tích số chấm hai mặt của xúc xắc bằng 0,5": 0%
- f) "Tích số chấm hai mặt của xúc xắc lớn hơn 36": 0%

VD 3.1. Tung một đồng xu và có hai biến cố sau:

A: "Tung được mặt ngửa".

B: "Tung được mặt úp".

Hỏi hai biến cố A và B có đồng khả năng.

VD 3.2. Với thí nghiệm "Tung hai đồng xu lần lượt", ta có:

a) Các khả năng là: Ngửa – Ngửa; Ngửa – Úp; Úp – Ngửa; Úp – Úp.

b) Ngửa – Ngửa và Úp – Úp là hai biến cố đồng khả năng.

VD 3.3.

a) Biến cố M: "Tung được mặt 1 chấm" và biến cố N: "Tung được mặt 2 chấm" là đồng khả năng vì có 6 biến cố về số chấm, đó là 1 chấm đến 6 chấm.

b) Biến cố P: "Tung được mặt có số chấm chẵn" và biến cố Q: "Tung được mặt có số chấm lẻ" là đồng khả năng vì có 2 biến cố về số chấm, đó là số chấm chẵn hoặc số chấm lẻ.

c) Biến cố G: "Tung được mặt có số chấm là nguyên tố" và biến cố H: "Tung được mặt có số chấm là hợp số" không đồng khả năng vì biến cố số nguyên tố có 3 khả năng là 2, 3 và 5, trong khi biến cố hợp số chỉ có 4 hoặc 6.

d) Biến cố R: "Tung được mặt có số chấm nhỏ hơn 3" và biến cố S: "Tung được mặt có số chấm lớn hơn 3" không đồng khả năng vì biến cố số chấm nhỏ hơn 3 có 2 khả năng là 1 và 2, trong khi biến cố số chấm lớn hơn 3 có 3 khả năng là 4, 5 hoặc 6.

VD 3.4. Lớp 7A1 có 15 bạn nam, 15 bạn nữ và lớp 7A2 có 16 bạn nam, 17 bạn nữ. Mỗi lớp được yêu cầu chọn một bạn làm lớp trưởng.

Xét hai biến cố sau:

A: "Lớp trưởng được chọn là một bạn nam".

B: "Lớp trưởng được chọn là một bạn nữ".

a) Lớp 7A1 có hai biến cố trên là đồng khả năng vì số lượng bạn nam và bạn nữ bằng nhau.

b) Trong lớp 7A2, khả năng xảy ra biến cố B cao hơn vì số bạn nữ nhiều hơn số bạn nam trong lớp.

VD 3.5. Trong hộp có chứa 2 viên bi đỏ, 2 viên bi xanh và Nam sẽ bốc 1 viên bi bên trong.

a) Hai biến cố "Nam bốc được viên bi màu đỏ" và "Nam bốc được viên bi màu xanh" có đồng khả năng.

b) Sau lần bốc đầu tiên, Nam bốc tiếp 1 viên bi nữa. Hỏi lúc này, hai biến cố trên không đồng khả năng vì số lượng bi mỗi màu đã khác nhau (hơn kém nhau 1 viên)

c) Quay lại với chiếc hộp ban đầu, bạn ấy muốn thêm bi màu vàng vào hộp rồi bốc. Nam cần thêm 2 viên bi màu vàng vào hộp để ba biến cố "Nam bốc được viên bi màu đỏ", "Nam bốc được viên bi màu xanh" và "Nam bốc được viên bi màu vàng" là đồng khả năng.

VD 4.1. Lớp 7A có 12 bạn nam và 12 bạn nữ. Cô gọi ngẫu nhiên một bạn lên bảng giải bài tập.

a) Hai biến cố "Bạn được cô gọi là bạn nam" và "Bạn được cô gọi là bạn nữ" là đồng khả năng với nhau.

b) Xác suất để mỗi biến cố trên xảy ra là 50%.

VD 4.2. Xác suất để mũi tên chỉ vào số 1 là 25% vì có 4 biến cố đồng khả năng, đó là "quay được số 1", "quay được số 2", "quay được số 3" và "quay được số 4". Vậy xác suất mỗi biến cố là $\frac{1}{4} = 25\%$.

VD 4.3. Xác suất để quay được chữ P là $\frac{1}{3}$.

VD 4.4. Một chiếc hộp đựng 6 thẻ bài có số từ 11 tới 16. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp.

a) Rút được tấm thẻ có số 10: 0%

b) Rút được tấm thẻ có số chẵn: $\frac{1}{2}$

c) Rút được tấm thẻ có số 11 hoặc 12: $\frac{1}{3}$

d) Rút được tấm thẻ có số 0: 0%

e) Rút được tấm thẻ có số nguyên tố: $\frac{1}{3}$

f) Rút được tấm thẻ có số nhỏ hơn 20: 100%

VD 4.5. Tung một xúc xắc. Xác suất để:

a) Được mặt có 3 chấm: $\frac{1}{6}$

b) Được mặt có số lẻ hoặc chẵn: 100%

c) Được mặt có số lẻ: $\frac{1}{2}$

d) Được mặt có số chia hết cho 3: $\frac{1}{3}$

VD 4.6. Lần lượt tung hai đồng xu, ta có 4 khả năng sau: Ngửa – Ngửa, Ngửa – Úp, Úp – Ngửa, Úp – Úp.

a) A: "Cả hai đồng xu đều ngửa": $\frac{1}{4}$

b) B: "Đồng xu thứ nhất úp, đồng xu thứ hai ngửa": $\frac{1}{4}$

c) C: "Cả hai đồng xu đều úp": $\frac{1}{4}$

d) D: "Một đồng xu úp, một đồng xu ngửa": $\frac{1}{2}$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Ngày chủ nhật.

Bài 2.

a) Tung xúc xắc và được số 6: Ngẫu nhiên

b) Tung hai xúc xắc và được tổng là số 1: Không thể.

c) Tung đồng xu và được mặt ngửa: Ngẫu nhiên

d) Tung một đồng xu 10 lần và cả 10 lần đều ra mặt ngửa: Ngẫu nhiên

e) Tung xúc xắc và được số nhỏ hơn 10: Chắc chắn

Bài 3. Xác suất quay được màu vàng là $\frac{1}{3}$.

Bài 4.

a) Bốc được bi đỏ hoặc vàng: 100%

b) Bốc được bi xanh: 0%

c) Bốc được một bi đỏ và một bi vàng: 0%

d) Bốc được bi vàng: 50%

Bài 5.

a) Tính xác suất để khuy bốc được có màu trắng: 50%

b) 5 cái khuy màu đen được thêm vào. Tính xác suất để bốc một lần và được khuy màu đen: $\frac{1}{3}$

Bài 6. Xác suất để:

a) Quay được số 7: $\frac{1}{8}$

b) Quay được số 10: $\frac{1}{8}$

c) Quay được số chẵn: $\frac{1}{2}$

d) Quay được số nhỏ hơn 3: $\frac{1}{4}$

e) Quay được số không bé hơn 5: $\frac{5}{8}$

Bài 7. Xác suất để tháng đó:

a) là tháng 6: $\frac{1}{12}$

b) là tháng số chẵn: $\frac{1}{2}$

c) là tháng có đúng 28 hoặc 29 ngày: $\frac{1}{12}$

d) là tháng thuộc quý 3: $\frac{1}{4}$

Bài 8.

- Xác suất quay được màu đỏ là 25%: Màu đỏ chiếm 3 phần.
- Xác suất quay được màu vàng là $\frac{1}{6}$: Màu vàng chiếm 2 phần.
- Xác suất quay được màu xanh là 50%: Màu xanh chiếm 6 phần.
- Xác suất quay được màu đen là $\frac{1}{12}$: Màu đen chiếm 1 phần.

ÔN TẬP CHƯƠNG VIII

Bài 1.

- a) Tháng Ba năm sau có đúng 28 ngày: Không thể
- b) Tại Hà Nội, tuyết sẽ rơi vào giữa tháng 6: Không thể
- c) Các bạn học sinh đều đi ô tô đến trường: Ngẫu nhiên
- d) Dậm chân trên mặt đất và nhảy ra ngoài vũ trụ: Không thể
- f) Tung đồng xu và được mặt ngửa: Ngẫu nhiên

Bài 2.

- A: "Tung một đồng xu và được mặt ngửa": Ngẫu nhiên
- B: "Tung một đồng xu và được mặt úp hoặc ngửa": Chắc chắn
- C: "Tung hai đồng xu và được mặt úp và ngửa": Không thể
- D: "Tung một xúc xắc và được số nguyên tố": Ngẫu nhiên
- E: "Tung một xúc xắc và được một hợp số": Ngẫu nhiên
- F: "Tung hai xúc xắc và được hai số có hiệu giữa số lớn và số bé là 6": Không thể

Bài 3.

- a) Được hai số lẻ: Ngẫu nhiên
- b) Được hai số từ 1 tới 6: Chắc chắn
- c) Được hai số có tổng là 13: Không thể
- d) Được hai số chia hết cho 5: Ngẫu nhiên
- e) Được hai số có hiệu giữa số lớn và số bé là 6: Không thể
- f) Được hai số có tích là số lẻ: Ngẫu nhiên

Bài 4. Các giá trị của x, y để biến cố "Số được chọn lớn hơn 3 và nhỏ hơn 12" là:

- a) biến cố chắc chắn: x, y có thể là 4; 10 hoặc 11.
- b) biến cố ngẫu nhiên: x, y có thể là mọi số tự nhiên lớn hơn 0.

Bài 5. Ngày chủ nhật.

Bài 6.

- a) Tung xúc xắc và được số 4: Ngẫu nhiên
- b) Tung hai xúc xắc và được tổng là số 13: Không thể
- c) Tung đồng xu và được mặt ngửa: Ngẫu nhiên

d) Tung một đồng xu 10 lần và 8 lần ra mặt úp, 2 lần ra mặt ngửa: Ngẫu nhiên

e) Tung xúc xắc và được số nhỏ hơn 10: Chắc chắn

Bài 7. Xác suất để quay được màu vàng: $\frac{1}{3}$

Bài 8.

a) Bốc được bi đỏ hoặc vàng: 100%

b) Bốc được bi xanh: 0%

c) Bốc được một bi đỏ và một bi vàng: 0%

d) Bốc được bi vàng: 50%

Bài 9.

a) Xác suất để khuy bốc được có màu trắng: 50%

b) 4 cái khuy màu đen được thêm vào. Xác suất để bốc một lần và được khuy màu đen: $\frac{1}{3}$

Bài 10. Xác suất để:

a) Quay được số 10: $\frac{1}{12}$

b) Quay được số 0: 0%

c) Quay được số chẵn: $\frac{1}{2}$

d) Quay được số nhỏ hơn 3: $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

e) Quay được số không bé hơn 5: $\frac{5}{12}$

Bài 11. Chọn một tháng bất kì trong năm. Xác suất để tháng đó:

a) là tháng 6: $\frac{1}{12}$

b) là tháng số chẵn: $\frac{1}{2}$

c) là tháng có đúng 28 hoặc 29 ngày: $\frac{1}{12}$

d) là tháng thuộc quý 1: $\frac{1}{4}$

Bài 12. Trong bộ bài Tây có tổng cộng 52 lá bài, đưa chia đều làm 4 chất: Bích, Nhép, Rô, Cơ. Trong mỗi chất, các con bài có số từ 2 tới 10, đồng thời có 4 lá chữ cái là J, Q, K, A.

a) Tính số lá bài của mỗi chất: 13 lá mỗi chất.

b) Với việc bốc một lá bài, các biến cố sau thuộc loại biến cố nào? Em hãy đánh dấu ✓ vào ô phù hợp..

| Biến cố | Loại biến cố | | |
|-------------------------------------|--------------|------------|-----------|
| | Không thể | Ngẫu nhiên | Chắc chắn |
| Nhận được lá 5 Cơ | | ✓ | |
| Nhận được lá Bích, Nhép, Rô hoặc Cơ | | | ✓ |
| Nhận được lá 2 hoặc 3 | | ✓ | |
| Nhận được lá 11 Nhép | ✓ | | |

c) Xác suất để bốc một lá bài và được lá số 4 là $\frac{1}{4}$.

d) Xác suất để bốc một lá bài và được lá K Bích là $\frac{1}{52}$.

CHƯƠNG IX.

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG MỘT TAM GIÁC

BÀI 31. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

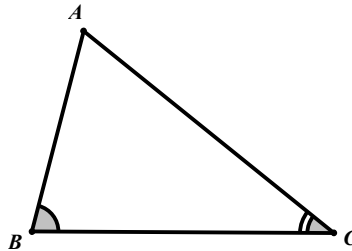
VD 1.1. Cho tam giác ABC có $AB = 8\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$. So sánh \widehat{ABC} và \widehat{ACB} .

Giải:

Xét $\triangle ABC$ có:

$$AB = 8\text{cm}, AC = 10\text{cm}$$

$$\Rightarrow AC > AB \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$$



VD 1.2. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Hãy so sánh hai góc B và C .

• **Lời giải**

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A , áp dụng định lý pitago ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AC = 4\text{cm} \Rightarrow AC > AB. \text{ Do đó } \widehat{B} > \widehat{C}$$

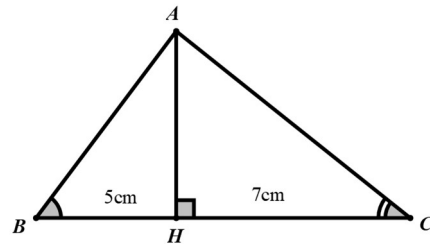
VD 1.3. Cho tam giác $\triangle ABC$, đường cao AH , biết $BH = 5\text{cm}$, $CH = 7\text{cm}$. Hãy so sánh hai góc B và C .

• **Lời giải**

Vì $\triangle HAB$ vuông tại H , theo định lý pitago ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = BH^2 + AH^2 = 25 + AH^2 \\ AC^2 = CH^2 + AH^2 = 49 + AH^2 \end{array} \right\} \Rightarrow AC^2 > AB^2 \Rightarrow AC > AB$$

Xét $\triangle HAB$ có $AC > AB$ nên: $\widehat{B} > \widehat{C}$



VD 1.4. Cho tam giác ABC , tia phân giác của góc A cắt BC tại D , biết $BD = 2DC$.

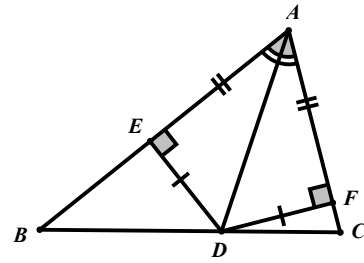
Chứng minh rằng $\widehat{B} < \widehat{C}$

• **Lời giải**

Kẻ $DE \perp AB; DF \perp AC$ ($E \in AB, F \in AC$).

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ADF$ có: $\hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$, AD chung,
 $\widehat{EAD} = \widehat{FAD}$ (do AD là tia phân giác)

$$\text{Do đó } \triangle ADE = \triangle ADF \Rightarrow \begin{cases} AE = AF \\ DE = DF \end{cases}$$



Xét $\triangle EBD$ có $\hat{E} = 90^\circ$, Áp dụng pitago ta có:

$$BE^2 = BD^2 - ED^2 = (2DC)^2 - DF^2 = 4DC^2 - DF^2 \quad (1)$$

Xét $\triangle FDC$ có $\hat{F} = 90^\circ$, Áp dụng pitago ta có:

$$CF^2 = DC^2 - DF^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $BE > CF$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AB = BE + AE \\ AC = AF + FC \end{cases} \text{ mà } AE = AF \text{ nên } AB > AC \text{ do đó } \hat{B} < \hat{C} \text{ (đpcm).}$$

Dạng 2. So sánh hai cạnh trong một tam giác

VD 2.1. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 2\hat{B}$, $\hat{B} + \hat{C} = 80^\circ$. Hãy so sánh các cạnh của tam giác ABC .

Giải:

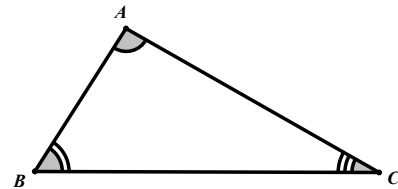
Xét $\triangle ABC$ ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

Mặt khác theo giả thiết $\hat{B} + \hat{C} = 80^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ \Rightarrow \hat{C} = 80^\circ - \hat{B} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

Vậy $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ Nên $BC > AC > AB$.



VD 2.2. Cho $\triangle ABC$, biết $\hat{A} + \hat{C} = 120^\circ$, $\hat{A} - \hat{C} = 40^\circ$.

a) So sánh các cạnh của $\triangle ABC$.

b) Tia phân giác của góc A cắt BC ở D . So sánh độ dài các đoạn BD và CD .

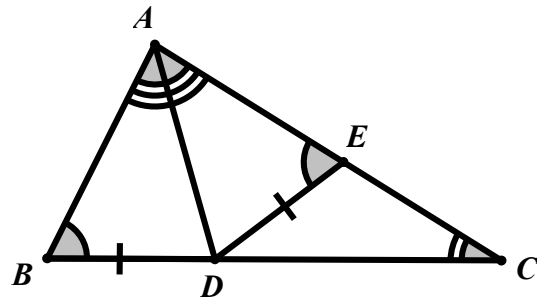
• **Lời giải**

$$\text{a) Từ giả thiết } \begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 120^\circ \\ \hat{A} - \hat{C} = 40^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = 80^\circ \\ \hat{C} = 40^\circ \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{C} \text{ do đó } BC > AC > AB.$$

b) Trên AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$
 Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AED$ có $AB = AE$,
 $\widehat{BAD} = \widehat{DAE}$ (vì AD là tia phân giác của góc A), AD chung
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AED$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABD} = 60^\circ$ và $BD = DE$.



Xét $\triangle DEC$ có: $\widehat{DEC} = 180^\circ - \widehat{AED} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{ECD}$ Do đó $DC > DE$ hay $DC > BD$

VD 2.3. Cho tam giác ABC, biết $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 2 : 3 : 4$. So sánh các cạnh của tam giác.

• **Lời giải**

Theo giả thiết ta có: $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 2 : 3 : 4 \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta được:

$$\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{4} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{2 + 3 + 4} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

$\Rightarrow \hat{A} = 40^\circ; \hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 80^\circ$ Vậy $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C} \Rightarrow BC < AC < AB$

VD 2.4. Cho tam giác ABC cân ở A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Kẻ $Cx \parallel MN$, từ M kẻ $My \parallel CN$. Hai tia Cx và My cắt nhau tại D. So sánh BC và CD.

• **Lời giải**

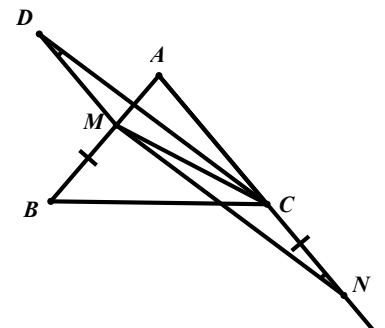
Xét $\triangle MDC$ và $\triangle CNM$ có MC chung, $\widehat{DMC} = \widehat{MCN}$ hai góc so le do $MD \parallel CN$ và $\widehat{DCM} = \widehat{CMN}$ hai góc so le do $CD \parallel MN$

$\Rightarrow \triangle MDC = \triangle CNM$ (g.c.g) $\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{CMN}$ và

$DM = CN = BM$

Dễ thấy $\widehat{ACB} > \widehat{CNM}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ do $\triangle ABC$ cân

$\Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{CNM} = \widehat{MDC}$



Mặt khác xét $\triangle MBD$ có $BM = DM \Rightarrow \triangle MBD$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MDB}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{MBD} > \widehat{MDC} + \widehat{MDB} \Leftrightarrow \widehat{DBC} > \widehat{BDC} \Rightarrow DC > BC$

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: a) $\triangle ABC$ có: $AB = 4\text{cm}$; $BC = 6\text{cm}$; $CA = 5\text{cm}$.

$$\Rightarrow BC > CA > AB$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} > \widehat{CBA} > \widehat{ACB} \text{ hay } \hat{A} > \hat{B} > \hat{C} \text{ (Định lý 1)}$$

b) $\triangle ABC$ có: $AB = 9\text{cm}$; $AC = \sqrt{72}\text{cm} \approx 8,5\text{cm}$; $BC = 8\text{cm}$.

$$\Rightarrow AB > AC > BC$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} > \widehat{ABC} > \widehat{BAC} \text{ hay } \hat{C} > \hat{B} > \hat{A} \text{ (Định lý 1)}$$

c) $\triangle ABC$ có: Độ dài các cạnh AB , BC , CA lần lượt tỉ lệ nghịch với $2, 3, 4$.

$$\Rightarrow AB \cdot 2 = BC \cdot 3 = CA \cdot 4$$

$$\Rightarrow AB > BC > AC$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} > \widehat{BAC} > \widehat{ABC} \text{ hay } \hat{C} > \hat{A} > \hat{B} \text{ (Định lý 1)}$$

d) Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác $\triangle ABC$ vuông ở B

$$\text{Ta có: } BA^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(\sqrt{19})^2 + BC^2 = 6^2$$

$$19 + BC^2 = 36$$

$$BC^2 = 36 - 19$$

$$BC^2 = 17$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{17} \text{ (cm)} \approx 4,13 \text{ (cm)}$$

$\triangle ABC$ có: $AB = \sqrt{19}\text{cm} \approx 4,35\text{cm}$; $BC = \sqrt{17}\text{cm} \approx 4,13\text{cm}$; $AC = 6\text{cm}$.

$$\Rightarrow AC > AB > BC$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ACB} > \widehat{BAC} \text{ hay } \hat{B} > \hat{C} > \hat{A} \text{ (Định lý 1)}$$

Bài 2:

So sánh góc trong tam giác: $\Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$. Góc ngoài tại các đỉnh B < Góc ngoài tại đỉnh C.

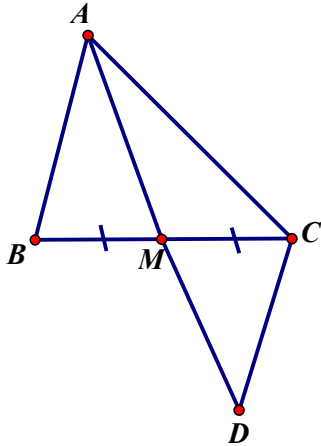
Bài 3:

$$\begin{aligned} \text{Giải: } AB \text{ là cạnh nhỏ nhất nên } \hat{B} \geq \hat{C}, \hat{A} \geq \hat{C} \quad 3\hat{C} \leq \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \Rightarrow 3\hat{C} \leq \hat{C} + B \Rightarrow \hat{C} \leq 60^\circ \end{aligned}$$

Bài 4:

Theo giả thiết ta có: $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ và $BC > B_1C_1$

Thì $A > A_1$ (quan hệ giữa các cạnh đối diện trong tam giác)

Bài 5:

Giải: Vẽ tia đối của tia MA và trên đó

lấy điểm D sao cho $MD = MA$

Xét tam giác MAB và tam giác MDC có

$MA = MD$; $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh)

$MB = MC$ (M là trung điểm của cạnh BC)

Do đó: $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c)

Suy ra: $AB = CD$; $\widehat{BAM} = \widehat{MDC}$

Ta có: $AB = CD$; $AB < AC \Rightarrow CD < CA$

Xét tam giác ADC có: $CD < AC \Rightarrow \widehat{MAC} < \widehat{MDC}$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

Mà $\widehat{MAC} < \widehat{MDC}$ và $\widehat{BAM} = \widehat{MDC}$

Suy ra: $\widehat{MAC} < \widehat{BAM}$

Bài 6:

Trong tam giác vuông cạnh huyền là cạnh lớn nhất vì cạnh huyền đối diện với góc vuông.

Trong tam giác tù cạnh đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất vì góc tù là góc lớn nhất trong tam giác

Bài 7:

Xét tam giác ABC. Có $\hat{B} = \hat{C} < 60^\circ$.
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \leq \hat{A} + 120^\circ \Rightarrow \hat{A} \geq 60^\circ \Rightarrow \hat{A} \geq \hat{C} = \hat{B}$. Vậy cạnh
đáy lớn hơn cạnh bên

Bài 8: Cho tam giác ABC cân tại A, biết $\hat{B} = 45^\circ$.

- So sánh các cạnh của tam giác ABC.
- Tam giác ABC còn gọi là tam giác gì? Vì sao?

Giải:

a) Tam giác ABC cân tại A nên $\hat{C} = \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$

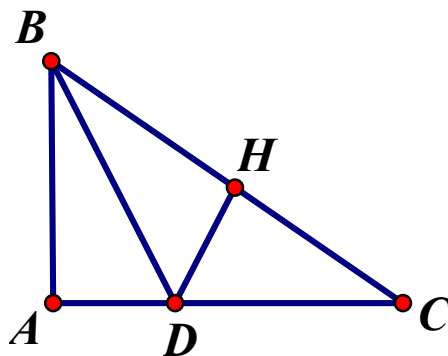
Vậy $\hat{A} = 90^\circ > \hat{C} = \hat{B} = 45^\circ$

$\Rightarrow BC > AB = AC$

b) Tam giác ABC vuông cân tại A vì $\hat{A} = 90^\circ$

Bài 9:

a) Kẻ $DH \perp BC$



$\triangle ABD = \triangle HBD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$BA = BH$

$\Rightarrow AD = DH$

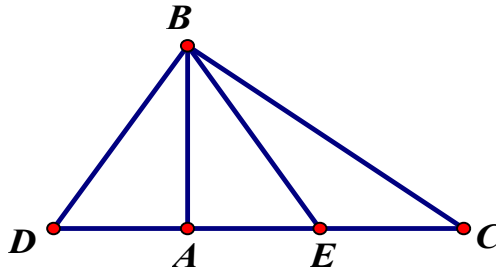
b) $\triangle DHC$ vuông tại H $\Rightarrow DH < DC$

$\triangle DHC$ (cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền)

suy ra: $AD < DC$

Bài 10: Cho tam giác ABC, $A = 90^\circ$. Trên tia đối của tia AC lấy D sao cho $AD < AC$. Nối B với D. Chứng minh rằng: $BC > BD$

Lấy E thuộc AC sao cho $AD = AE$



Ta có: $AE < AC$ (Vì $AD < AC$)

Nên E nằm giữa A và C

Mà $BA \perp DE$ và $DA = AE$

$\Rightarrow \triangle BDE$ cân đỉnh B

$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BEA}$

Ta có: $\widehat{BEA} > \widehat{BCE}$ (\widehat{BEA} là góc ngoài của tam giác BEC)

Do đó: $\widehat{BDC} > \widehat{BCD}$

Xét tam giác BDC có: $\widehat{BDC} > \widehat{BCD}$

Suy ra: $BC > BD$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác)

Bài 6: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $AB + AC > BC$

Giải:

Trên tia đối của tia AB lấy điểm D

sao cho $AD = AC$

Ta có: $AD = AC \Rightarrow \triangle ADC$ cân đỉnh D

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACD}$ (1)

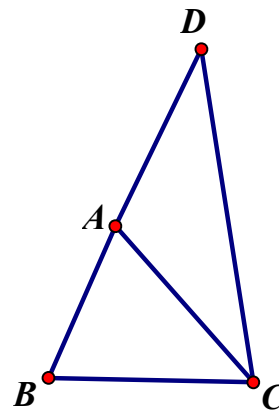
Tia CA nằm giữa hai tia CB và CD

Do đó: $\widehat{BCD} > \widehat{ACD}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{BCD} > \widehat{ADC}$

Xét tam giác DBC có $\widehat{BCD} > \widehat{BDC}$

suy ra $DB > BC$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác) (3)



mà $DB = AB + AD = AB + AC$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $AB + AC > BC$

Bài 11: Cho tam giác ABC trung tuyến AM. Lấy điểm D bất kì trên tia đối của tia MA. So sánh độ dài CD và BD.

Giải

Ta lần lượt nhận thấy

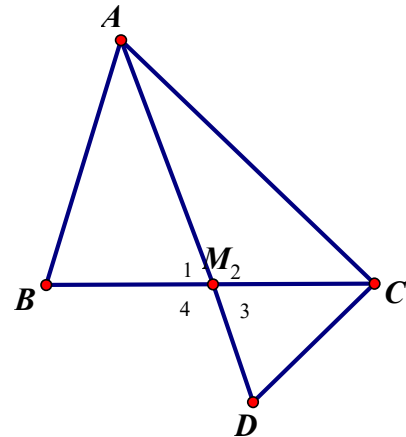
Với hai tam giác ABM và ACM có:

$MB = MC$ (Vì M là trung điểm BC); AM chung; $AB < AC$
Do đó: $\hat{M}_1 < \hat{M}_2 \Rightarrow \hat{M}_3 < \hat{M}_4$

Với hai tam giác BDM và CDM có

$MB = MC$ (M là trung điểm của BC)

DM chung; $\hat{M}_3 < \hat{M}_4$. Do đó: $CD < BD$



Bài 12. Trong tam giác vuông, góc vuông là góc lớn nhất nên cạnh huyền (đối diện với góc vuông) là cạnh lớn nhất.

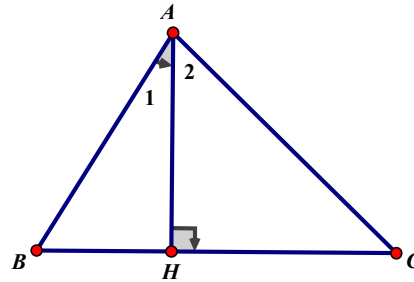
Bài 13. Tính được $\hat{B} = \hat{C} = 65^\circ$, do đó $\hat{C} > \hat{A} \Rightarrow AB > BC$

Bài 14.

Ta có $AB < AC \Rightarrow \hat{C} > \hat{B}$

Chú ý $\hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{B}$; $\hat{A}_2 = 90^\circ - \hat{C}$

$\Rightarrow \hat{A}_1 < \hat{A}_2$

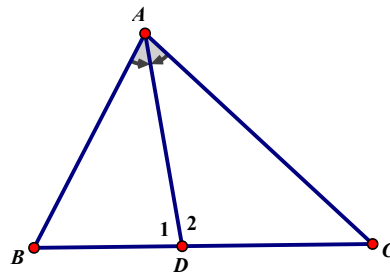


Bài 15.

Chú ý: $\hat{D}_1 = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2}$; $\hat{D}_2 = \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2}$

Mà $AB < AC \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$

Nên $\hat{D}_1 < \hat{D}_2$

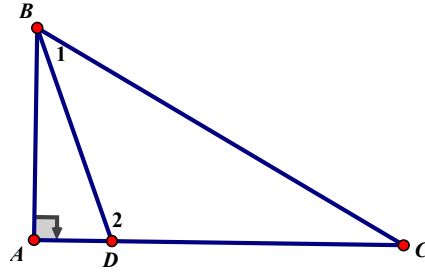


Bài 16.

Tính được

$$\hat{B}_1 = 40^\circ; \hat{D}_1 = 110^\circ; \hat{C} = 30^\circ$$

Từ đó ta có $DB < DC < BC$



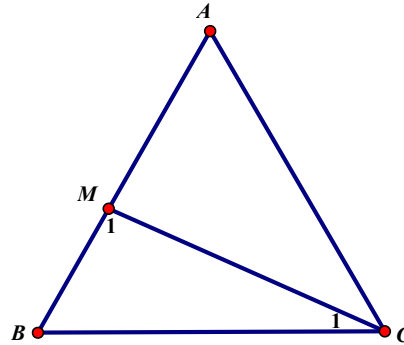
Bài 17.

Ta có $\hat{C}_1 < \hat{A} = 60^\circ$

Chú ý \hat{M}_1 là góc ngoài của tam giác AMC nên $\hat{M}_1 > \hat{A} = 60^\circ$

Do đó

$$\hat{M}_1 > \hat{B} > \hat{C}_1 \\ \Rightarrow MB < MC < BC$$



Bài 18.

a) Ta có

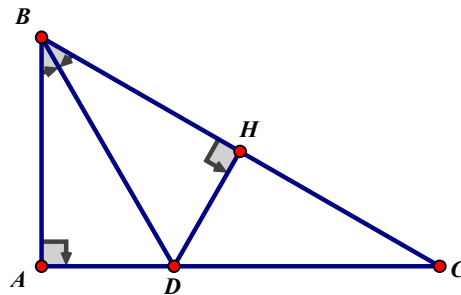
$$\Delta ABD = \Delta HBD \quad (\text{ch-gn})$$

$$\Rightarrow BA = BH$$

b) Chứng minh được $DA = DH$

Lại có tam giác DHC vuông tại H nên $DH < DC$

$$\Rightarrow DA < DC$$



Bài 19.

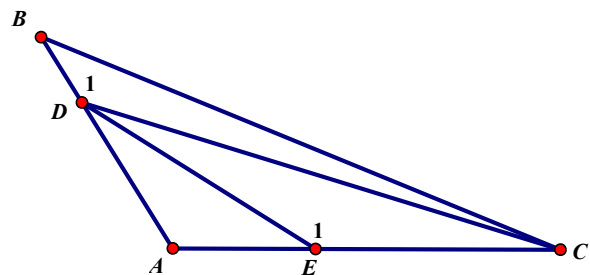
Chú ý \hat{E}_1 là góc ngoài của tam giác DAC

$$\text{nên } \hat{E}_1 > \hat{A} > 90^\circ \Rightarrow DE < DC$$

Tương tự ta có

$$\hat{D}_1 > \hat{A} > 90^\circ \Rightarrow DC < BC$$

Do đó $DE < DC < BC$



Bài 20.

Do Bx nằm giữa BA và BC

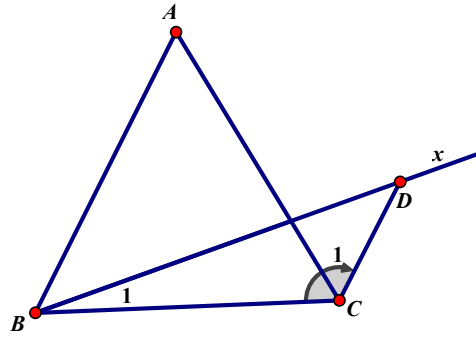
nên $\hat{B}_1 < \hat{B}$

Chú ý D nằm ngoài tam giác

ABC nên CA nằm giữa CD và CB,

do đó $\hat{C}_1 > \hat{C}$

Từ đó $\hat{C}_1 > \hat{B}_1 \Rightarrow DC < DB$



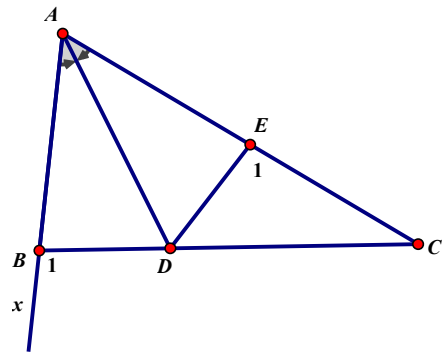
Bài 21.

Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho
AB = AE, chứng minh được

$\Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}_1 > \hat{C}$ và $DB = DE$

Từ đó $DB = DE < DC$



Bài 18.

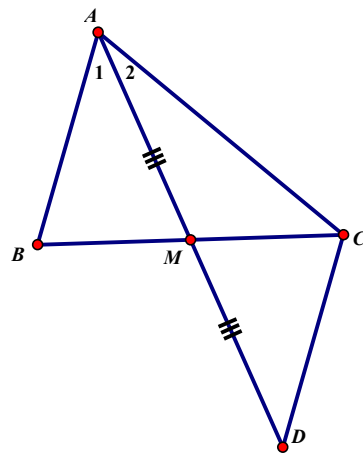
Trên tia đối của tia MA lấy điểm D
sao cho MA = MD, chứng minh
được

$\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}$

Chú ý rằng $CD = AB < AC$

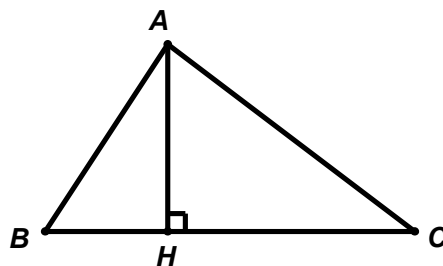
$\Rightarrow \hat{A}_2 < \hat{D}$. Do đó $\hat{A}_1 > \hat{A}_2$



BÀI 32. QUAN HỆ ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

VD 1.1.

Ta có $AH \perp BC$ nên AH là đường vuông góc còn AB và AC là các đường xiên và BH, CH tương ứng là hình chiếu của AB, AC lên đường thẳng BC .



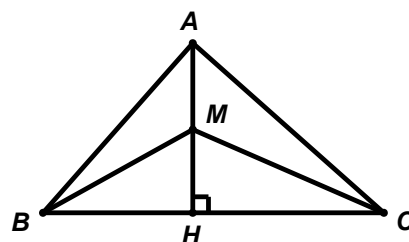
Vì $AB < AC$ nên $HB < HC$

VD 1.2.

Ta có BH, CH tương ứng là hình chiếu của hai đường xiên AB, AC trên đường thẳng BC .

Vì $AB < AC \Rightarrow BH < CH$.

Mặt khác BH, CH tương ứng là hình chiếu của hai đường xiên BM, CM lên đường thẳng BC .

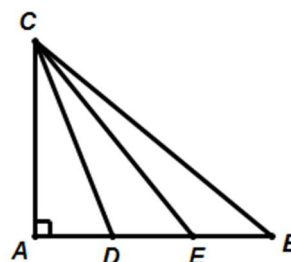


Do $BH < CH$ nên $BM < CM$.

VD 1.3.

Xét trên cạnh AB , ta có $AD = DE = EB \Rightarrow AD < AE < AB$.

Vì $CA \perp AB$ nên AD, AE, AB tương ứng là hình chiếu của các đường xiên CD, CE, CB lên đường thẳng AB . Do $AD < AE < AB \Rightarrow CD < CE < CB$ (1)



Mặt khác $CA < CD$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên) (2)

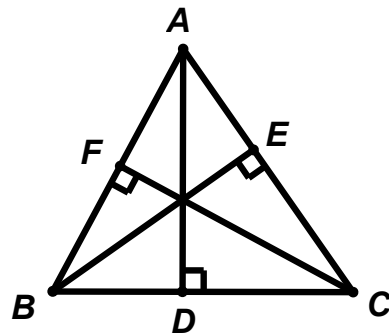
Từ (1) và (2) suy ra $CA < CD < CE < CB$.

VD 2.1.

a) Ta có $\begin{cases} AD < AB \\ AD < AC \end{cases}$ (đường vuông góc nhỏ hơn

đường xiên)

Do đó $AD + AD < AB + AC$ hay $AD < \frac{AB + AC}{2}$ (1)



b) $BE \perp AC \Rightarrow BE$ là đường vuông góc còn BA, BC là các đường xiên

$\Rightarrow BE < BA, BE < BC$

$$\Rightarrow BE + BE < BA + BC \text{ hay } BE < \frac{AB + BC}{2} \quad (2)$$

Chứng minh tương tự ta có: $CF < \frac{AC + BC}{2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$AD + BE + CF < \frac{AB + AC}{2} + \frac{AB + BC}{2} + \frac{AC + BC}{2} \text{ .Hay } AD + BE + CF < AB + BC + AC$$

(đpcm).

VD 2.2.

Ta có $AB > AH, AC > AH$ (đường xiên lớn hơn đường vuông góc)

$$\Rightarrow AB + AC > AH + AH$$

$$\text{Hay } AB + AC > 2AH \quad (1)$$

Ta cũng có $AB > BH, AC > CH$ (đường xiên lớn hơn đường vuông góc)

$$\Rightarrow AB + AC > BH + CH$$

$$\text{Hay } AB + AC > BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $2(AB + AC) > 2AH + BC$

$$\Rightarrow AB + AC > AH + \frac{BC}{2} \quad (*)$$

Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$

$$\Rightarrow \triangle ABE \text{ cân ở } B \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BEA}$$

Mặt khác $\widehat{BAE} = \widehat{AEF}$ (cùng phụ với \widehat{EAF}).

$$\text{Suy ra } \widehat{BEA} = \widehat{AEF}$$

$$\Rightarrow \triangle AHE = \triangle AFE \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AH = AF \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Do đó } BC + AH = BE + EC + AH = BA + EC + AF .$$

Vì $EC > CF$ (đường xiên lớn hơn đường vuông góc)

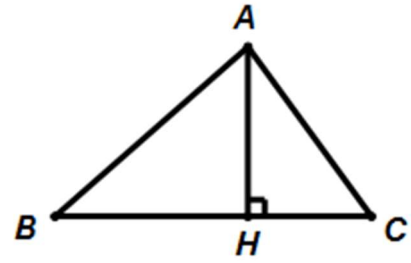
$$\text{Nên } BC + AH > BA + CF + AF$$

$$\text{Hay } BC + AH > BA + AC \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra điều phải chứng minh.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Ta có BH là hình chiếu của đường xiên AB lên đường thẳng BC và CH là hình chiếu của đường xiên AC lên đường thẳng BC . Do $AB > AC$ nên $BH > CH$.



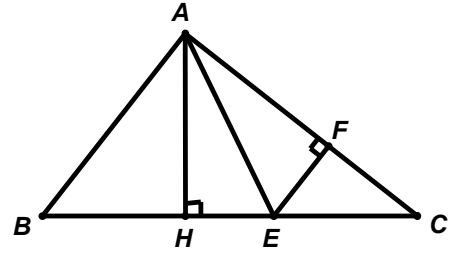
Bài 2.

a) Ta có $AH \perp BC \Rightarrow AH$ là đường vuông góc còn AB là đường xiên $\Rightarrow AH < AB$ (1)

Lập luận tương tự AC là đường xiên còn AH là đường vuông góc $\Rightarrow AH < AC$ (2)

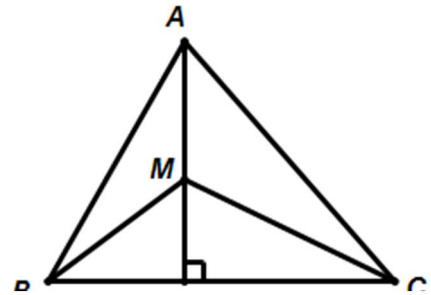
Từ (1) và (2) suy ra: $AH + AH < AB + AC$

$$\text{hay } AH < \frac{AB + AC}{2}.$$



b) Ta có BH và CH tương ứng là hình chiếu của đường xiên AB và AC lên đường thẳng BC . Vì $AB < AC$ nên $BH < CH$.

Mặt khác BH và CH là hình chiếu của đường xiên MB và MC . Do $BH < CH$ nên $MB < MC$.

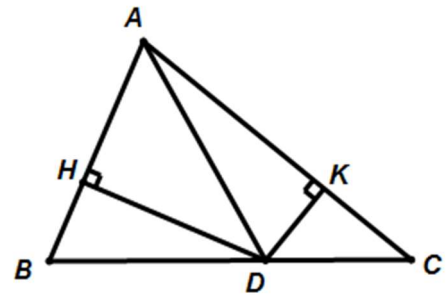


Bài 3.

Ta có $DH < BD$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên)

$DK < DC$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên)

Suy ra $DH + DK < BD + DC$ hay $DH + DK < BC$.



Bài 4.

a) Kẻ $DF \perp BC (F \in BC) \Rightarrow DF < DC$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên).

Tam giác ABD và tam giác FBD có:

$$+ \widehat{A} = \widehat{F} = 90^\circ$$

+ Cạnh huyền BD chung

$$+ \widehat{ABD} = \widehat{FBD}$$

$$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta FBD (ch - gn) \Rightarrow AD = FD \Rightarrow AD < DC \quad (\text{vì}$$

$DF < DC$)

Ta lại có $ED > EC$ (đường xiên dài hơn đường vuông góc). Do đó $ED + EC > EC + EC$ hay $ED + EC > 2EC$ (1)

Mặt khác ta có $AB \parallel EC \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CED}$ (2 góc so le trong) mà $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ (BD là tia phân giác góc ABC). Suy ra $\widehat{CED} = \widehat{CBE} \Rightarrow \Delta BCE$ cân ở $C \Rightarrow CB = CE$ (2)

Lại có: $CA > AD \Rightarrow BC > BD$ (hình chiếu lớn hơn thì đường xiên lớn hơn) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $ED + EC > 2BD$ (4)

Mà $BD > BA \Rightarrow 2BD > BD + BA$ (5)

Từ (4), (5) suy ra $ED + EC > BD + BA$

Lại có $DC > AD$ (chứng minh trên)

Ta suy ra $ED + EC + DC > BD + BA + AD$ (đpcm).

Vậy: chu vi tam giác ABD nhỏ hơn chu vi tam giác CDE .

Bài 5. Ta có $DH \perp HB \Rightarrow DH$ là đường vuông góc

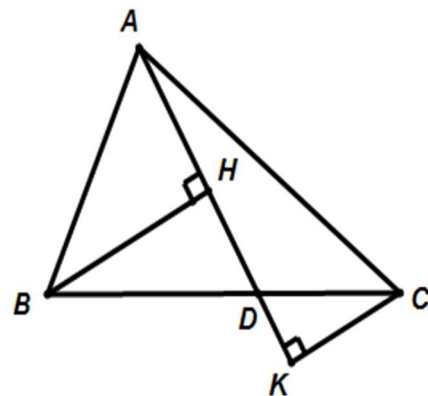
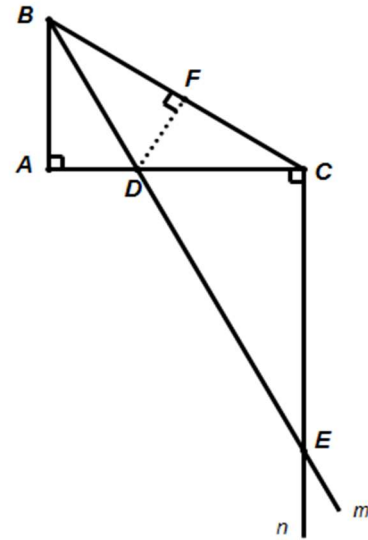
còn DB là đường xiên $\Rightarrow DH < BD$ (1)

$DK \perp CK \Rightarrow DK$ là đường vuông góc

Còn CD là đường xiên $\Rightarrow DK < CD$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có

$DH + DK < BD + CD$ hay $DH + DK < BC$ (đpcm).



Bài 6.

a) Xét tam giác BDA và BDC có:

$$+ \widehat{BDA} = \widehat{BDC} = 90^\circ$$

+ BD chung

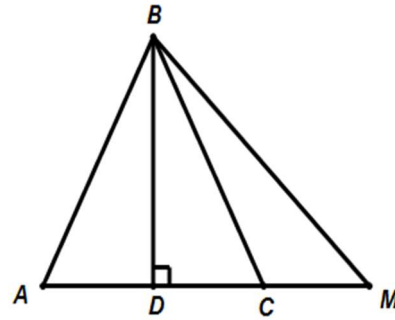
+ $BA = BC$ (vì $\triangle ABC$ cân ở B)

$\Rightarrow \triangle BDA = \triangle BDC$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông)

$\Rightarrow DA = DC$ hay D là trung điểm AC

Ta có $DC < DM$ (vì C nằm giữa D và M)

Suy ra $DA < DM$



b) Ta có DC là hình chiếu của đường xiên BC lên đường thẳng AC

DM là hình chiếu của đường xiên BM lên đường thẳng AC

Vì $DC < DM$ nên $BC < BM$. Mà $BC = BA$, từ đó suy ra $BA < BM$.

Bài 7.

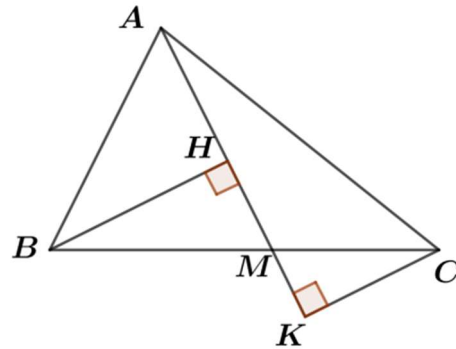
a) Kẻ $BH \perp AM; CK \perp AM$ ($H, K \in AM$)

Theo đề ra, ta có: $d = BH + CK$

Ta có: $BH \leq BM$ (quan hệ đường vuông góc, đường xiên)

Và $BH = BM$ khi và chỉ khi $H \equiv M$ hay $AM \perp BC$

(1)



Lại có $CK \leq CM$ (quan hệ đường vuông góc, đường xiên)

Và $CK = CM$ khi và chỉ khi $K \equiv M$ hay $AM \perp BC$ (2)

Từ (1);(2) suy ra: $BH + CK \leq BM + CM = BC$ hay $d \leq BC$ (đpcm).

b) Giá trị lớn nhất của d bằng BC (ta viết $d_{\max} = BC$) khi và chỉ khi $AM \perp BC$, hay M là hình chiếu của A lên BC . Vì hai góc B và C nhọn nên khi đó M nằm giữa B và C - thỏa mãn điều kiện.

Nhận xét: Ví dụ trên thuộc dạng toán "cực trị hình học": Xác định vị trí của một điểm (hay một hình để một đại lượng (có độ dài đoạn thẳng, số đo góc, diện tích,.....) có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

BÀI 33. QUAN HỆ BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

VD 1.1. Gọi độ dài cạnh AB là x (cm) ($x > 0$).

Theo bất đẳng thức trong tam giác ABC ta có: $|BC - AC| < AB < BC + AC$

$$|1 - 7| < x < 1 + 7 \Leftrightarrow 6 < x < 8.$$

Vì x là số nguyên nên $x = 7$. Vậy độ dài cạnh $AB = 7$ cm.

VD 1.2.

TH1: Nếu AB là cạnh bên và $\triangle ABC$ cân tại A

$$\Rightarrow AB = AC = 5 \text{ cm} \Rightarrow BC = 13 \text{ cm}.$$

Lại có: $BC - AB > AC$ ($13 - 5 > 5$) (không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác).

TH2: Nếu AB là cạnh bên và $\triangle ABC$ cân tại B

$$\Rightarrow AB = BC = 5 \text{ cm} \Rightarrow AC = 13 \text{ cm}.$$

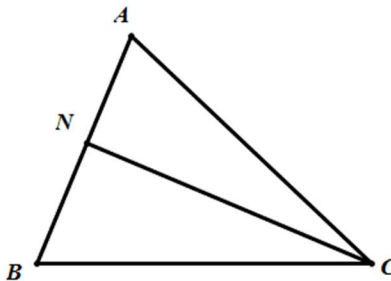
Lại có: $AC - AB > BC$ ($13 - 5 > 5$) (không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác).

TH3: Nếu AB là cạnh đáy thì $\triangle ABC$ cân tại C .

$$\Rightarrow AC = BC = (23 - 5) : 2 = 9 \text{ cm} \text{ (thỏa mãn bất đẳng thức tam giác)}$$

Vậy: $AC = BC = 9$ cm.

VD 2.1.



a) Xét $\triangle ANC$, ta có:

$$NC < AN + AC \text{ (bất đẳng thức tam giác)}$$

b) Theo câu a) ta có:

$$NC < AN + AC$$

$$\Rightarrow NB + NC < NB + AN + AC$$

$$\Leftrightarrow NB + NC < AB + AC \text{ (đpcm)}.$$

VD 2.2 Trên tia AM lấy điểm D sao cho $AM = MD$.

Xét hai $\triangle AMB$ và $\triangle DMC$ có:

$AM = MD$ (giả thiết); $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh);

$BM = MC$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle DMC$ (c - g - c)

$\Rightarrow AB = DC$ (hai cạnh tương ứng)

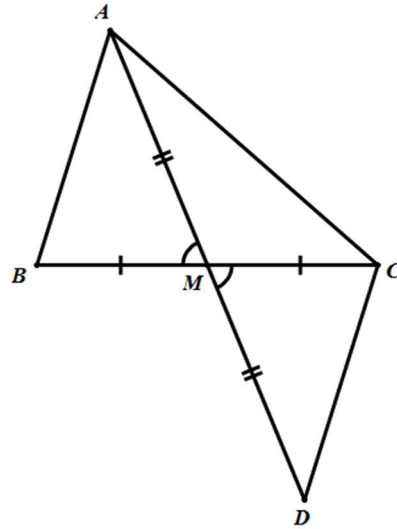
Xét $\triangle ACD$ có:

$DC - AC < AD < AC + DC$ (bất đẳng thức tam giác)

Do $AB = DC$ (cmt); $AD = 2AM$ (giả thiết) nên ta có:

$AB - AC < 2AM < AB + AC$. Vậy:

$$\frac{AB - AC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}$$



IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

a) Đây không phải độ dài ba cạnh của tam giác bởi $2 + 7 = 9$

b) Đây chính là độ dài ba cạnh của tam giác bởi $5 + 6 > 7$; $6 + 7 > 5$; $5 + 7 > 6$

c) Đây chính là độ dài ba cạnh của tam giác bởi $3 + 4 > 5$; $4 + 5 > 3$; $3 + 5 > 4$

d) Đây không phải độ dài ba cạnh của tam giác bởi $2 + 3 < 6$

Bài 2.

Quãng đường của bạn Hòa: BC

Quãng đường của bạn Bình: $AB + AC$

Quãng đường đi được của bạn Hòa ngắn hơn.

Ta thấy: $AB + AC > BC$

Bài 3. Điều kiện về độ dài cho cạnh AB là: $|AC - BC| < AB < AC + BC$

$$|8 - 1| < AB < 8 + 1$$

$$7 < AB < 9$$

Suy ra: $AB = 8\text{cm}$ vì nó có điều kiện nguyên. Khi đó $\triangle ABC$ có $AB = AC$ nên nó cân tại A

Bài 4:

a) Điều kiện về độ dài cho cạnh AC là

$$|BC - AB| < AC < BC + AB$$

$$|7,9 - 3,9| < AC < 7,9 + 3,9$$

$$4 < AC < 11,8$$

$$\Rightarrow AC = 7,9\text{cm}$$

b) $\triangle ABC$ có $AC = BC = 7,9\text{cm}$ nên nó cân tại C

c) Chu vi: $AB + AC + BC = 3,9 + 7,9 + 7,9 = 19,7\text{cm}$

Bài 5. Giả sử tam giác có ba cạnh a, b, c ta cần đi chứng minh:

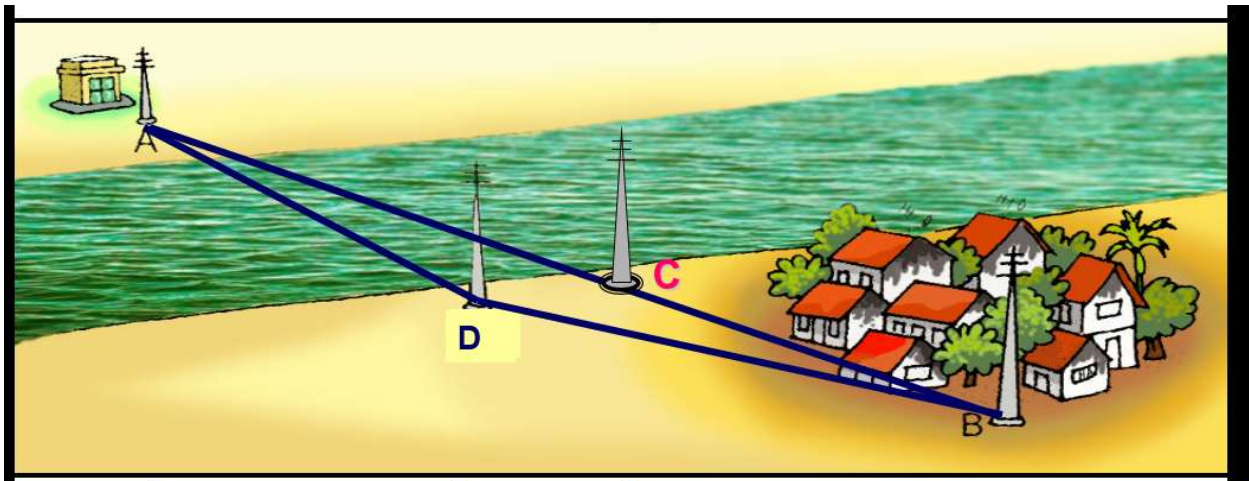
$$a < \frac{1}{2}(a+b+c); b < \frac{1}{2}(a+b+c); c < \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Thật vậy ta luôn có: $a < b+c \Rightarrow a+a < a+b+c$

$$2a < a+b+c \Rightarrow a < \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Các đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

Bài 6.



Địa điểm C thuộc đường thẳng AB và gần bờ sông có khu dân cư vì đường dây dẫn ngắn nhất khi: $AC + BC = AB$

Thật vậy, nếu dựng điểm D khác C thì theo bất đẳng thức tam giác ta có:

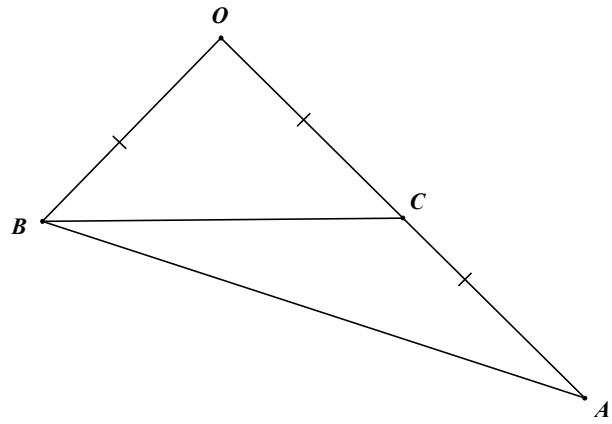
$$AD + BD > AB$$

Bài 7.

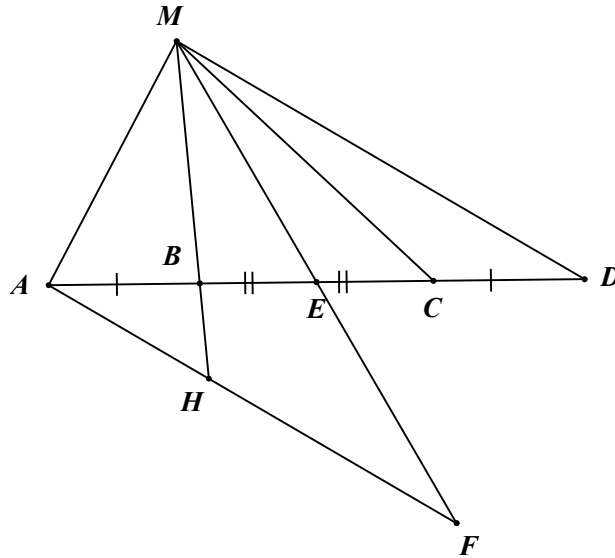
Xét $\triangle OBA$ có $AB + BO > OA$ hay
 $AB + BO > OA + AC$ (1)

Mà $\left. \begin{array}{l} OB = OC \\ CO = AC \end{array} \right\} \Rightarrow OB = AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB + BO > BO + AC \Rightarrow$
 $AB > AC$



Bài 8.



a) Có $\triangle MAE = \triangle FDE$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \hat{A} = \hat{D} \Rightarrow AM \parallel DF$

Có $\triangle MCE = \triangle FBE$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \hat{C} = \hat{B} \Rightarrow MC \parallel BF$

b) Ta có:

$\left. \begin{array}{l} \triangle AMH : AM + AH > MH \\ \triangle BHF : BH + HF > BF \end{array} \right\} \Rightarrow AM + AH + BH + HF > MH + BF$

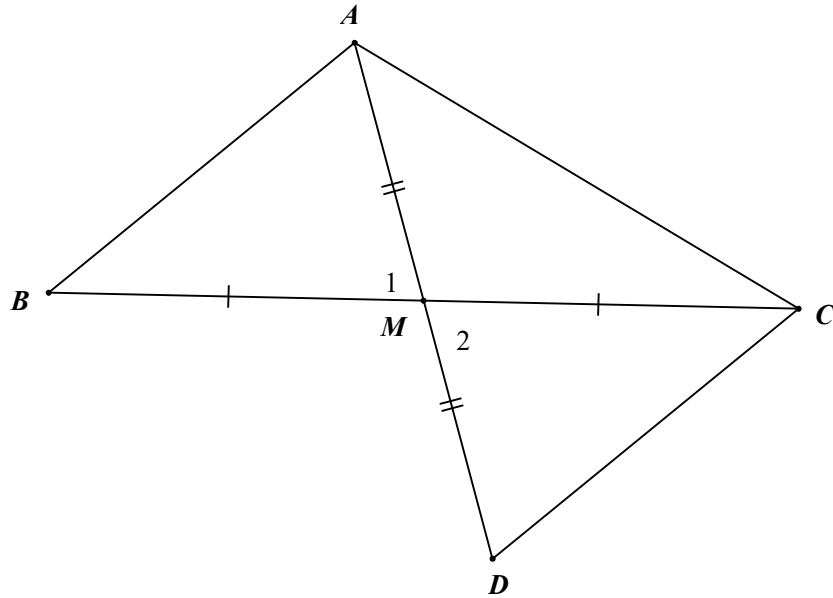
$\Rightarrow AM + AH + BH + HF > MB + BH + BF$

$\Rightarrow AM + AH + HF > MB + BF$

c) Ta có $AH + HF = AF; AF = MD; MC = BF$

Mà $AM + AH + HF > MB + BF$. Suy ra $AM + MD > MA + MC$

Bài 9.

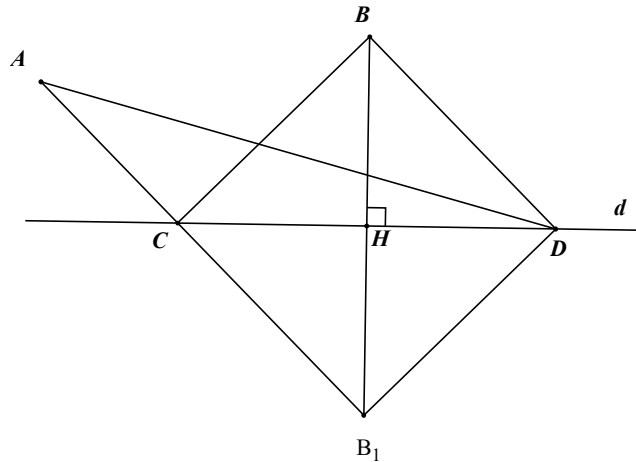


a) Ta chứng minh: $\triangle AMD = \triangle DMC$ (c - g - c)

b) Có $\triangle ABD$ có $AB + BD > AD$ hay $AB + BD > 2AM$

Mà $BD = AC$ Vì $\triangle BMD = \triangle CMA$. Khi đó $AB + AC > 2AM$

Bài 10



Kẻ $BH \perp d$. Trên tia đối của tia HB lấy điểm B_1 sao cho $BH = B_1H$

Gọi là C là giao điểm của AB_1 và d . D là điểm bất kì trên d ($D \neq C$). Ta cần đi chứng minh $CA + CB < DA + DB$

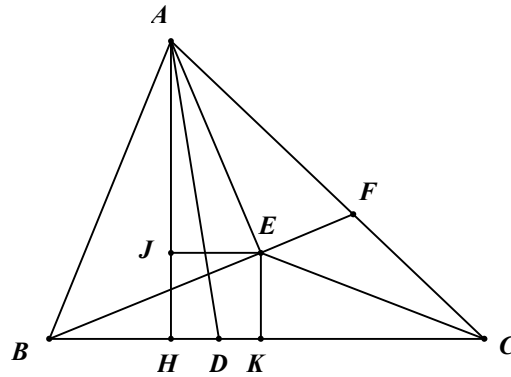
Thật vậy, trong $\triangle AB_1D$, ta luôn có: $AB_1 < DA + DB_1 \Leftrightarrow CA + CB_1 < DA + DB_1$ (1)

$$\begin{aligned} \Delta HBC &= \Delta HB_1C \Rightarrow CB = CB_1 \\ \Delta HDB &= \Delta HB_1D \Rightarrow DB = DB_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được: $CA + CB < DA + DB$

Vậy điểm C cần tìm chính là giao điểm của AB_1 và d .

Bài 11.



a) Xét ΔADC có $AD < AC + CD$ (bất tam giác)

Xét ΔADB có $AD < AB + BD$ (bất tam giác)

Cộng từng vế hai bất trên ta được

$$AD + AD < AB + AC + BD + DC$$

$$2AD < AB + BC + AC$$

$$\Rightarrow AD < \frac{AB + BC + AC}{2}$$

Vậy AD bé hơn nửa chu vi ΔABC .

b) Trong các $\Delta AEC; AEB; BEC$ áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có :

$$\left. \begin{aligned} AE + CE &> AC \\ AE + BE &> AB \\ BE + CE &> BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(AE + BE + CE) > AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow AE + BE + CE > \frac{AB + AC + BC}{2}$$

Vậy tổng khoảng cách từ E đến mỗi đỉnh tam giác luôn lớn hơn nửa chu vi ΔABC .

Kéo dài BE cắt AC tại F. Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào tam giác ABF ta được:

$$BF < AB + AF \Rightarrow BE + EF < AB + AF \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào tam giác EFC ta được:

$$EC < EF + FC \quad (2)$$

Cộng từng vế của (1) với (2) ta được: $BE + EF + EC < AB + AF + EF + FC$

$$EB + EC < AB + AC. \quad (4)$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$EA + EB < AC + BC \quad (5)$$

$$EA + EC < AB + BC \quad (6)$$

Cộng theo từng vế của (4), (5), (6) ta được :

$$2(EA + EB + EC) < 2(AB + AC + BC)$$

$$\Rightarrow EA + EB + EC < AB + AC + BC.$$

Vậy tổng khoảng cách từ E đến mỗi đỉnh tam giác luôn bé hơn chu vi ΔABC .

c) Gọi S là diện tích ΔABC , kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$, $EK \perp BC (K \in BC)$

Khi đó

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC; S_{\Delta EBC} = \frac{1}{2}EK.BC; S_{\Delta AEB} + S_{\Delta AEC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta EBC} = \frac{1}{2}AH.BC - \frac{1}{2}EK.BC = \frac{1}{2}BC(AH - EK)$$

Theo bài ra ta phải chứng minh $S_{\Delta AEB} + S_{\Delta AEC} \leq \frac{1}{2}AE.BC$ suy ra $\frac{1}{2}BC(AH - EK)$

$$\leq \frac{1}{2}AE.BC$$

Hay $AE \geq AH - EK$.

Thật vậy từ E ta kẻ $EJ \parallel BC$, do $AH \parallel EK$ (cùng vuông góc với BC) nên ta chứng minh được $EK = JH$

Và ΔAJE vuông tại J. Trong ΔAJE vuông tại J có $AE \geq EJ \Rightarrow AE \geq AH - EK$.

Dấu "=" xảy ra khi $E \in AH$.

$$\text{Vậy } S_{\Delta AEB} + S_{\Delta AEC} \leq \frac{1}{2}AE.BC.$$

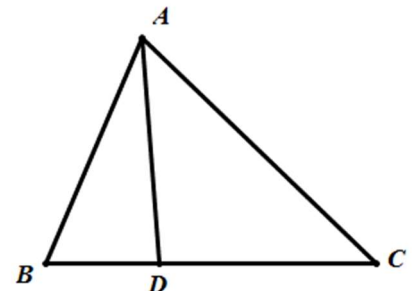
Bài 12.

Xét tam giác ABD , có:

$$AD > AB - BD \quad (\text{bất đẳng thức tam giác}) \quad (1)$$

Xét tam giác ADC , có:

$$AD > AC - DC \quad (\text{bất đẳng thức tam giác}) \quad (2)$$



Cộng từng vế của (1) và (2) ta có:

$$2AD > AB + AC - (BD + DC)$$

Hay $2AD > AB + AC - BC$

$$\Rightarrow AD > \frac{AB + AC - BC}{2}$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$AD < AB + BD \text{ và } AD < AC + DC$$

Suy ra: $2AD < AB + AC + (BD + DC)$

Hay $2AD < AB + AC + BC$

$$\Rightarrow AD < \frac{AB + AC + BC}{2}$$

Vậy $\frac{AB + AC - BC}{2} < AD < \frac{AB + AC + BC}{2}$ (đpcm).

Bài 13.

a) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ (gt)} \\ BE = CE \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow AB + BE = CD + CE$$

Hay $AE = DE$.

Xét $\triangle AEM$ và $\triangle DEF$, có:

$$AE = DE \text{ (chứng minh trên);}$$

$$\widehat{MEA} = \widehat{FED} \text{ (đối đỉnh);}$$

$$ME = FE \text{ (giả thiết);}$$

Nên suy ra $\triangle AEM = \triangle DEF$ (c - g - c).

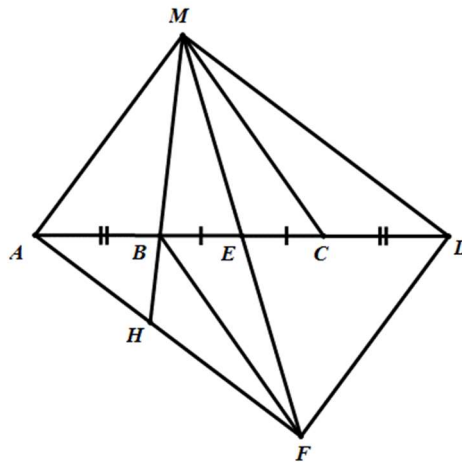
$$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{FDE} \text{ (hai góc tương ứng).}$$

Hay $\widehat{MAD} = \widehat{FDA}$ (mà hai góc này ở vị trí so le trong)

$$\Rightarrow MA \parallel DF.$$

b) Xét $\triangle AMH$, có:

$$AM + AH > MH \text{ (bất đẳng thức tam giác)} \quad (1)$$



Xét $\triangle BHF$, có:

$$BH + HF > BF \text{ (bất đẳng thức tam giác)} \quad (2)$$

Cộng từng vế của (1) và (2) ta có:

$$\Rightarrow AM + AH + BH + HF > MH + BF$$

$$\Rightarrow AM + AH + BH + HF > MB + BH + BF$$

$$\Rightarrow AM + AH + HF > MB + BF$$

$$\text{Vậy } AM + AH + HF > MB + BF. \quad (3)$$

c) Xét $\triangle AEF$ và $\triangle DEM$, có:

$$AE = DE \text{ (chứng minh trên);}$$

$$\widehat{FEA} = \widehat{MED} \text{ (đối đỉnh);}$$

$$ME = FE \text{ (giả thiết);}$$

Nên suy ra $\triangle AEF = \triangle DEM$ (c - g - c).

$$\Rightarrow AF = DM \text{ (hai cạnh tương ứng)}. \quad (4)$$

Xét $\triangle BEF$ và $\triangle CEM$, có:

$$BE = CE \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{FEB} = \widehat{MEC} \text{ (đối đỉnh);}$$

$$ME = FE \text{ (giả thiết);}$$

Nên suy ra $\triangle BEF = \triangle CEM$ (c - g - c).

$$\Rightarrow BF = CM \text{ (hai cạnh tương ứng)}. \quad (5)$$

$$\text{Lại có: } AH + HF = AF. \quad (6)$$

Từ (3), (4), (5), (6) suy ra $MA + MD > MB + MC$.

BÀI 34. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN, BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG MỘT TAM GIÁC

VD 1.1

a) Ta có ABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC$ mà $AB = 2BE; AC = 2CD$ (vì E, D theo thứ tự là trung điểm của AB, AC).

Do đó ta có $2BE = 2CD$ hay $BE = CD$.

Xét tam giác BCE và CBD có: $BE = CD$ (cmt); $\widehat{EBC} = \widehat{DCB}$; BC là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle BCE = \triangle CBD$ (c-g-c)

$\Rightarrow CE = BD$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có G là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BD$ và $CG = \frac{2}{3}CE$ (tính chất trọng tâm)

Mà $CE = BD$ (phần b) $\Rightarrow \frac{2}{3}CE = \frac{2}{3}BD$ hay $CG = BG$

Vậy tam giác GBC cân tại G .

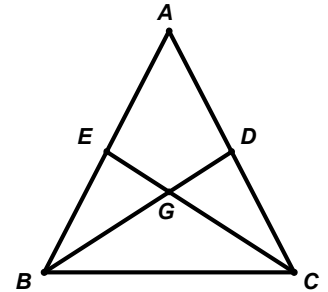
c) Ta có $GB = \frac{2}{3}BD \Rightarrow GD = \frac{1}{3}BD \Rightarrow GB = 2GD \Rightarrow GD = \frac{1}{2}GB$

Chứng minh tương tự: $GE = \frac{1}{2}GC$.

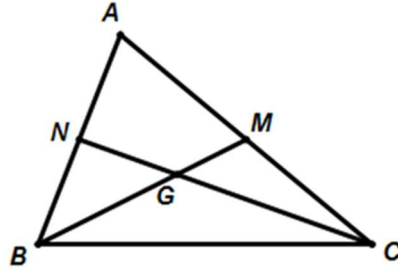
Do đó $GD + GE = \frac{1}{2}GB + \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}(GB + GC)$

Mà $GB + GC > BC$ (trong một tam giác tổng độ dài hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại)

Nên $GD + GE > \frac{1}{2}BC$ (đpcm).



VD 1.2.



Xét tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G . Suy ra G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow BG = \frac{2}{3}BM; CG = \frac{2}{3}CN \Rightarrow BM = \frac{3}{2}BG; CN = \frac{3}{2}CG$.

Do đó ta phải chứng minh $\frac{3}{2}BG + \frac{3}{2}CG > \frac{3}{2}BC$

Hay $BG + CG > BC$ (1)

Bất đẳng thức (1) đúng (trong một tam giác tổng độ dài hai cạnh lớn hơn độ dài cạnh còn lại).

Vậy $BM + CN > \frac{3}{2}BC$ (đpcm).

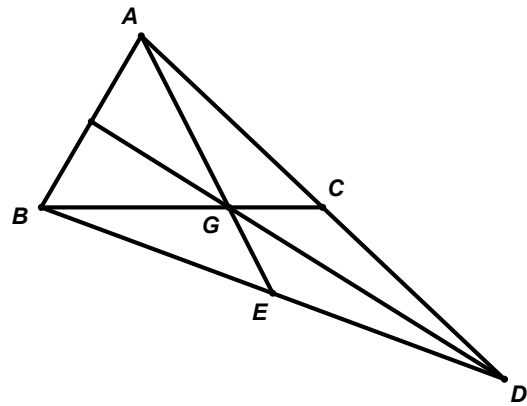
VD 1.3.

a) Xét tam giác ABD có C là trung điểm của cạnh $AD \Rightarrow BC$ là trung tuyến của tam giác ABD .

Hơn nữa $G \in BC$ và

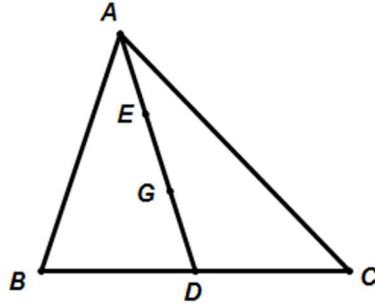
$GB = 2GC \Rightarrow GB = \frac{2}{3}BC \Rightarrow G$ là trọng tâm

tam giác này $\Rightarrow A, G, E$ thẳng hàng (do AE là đường trung tuyến của tam giác ABD).



b) Ta có G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow$ đường thẳng DG là đường trung tuyến của tam giác này. Suy ra DG đi qua trung điểm của cạnh AB (đpcm).

VD 2.1.

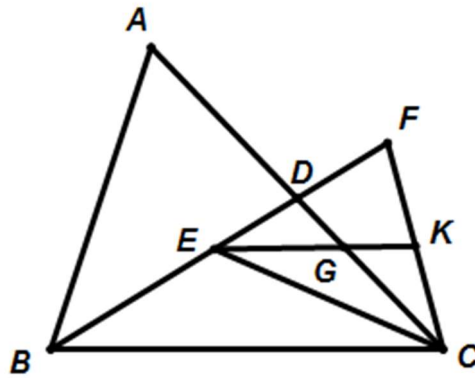


Ta có $AD = AE + EG + GD$ mà $AE = EG = GD$ nên $AD = 3AE$

$$\Rightarrow AE = EG = GD = \frac{1}{3}AD \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AD$$

Vì AD là đường trung tuyến và $AG = \frac{2}{3}AD$ nên G là trọng tâm tam giác ABC .

VD 2.2.



a) Ta có $BF = 2BE$ (gt) $\Rightarrow BE = EF$ mà $BE = 2ED$ nên $EF = 2ED$.

$\Rightarrow D$ là trung điểm của $EF \Rightarrow CD$ là đường trung tuyến của tam giác EFC .

Tam giác EFC có hai đường trung tuyến CD và EK cắt nhau tại G nên G là trọng tâm tam giác EFC .

b) Ta có G là trọng tâm tam giác EFC

$$\Rightarrow GE = \frac{2}{3}EK; GK = \frac{1}{3}EK \Rightarrow GE = 2GK \Rightarrow \frac{GE}{GK} = 2 \text{ và } \frac{GC}{DC} = \frac{2}{3} \text{ (tính chất trọng tâm).}$$

VD 2.3.

a) Ta có $BE; CF$ là các đường trung tuyến của tam giác ABC

$$\Rightarrow CE = \frac{1}{2}AC; BF = \frac{1}{2}AB. \text{ Vì } AC = AB \text{ nên } \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB$$

hay $CE = BF$.

Xét tam giác BCE và tam giác CBF có:

BC chung

$\widehat{BCE} = \widehat{CBF}$ (do tam giác ABC cân ở A)

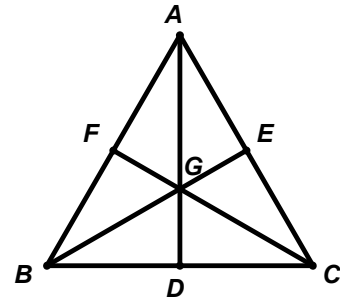
$CE = BF$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle BCE = \triangle CBF$ (c - g - c) $\Rightarrow BE = CF$ (2 cạnh tương ứng).

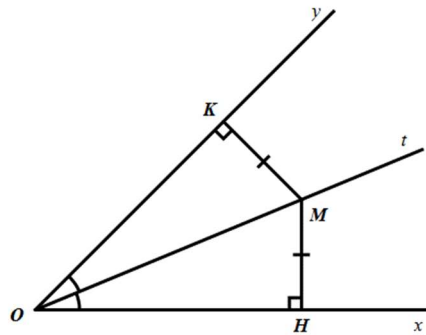
Chứng minh tương tự ta có $AD = BE$. Từ đó suy ra $AD = BE = CF$ (đpcm).

b) Ta có $AG = \frac{2}{3}AD; BG = \frac{2}{3}BE; CG = \frac{2}{3}CF$ (tính chất trọng tâm)

Vì $AD = BE = CF$ (theo cm phần a) nên $\frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$ hay $AG = BG = CG$ (đpcm).



VD 3.1.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên Ox và Oy . Từ yêu cầu của bài toán ta chứng minh $MH = MK$.

Xét $\triangle MOK$ và $\triangle MOH$, có:

$\widehat{MKO} = \widehat{MHO} = 90^\circ$ (theo cách dựng hình);

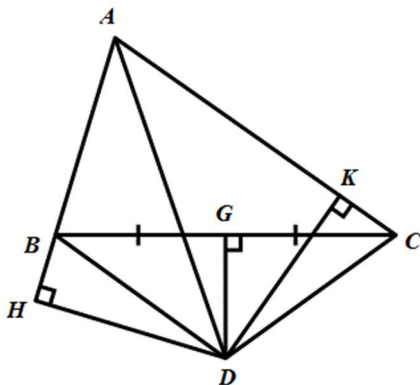
OM là cạnh chung; $\widehat{KOM} = \widehat{HOM}$ (Ot là phân giác).

Do đó: $\triangle MOK = \triangle MOH$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow MH = MK$ (hai cạnh tương ứng).

Chú ý: Ta có tính chất tia phân giác của góc: Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

VD 3. 2.



Ta có $D \in$ phân giác của \widehat{A} ; $DH \perp AB$; $DK \perp AC$
 $\Rightarrow DH = DK$ (t/c tia phân giác của một góc).

Gọi G là trung điểm của BC .

Xét $\triangle BGD$ và $\triangle CGD$, có:

$\widehat{BGD} = \widehat{CGD} = 90^\circ$ (DG là trung trực của BC);

$BG = CG$ (Theo cách vẽ); DG là cạnh chung.

Do đó: $\triangle BGD = \triangle CGD$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng).

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKD$, ta có:

$\widehat{BHD} = \widehat{CKD}$ ($DH \perp AB$; $DK \perp AC$);

$DH = CK$ (cmt); $BD = CD$ (cmt)

Do đó: $\triangle BHD = \triangle CKD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BH = CK$ (hai cạnh tương ứng) (đpcm).

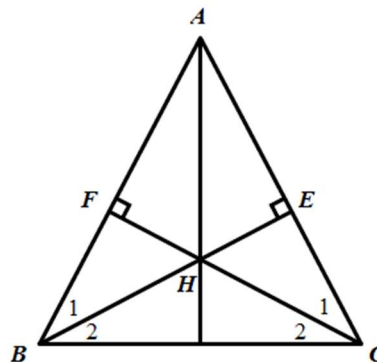
VD 4.1.

Xét $\triangle BEA$, có: $\widehat{B}_1 + \widehat{BAE} = \widehat{B}_1 + \widehat{BAC} = 90^\circ$

Tương tự $\triangle CFA$, có: $\widehat{C}_1 + \widehat{FAC} = \widehat{C}_1 + \widehat{BAC} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (cùng phụ với \widehat{BAC}). (1)

Lại có: $\widehat{B} = \widehat{C}$ ($\triangle ABC$ cân tại A). (2)



Từ (1), (2) $\widehat{B} - \widehat{B}_1 = \widehat{C} - \widehat{C}_1$ hay $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$.

$\Rightarrow \triangle BHC$ cân tại H (tính chất tam giác cân).

$\Rightarrow BH = CH$ (định nghĩa tam giác cân).

Xét $\triangle BHF$ và $\triangle CHE$, ta có:

$\widehat{HFB} = \widehat{HEC} = 90^\circ$ (BE, CF là đường cao); $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (cmt); $BH = CH$ (cmt).

Do đó $\triangle BHF = \triangle CHE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HF = HE$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy AH là phân giác của \widehat{BAC} (t/c tia phân giác của một góc).

VD 4.2.

Từ E hạ $EH \perp BC$; $EF \perp AB$; $EG \perp AC$

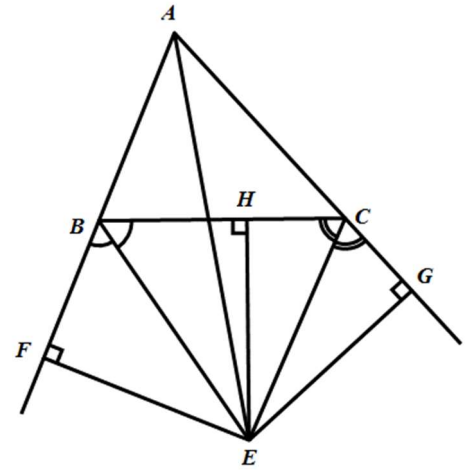
Ta có:

$EF = EH$ (E thuộc phân giác ngoài của \widehat{B})
(1)

$EH = EG$ (E thuộc phân giác ngoài của \widehat{C})
(2)

Từ (1), (2) ta có $EF = EG$

$\Rightarrow E$ thuộc tia phân giác trong của \widehat{BAC} (t/c tia phân giác của một góc).



IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

PHẦN 1.

Bài 1.

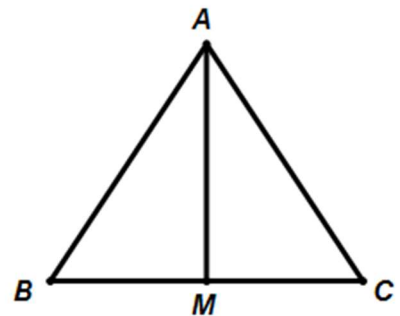
a) AM là đường trung tuyến của tam giác $ABC \Rightarrow MB = MC$.

Xét tam giác AMB và tam giác AMC có

$AB = AC$ (tam giác ABC cân ở A)

AM là cạnh chung

$MB = MC$



$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle AMC (c - c - c)$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\text{Cho nên } \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = \frac{\widehat{AMB} + \widehat{AMC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Hay $AM \perp BC$ (đpcm).

$$\text{b) Ta có } BM = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{cm}$$

Áp dụng định lý py-ta-go vào tam giác vuông AMB ,

$$\text{có } \widehat{M} = 90^\circ$$

$$\text{ta có: } AB^2 = AM^2 + MB^2 \Rightarrow AM^2 = AB^2 - MB^2$$

$$\text{Thay số } AB = 10\text{cm}, MB = 6\text{cm} \text{ ta được } AM^2 = 64$$

$$\text{Suy ra } AM = 8\text{cm}.$$

Bài 2.

Gọi D là giao điểm của AG và $BC \Rightarrow DB = DC$.

$$\text{Ta có } BG = \frac{2}{3}BE; CG = \frac{2}{3}CF \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

Vì $BE = CF$ nên $BG = CG$.

Xét tam giác GDB và GDC có:

$$GB = GC$$

GD là cạnh chung

$$DB = DC$$

$$\Rightarrow \triangle GDB = \triangle GDC (c - c - c)$$

$$\Rightarrow GB = GC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

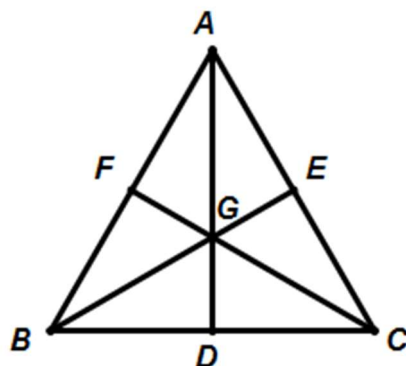
$$\text{Và } \widehat{GDB} = \widehat{GDC} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \widehat{GDB} + \widehat{GDC} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\text{Nên } \widehat{GDB} = \widehat{GDC} = \frac{\widehat{GDB} + \widehat{GDC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

hay $GD \perp BC$.

Do A, G, D thẳng hàng nên ta suy ra $AG \perp BC$ (đpcm).



Bài 3.

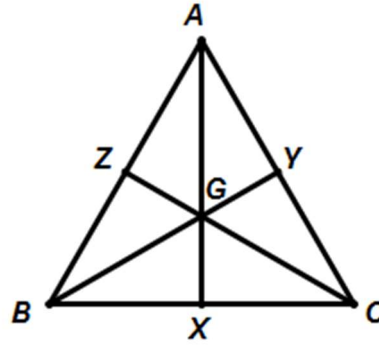
Ta có $GA = \frac{2}{3}AX; GB = \frac{2}{3}BY; GC = \frac{2}{3}CZ$ (tính chất trọng tâm)

Suy ra $GX = \frac{1}{3}AX; GY = \frac{1}{3}BY; GZ = \frac{1}{3}CZ$

Bởi vậy $GA = 2GX; GB = 2GY; GC = 2GZ$

Theo đề bài $GA = GB = GC$ nên
 $2GX = 2GY = 2GZ$

Hay $GX = GY = GZ$ (đpcm).



Bài 4.

Gọi F là giao điểm của CG và $AB \Rightarrow FA = FB$.

Ta có $AG = \frac{2}{3}AD; BG = \frac{2}{3}BE$ (tính chất trọng tâm)

Thay số $AD = 4,5cm, BE = 6cm$ ta được

$AG = 3cm; BG = 4cm$.

Áp dụng định lý py-ta-go vào tam giác vuông AGB :

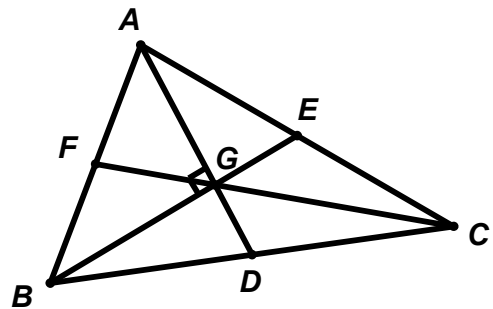
$$AB^2 = AG^2 + BG^2 \Rightarrow AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AB = 5cm.$$

Chú ý: Ta có thể mở rộng bài toán và tính được CF

Tam giác AGB vuông tại G có trung tuyến ứng với cạnh huyền AB là

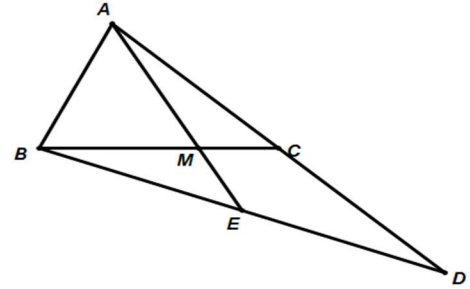
$$GF \Rightarrow GF = FA = FB = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}cm$$

Mà $GF = \frac{1}{3}CF \Rightarrow CF = 3GF = 7,5cm$.



Bài 5.

Xét $\triangle ABD$ có $AC = CD \Rightarrow BC$ là trung tuyến của tam giác

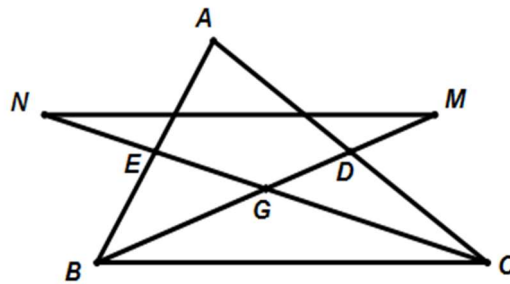


$$\text{Mà } BM = 2MC \Rightarrow BM = \frac{2}{3}BC$$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABD

$\Rightarrow AM$ đi qua trung điểm của BD .

Bài 6.



a) Ta có $DM = DG \Rightarrow D$ là trung điểm của $GM \Rightarrow GM = 2GD$

Ta lại có $G = BD \cap CE \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC .

$\Rightarrow BG = 2GD$. Suy ra $BG = GM$. Chứng minh tương tự ta được: $CG = GN$.

b) Xét tam giác GMN và tam giác GBC có

$$GM = GB \text{ (cmt)}$$

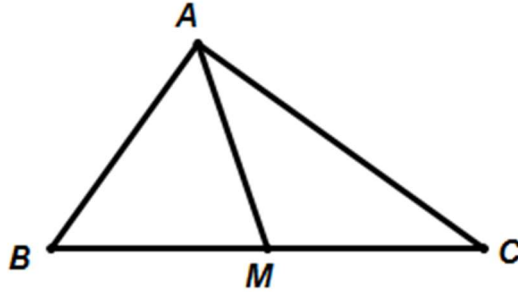
$$\widehat{MGN} = \widehat{BGC} \text{ (2 góc đối đỉnh)}$$

$$GN = GC \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle GMN = \triangle GBC \text{ (c - g - c)} \Rightarrow MN = BC \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

c) Theo phần b) ta có $\triangle GMN = \triangle GBC \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \widehat{NMG} = \widehat{CBG}$ mà \widehat{NMG} và \widehat{CBG} ở vị trí so le trong. Do đó ta suy ra $MN \parallel BC$.

Bài 7.



Xét $\triangle ABC$ có trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AM = MB = MC \left(= \frac{1}{2}BC \right)$

Khi đó tam giác AMB cân tại M và tam giác AMC cân tại M .

Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MBA}$ và $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$

Do đó ta có: $\widehat{MBA} + \widehat{MCA} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC}$ hay $\widehat{CBA} + \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$

Xét tam giác ABC có: $\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{BCA} = 180^\circ$

Mà $\widehat{CBA} + \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$ nên $2\widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

Vậy tam giác ABC vuông ở A .

Bài 8.

Xét tam giác GBC ta có

$GB + GC > BC$ (BĐT trong tam giác)

hay $\frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}CF > BC$

Suy ra $BE + CF > \frac{3}{2}BC$ (1)

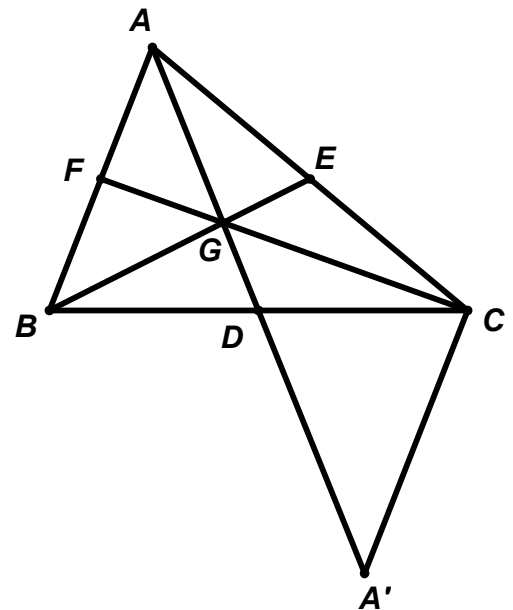
Chứng minh tương tự ta được:

$AD + BE > \frac{3}{2}AB$ (2)

$AD + CF > \frac{3}{2}AC$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được:

$2(AD + BE + CF) > \frac{3}{2}(AB + BC + CA)$



$$\Rightarrow AD + BE + CF > \frac{3}{4}(AB + BC + AC) (*)$$

Bây giờ ta cần chứng minh $AD + BE + CF < AB + BC + CA$

Trên tia AD lấy điểm A' sao cho $DA' = DA$.

Xét tam giác $AA'C$, ta có: $AA' < AC + A'C$ (BĐT trong tam giác).

Để dàng chứng minh được tam giác ADB và tam giác $A'DC$ bằng nhau (c-g-c) suy ra $AB = A'C$

Từ đó ta có: $AA' < AC + AB$ hay $2AD < AB + AC$ hay $AD < \frac{AB + AC}{2}$

Chứng minh tương tự ta được: $BE < \frac{AB + BC}{2}$ và $CF < \frac{CA + BC}{2}$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại vế theo vế suy ra $AD + BE + CF < AB + BC + CA (**)$

Từ (*) và (**) suy ra đpcm.

PHẦN 2.

Bài 1.

Kẻ $IE \perp AD$. Gọi Ax là tia đối của tia AB

.

$$\widehat{BAC} = 120^\circ \text{ nên } \widehat{CAx} = 60^\circ (1)$$

Ta có: AD là phân giác \widehat{BAC} (gt)

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = 60^\circ (2)$$

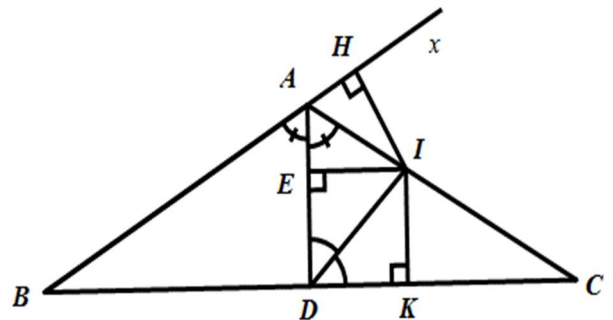
Từ (1), (2) suy ra AC là tia phân giác của \widehat{DAx}

nên $IH = IE$ (t/c tia phân giác của một góc). (3)

Mà: DI là phân giác của \widehat{ADC} nên $IK = IE$

(t/c tia phân giác của một góc). (4)

Từ (3), (4) suy ra $IH = IK$ (đpcm).



Bài 2.

a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \text{ (định lí Pytago)}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{45} \text{ cm.}$$

b) Vì E là trung điểm AC nên

$$AE = \frac{1}{2}AC = 3 \text{ cm.} \Rightarrow AE = AB$$

Xét $\triangle BAD$ và $\triangle EAD$, có:

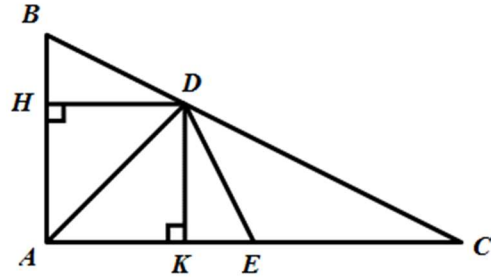
$$\widehat{BAD} = \widehat{EAD} \text{ (AD là phân giác);}$$

$$AD \text{ cạnh chung; } AB = AE \text{ (cmt).}$$

$$\Rightarrow \triangle BAD = \triangle EAD \text{ (c.g.c)}$$

c) Vì D nằm trên tia phân giác của \widehat{BAC} nên $DH = DK$ (t/c tia phân giác của một góc).

Vậy điểm D cách đều AB và AC .



Bài 3.

a) Xét $\triangle IOE$ và $\triangle IOF$ có:

$$\widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ; OI \text{ cạnh chung;}$$

$$\widehat{EOI} = \widehat{FOI} \text{ (giả thiết).}$$

Vậy $\triangle IOE = \triangle IOF$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) Vì $\triangle IOE = \triangle IOF$ (cmt) $\Rightarrow OE = OF$ (hai cạnh tương ứng).

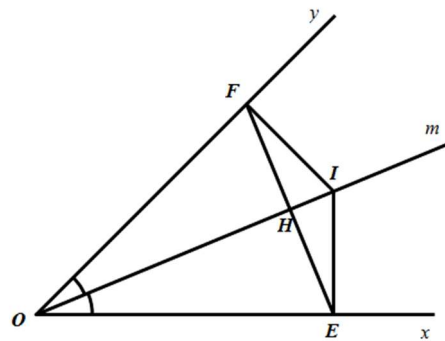
Gọi H là giao điểm của Om và EF .

Xét $\triangle OHE$ và $\triangle OHF$, có: $OE = OF$ (cmt); $\widehat{EOH} = \widehat{FOH}$ (giả thiết); OH chung.

Do đó $\triangle OHE = \triangle OHF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OHE} = \widehat{FHO}$.

Mà $\widehat{OHE} + \widehat{FHO} = 180^\circ$ do đó $\widehat{OHE} = \widehat{FHO} = 90^\circ$.

Vậy $EF \perp Om$.



Bài 4.

Từ K kẻ $KE \perp AB; KF \perp AC;$
 $KH \perp BC$.

Do K thuộc tia phân giác của
góc B (giả thiết)

Nên $KE = KH$ (t/c tia phân giác
của một góc). (1)

Lại có K thuộc tia phân giác
của \widehat{ACD} (giả thiết)

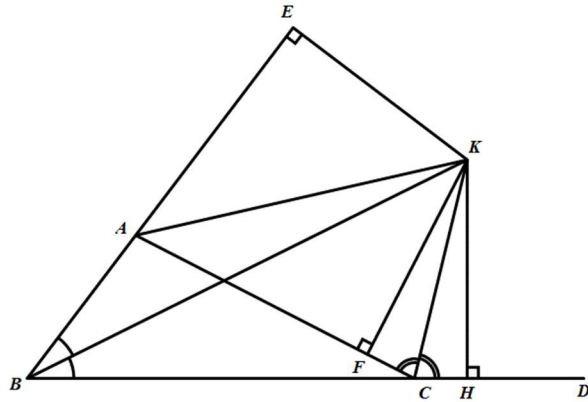
Nên $KF = KH$ (t/c tia phân giác
của một góc). (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow KE = KF$.

$\Rightarrow K$ thuộc tia phân giác của
 \widehat{CAE} (t/c tia phân giác của một
góc).

$$\Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{KAE} = \frac{\widehat{CAE}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

Vậy $\widehat{BAK} = 140^\circ$.



Bài 5.

a) Ta có: $AB \perp AC$ ($\triangle ABC$
vuông tại A)

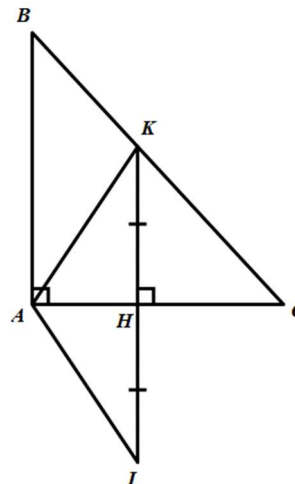
$KH \perp AC$ (giả thiết)

$\Rightarrow AB \parallel KH$ (từ vuông góc đến
song song)

b) Xét $\triangle AHK$ và $\triangle AHI$, có:

$\widehat{AHK} = \widehat{AHI} = 90^\circ$ ($KH \perp AC$ tại
 H);

$HK = HI$ (giả thiết); AH cạnh
chung



Do đó: $\triangle AHK = \triangle AHI$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{KAH} = \widehat{IAH}$ (2 góc tương ứng)

c) Ta có: $\triangle AKI$ có AH vừa là đường trung tuyến, vừa là đường phân giác nên $\triangle AKI$ cân tại A .

Bài 6.

a) Xét $\triangle OAD$ và $\triangle OCB$, ta có:

$OA = OC$ (giả thiết); \widehat{O} chung;

$OD = OB$ (giả thiết).

$\Rightarrow \triangle OAD = \triangle OCB$ (c.g.)

$\Rightarrow AD = CB$ (hai cạnh tương ứng).

b) Do $OA = OC$ (gt)

$OB = OD$ (gt)

$\Rightarrow AB = CD$.

Lại có $\triangle OAD = \triangle OCB$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{ODA}$;

$\widehat{ABE} + \widehat{OBC} = \widehat{CDE} + \widehat{ODA} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CDE}$.

Và cũng có $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$.

Vậy $\triangle ABE = \triangle CDE$ (g.c.g)

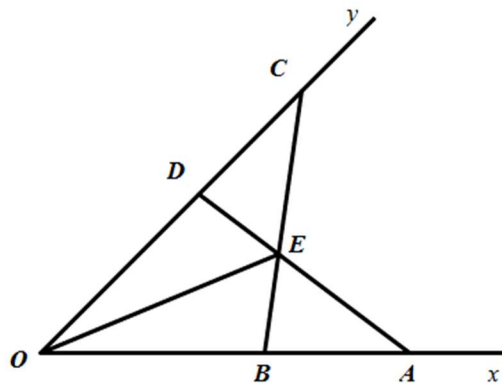
c) Vì $\triangle ABE = \triangle CDE$ (cmt) $\Rightarrow AE = CE$ (hai cạnh tương ứng)

Xét $\triangle AEO$ và $\triangle CEO$, có:

$AE = CE$ (cmt); OE cạnh chung;

$OA = OC$ (gt)

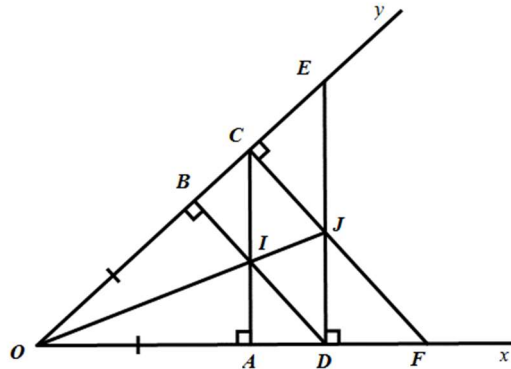
$\Rightarrow \triangle AEO = \triangle CEO$ (c.c.c)



$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{COE}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow OE$ là tia phân giác của \widehat{xOy} .

Bài 7.



a) Xét $\triangle OAI$ và $\triangle OBI$, có:

$\widehat{OAI} = \widehat{OBI} = 90^\circ$ (Vì $BD \perp Oy$; $AC \perp Ox$); OI cạnh chung;

$OA = OB$ (giả thiết).

$\Rightarrow \triangle OAI = \triangle OBI$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{IOA} = \widehat{IOB}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow OI$ là phân giác \widehat{xOy} .

b) Xét $\triangle AOC$ và $\triangle BOD$, có:

$\widehat{OAC} = \widehat{OBD} = 90^\circ$ (Vì $BD \perp Oy$; $AC \perp Ox$); $OA = OB$ (giả thiết);

\widehat{O} chung

$\triangle AOC = \triangle BOD$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề)

$\Rightarrow OC = OD$ (hai cạnh tương ứng)

Chứng minh tương tự ta có: $\triangle DOJ = \triangle COJ$

$\Rightarrow \widehat{JOD} = \widehat{JOC} \Rightarrow OJ$ phân giác \widehat{xOy} .

c) Vì OI , OJ cùng là phân giác của \widehat{xOy} nên ba điểm O, I, J thẳng hàng.

Bài 8.

Kéo dài AC lấy đi

Xét $\triangle ACE$ và $\triangle MCB$

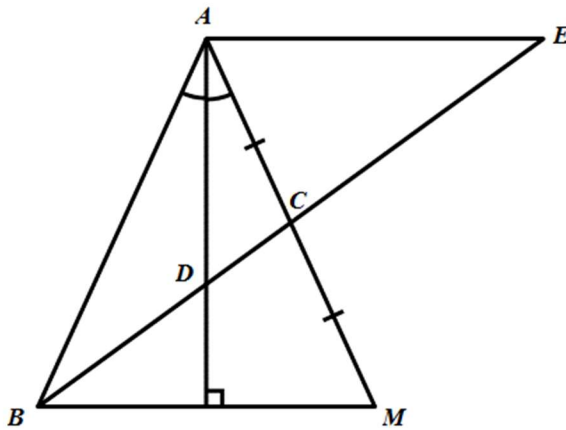
$CE = CB$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle ACE = \triangle MCB$ (

Trong tam giác AI

$\Rightarrow D$ là trọng tâm

Đường thẳng AD



ich vẽ).

là phân giác nên $\triangle ABM$ cân tại A

Do đó $AD \perp BM$.

Ta lại có $\widehat{AEC} = \widehat{MBC}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AE \parallel BM \Rightarrow AD \perp AE$.

Vậy tam giác ADE vuông.

Bài 9.

Theo giả thiết ta có CP và BP là các tia phân giác của các góc ngoài ở đỉnh C và B của $\triangle MBC$.

$\Rightarrow MP$ là tia phân giác của \widehat{BMC} .

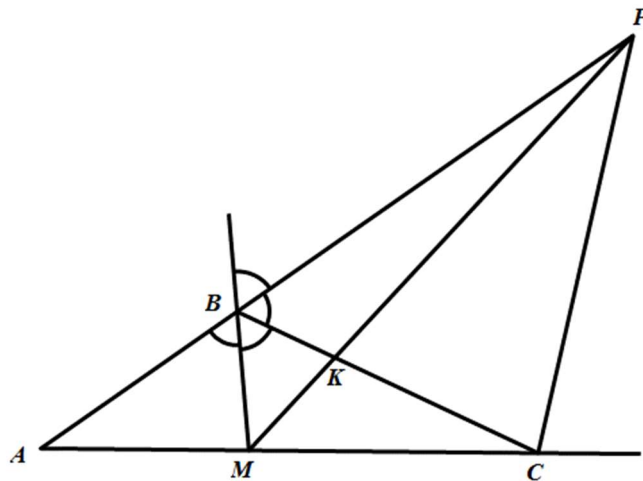
Lại có BK và MK là các tia phân giác của các góc ngoài ở đỉnh B và M của $\triangle AMB$.

$\Rightarrow AK$ là tia phân giác của \widehat{BAC} .

Như vậy

$$\widehat{AKM} = \widehat{KMC} - \widehat{KAM} = \frac{1}{2}(\widehat{BMC} - \widehat{BAM})$$

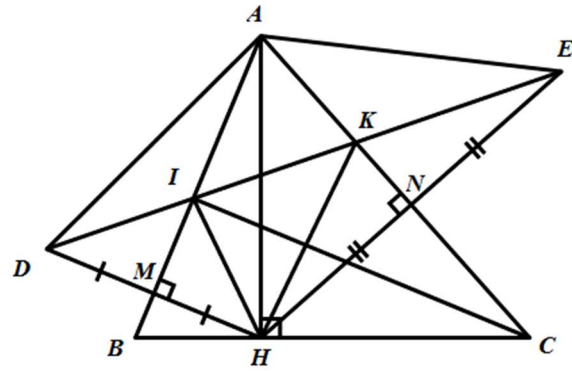
$$= \frac{1}{2}\widehat{ABM} = \frac{1}{2}60^\circ = 30^\circ$$

**Bài 10.**

a) xét $\triangle DMI$ và $\triangle HMI$, có:

$\widehat{DMI} = \widehat{HMI}$ ($HM \perp AB$); MI cạnh chung; $MD = MH$ (giả thiết).

Nên suy ra: $\triangle DMI = \triangle HMI$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow BI$ là tia phân giác của \widehat{HID} ;



b) Chứng minh tương tự phần a) ta có:

$\triangle DAM = \triangle HAM$ (hai cạnh góc vuông); $\triangle ANH = \triangle ANE$ (hai cạnh góc vuông).

$\Rightarrow AD = AH = AE$.

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A Do đó $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$ (1)

Xét $\triangle DAI$ và $\triangle HAI$, ta có:

AI cạnh chung; $AD = AH$ (cmt);

$DI = HI$ ($\triangle DMI = \triangle HMI$).

$\Rightarrow \triangle DAI = \triangle HAI$ (c - c - c) $\Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{AHI}$ (2)

Chứng minh tương tự ta có:

$\triangle EKA = \triangle HKA$ (c - c - c) $\Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{AHK}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: HA là tia phân giác của \widehat{IHK} ;

c) Vì HA là tia phân giác của \widehat{IHK} (cmt). Có $AH \perp HC \Rightarrow HC$ là phân giác ngoài của \widehat{IHK} .

Mà KC là phân giác ngoài của \widehat{IKH} . Suy ra IC là tia phân giác của góc \widehat{HIK} .

d) BI là tia phân giác của góc \widehat{HID} (cmt)

IC là tia phân giác của góc \widehat{HIK} (cmt)

Do đó $IB \perp IC$.

BÀI 35. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC,

BA ĐƯỜNG CAO TRONG MỘT TAM GIÁC

VD 1.1. Xét $\triangle ABC$ vuông tại $A, \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$

Gọi D là giao điểm của các đường trung trực cạnh AB và AC .

Ta có: $EA = EC$ và $DE \perp AC \Rightarrow \triangle DAC$ cân tại D

$$\Rightarrow \widehat{D}_3 = \widehat{D}_4 = 90^\circ - \widehat{C} \text{ và } AD = DC$$

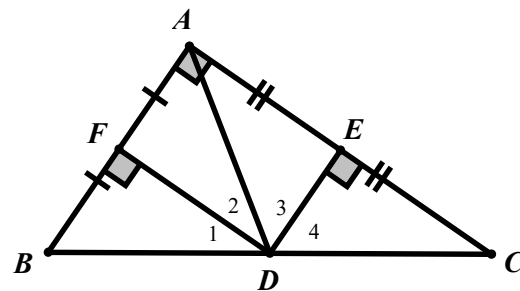
Có $FA = FC$ và $FD \perp AB \Rightarrow \triangle DAB$ cân tại D

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 90^\circ - \widehat{B} \text{ và } AD = BD$$

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 + \widehat{D}_3 + \widehat{D}_4 = 2(90^\circ - \widehat{B}) + 2(90^\circ - \widehat{C}) = 2(180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}) = 2(180 - 90^\circ) = 180^\circ$$

$\Rightarrow B, D, C$ thẳng hàng $\Rightarrow D$ nằm trên BC .

Mà $BD = AD$ và $AD = DC \Rightarrow BD = DC \Rightarrow D$ là trung điểm của $BC \Rightarrow D$ nằm trên đường trung trực của cạnh BC . (đpcm)

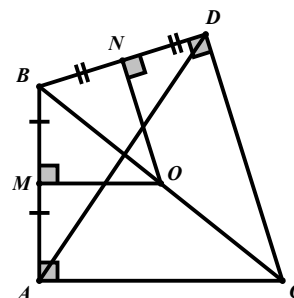


VD 1.2. Gọi O là trung điểm của BC

Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Theo chứng minh ở ví dụ 1 thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow OA = OB = OC$. (1)

Xét $\triangle DBC$ có $\widehat{BDC} = 90^\circ \Rightarrow OB = OC = OD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA = OB = OD \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$



VD 2.1. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow OA = OB = OC$

Vì $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AB = AC = BC$

Xét $\triangle OAD$ và $\triangle OCE$

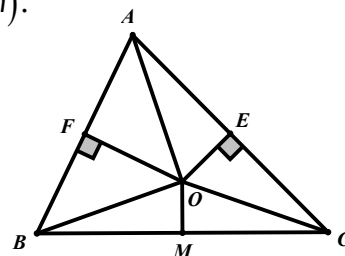
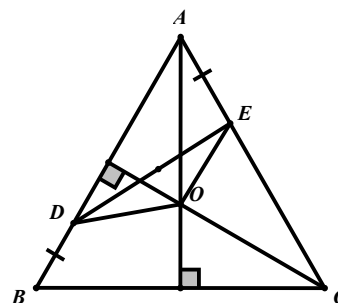
Có $OA = OC; \widehat{OAD} = \widehat{OCE} = 30^\circ,$

$$\begin{cases} CE = AC - AE \\ AD = AB - BD \end{cases} \Rightarrow CE = AD$$

(do $AB = AC, AE = BD$ theo gt)

$\Rightarrow \triangle OAD = \triangle OCE \Rightarrow OD = OE \Rightarrow \triangle ODE$ cân

Vậy: đường trung trực của đoạn DE luôn đi qua điểm cố định O (đpcm).



VD 2.2.

Vi OF là trung trực $\Rightarrow OA = OB$ (1)

Vi OE là trung trực $\Rightarrow OA = OC$ (2)

$\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O mà M là trung điểm

$BC, OM \perp BC \Rightarrow \widehat{OMB} = 90^\circ$

VD 2.3.

a) Xét ΔDAB có DH là trung trực $\Rightarrow \Delta DAB$ cân tại D

$\Rightarrow AD = BD$ và $\widehat{BAD} = \widehat{ABD}$

Mà ΔABC cân tại A có $\hat{A} = 50^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{BAD} - \widehat{BAC} = 65^\circ - 50^\circ = 15^\circ$$

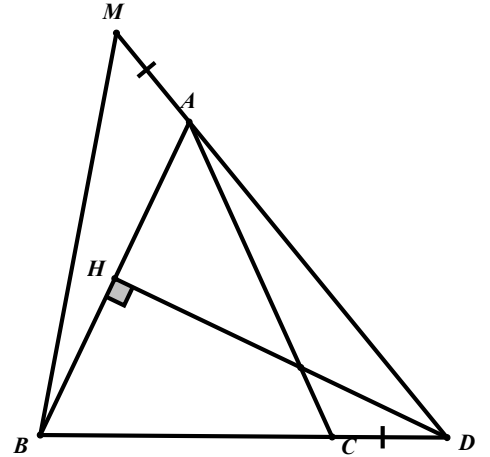
b) Xét ΔBAM và ΔACD có: $AB = AC$ (do ΔABC cân tại A);

$$\widehat{BAM} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \quad (1)$$

$$\widehat{DCA} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BAM} = \widehat{ACD}$; $MA = CD$ (gt) $\Rightarrow \Delta BAM = \Delta ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow BM = AD$.

Mặt khác theo chứng minh trên $AD = BD \Rightarrow BD = BM \Rightarrow \Delta BMD$ cân tại B (đpcm).



VD 2.4. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ADE \Rightarrow OA = OD = OE$.

Xét ΔOBA và ΔOBD có: $AB = BD, OA = OD, OB$ chung

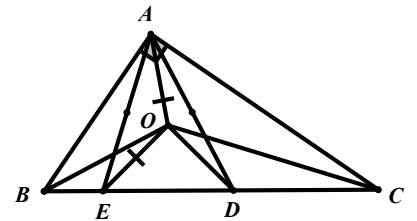
$\Rightarrow \Delta OAB = \Delta ODB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OBD} \Rightarrow OB$ là phân giác của góc \widehat{ABC} (1)

Tương tự ta có $\Delta OAC = \Delta OEC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OCE} \Rightarrow OC$ là phân giác của \widehat{ACB} (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O$ là giao của 3 đường phân giác của ΔABC (đpcm).



Dạng 3. Chứng minh ba đường trung trực đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Phương pháp giải: Sử dụng tính chất:

Ba đường trung trực trong tam giác cắt nhau tại 1 điểm.

VD 3.1. Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MAC$ có:

$$AB = AC \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A \text{);}$$

$$BM = MC \text{ (vì } M \text{ là trung điểm } BC \text{)}$$

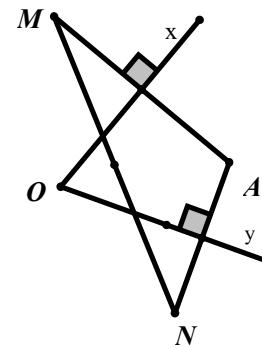
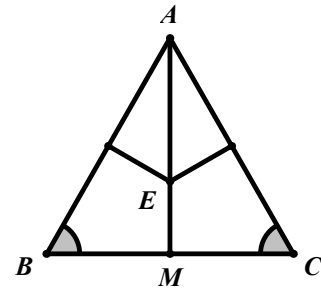
AM chung.

$$\Rightarrow \triangle MAB = \triangle MAC \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow AM$ là trung trực ứng với cạnh BC của $\triangle ABC$
 giao điểm E của các đường trung trực phải thuộc AM

Hay A, E, M thẳng hàng (đpcm).



VD 3.2.

a) Xét $\triangle AMN$ có Ox là trung trực của AM (gt); Oy là trung trực của AN

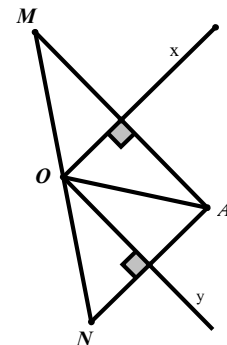
\Rightarrow Trung trực của MN luôn đi qua O cố định khi A di động
 (vì 3 đường trung trực trong tam giác luôn đồng quy tại 1 điểm).

b) Vì O thuộc $MN \Rightarrow O, M, N$ thẳng hàng

$$\Rightarrow \widehat{xOM} + \widehat{xOA} + \widehat{yOA} + \widehat{yON} = 180^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} \widehat{xOM} = \widehat{xOA} \\ \widehat{yON} = \widehat{yOA} \end{cases}$$

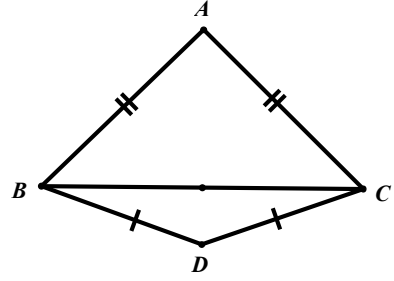
$$\Rightarrow 2(\widehat{xOA} + \widehat{yOA}) = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{xOy} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{xOy} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$



VD 3.3. Gọi I là trung điểm của BC , vì $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AI \perp BC \Rightarrow AI$ là trung trực của BC .

Vì $\triangle DBC$ cân tại $D \Rightarrow DI \perp BC \Rightarrow DI$ là trung trực của BC
 $\Rightarrow A, D, I$ thẳng hàng hay AD là trung trực của BC .

Xét $\triangle ABC$, gọi O là giao điểm đường của trung trực cạnh AB và đường trung trực cạnh $AC \Rightarrow O$ cũng thuộc trung trực của cạnh $BC \Rightarrow O$ thuộc $AD \Rightarrow$ Các đường trung trực của AB và AC đồng quy với AD tại O (đpcm).



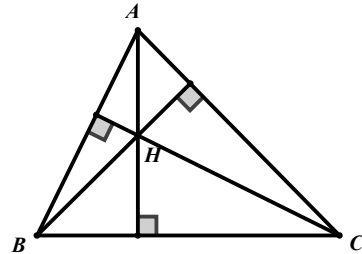
VD 4.1. Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$,

suy ra: $AH \perp BC, BH \perp AC, CH \perp AB$

Xét $\triangle HAB$ ta có: $BC \perp AH$ và $AC \perp BH$

$\Rightarrow C = BC \cap AC \Rightarrow C$ là trực tâm $\triangle HAB$.

Tương tự ta có B là trực tâm $\triangle HAC$ và A là trực tâm $\triangle HBC$.



VD 4.2. Vì $AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$ cân tại A , mà AD là phân giác góc A của $\triangle ABC \Rightarrow AI$ là đường cao của $\triangle ABE, BF \perp AE \Rightarrow BF$ là đường cao của $\triangle ABE$

Vì $H = BF \cap AI \Rightarrow H$ là trực tâm $\triangle ABE$.

Xét $\triangle HEF$ có $\widehat{FHE} = 90^\circ - \widehat{FEH}$ (1)

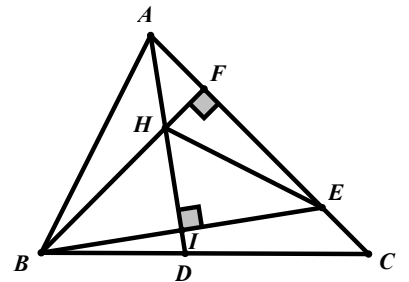
Xét $\triangle HIE$ có $\widehat{EHI} = 90^\circ - \widehat{IEH}$ (2)

Từ (1) và (2) :

$$\Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{FHE} + \widehat{EHI} = (90^\circ - \widehat{FEH}) + (90^\circ - \widehat{IEH}) = 180^\circ - \widehat{FEI}$$

$$\text{Vì } \triangle ABE \text{ cân tại } E \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ABE} = \frac{180^\circ - \widehat{BAE}}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HDF} = 180^\circ - \widehat{FEI} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$



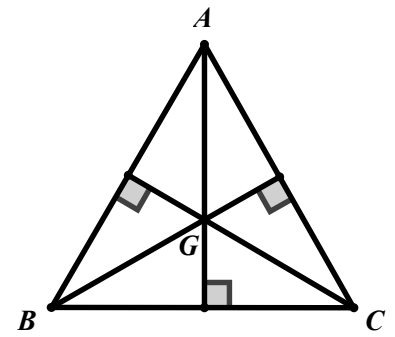
VD 4.3. Vì ΔABC đều, G là trọng tâm $\Rightarrow G$ cũng là trực tâm

$\Rightarrow AG \perp BC; BG \perp AC; CG \perp AB$

Xét ΔGAB có: $BC \perp AG; AC \perp BG$ mà $C = AC \cap BC$

$\Rightarrow C$ là giao của 3 đường cao trong $\Delta ABG \Rightarrow C$ là trực tâm ΔGAB

Tương tự B là trực tâm $\Delta GAC; A$ là trực tâm ΔGBC .



VD 5.1. Gọi E là giao điểm của AB và CD kéo dài. Xét ΔEBC có:

$$\widehat{BEC} = 180^\circ - (\widehat{EBC} + \widehat{ECB}) \quad (1)$$

Mặt khác trong ΔHAB có:

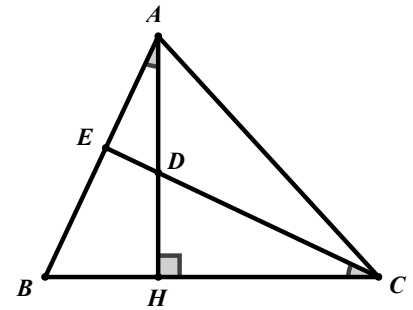
$$\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ \quad (\text{do } AH \perp BC)$$

Mà $\widehat{HAB} = \widehat{HCD}$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow EC \perp AB$$

Xét ΔABC có $EC \perp AB$ và $AH \perp BC \Rightarrow D = CE \cap AH$ là trực tâm của ΔABC

$\Rightarrow BD$ thuộc đường cao hạ từ B của $\Delta ABC \Rightarrow BD \perp AC$ (đpcm).



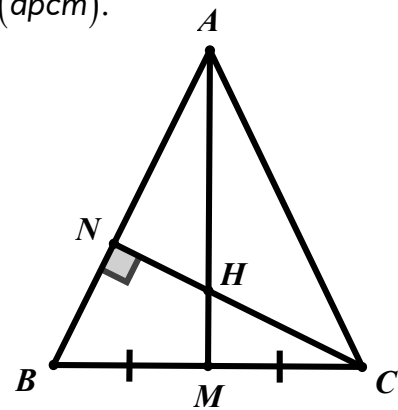
VD 5.2. Vì ΔABC cân tại A , mà M là trung điểm của

$BC \Rightarrow AM$ vừa là trung tuyến, vừa là đường cao

$\Rightarrow AM \perp BC$. Mà $CN \perp AB$ (gt)

$H = AM \cap CN \Rightarrow H$ là trực tâm ΔABC

$\Rightarrow BH$ thuộc đường cao $\Delta ABC \Rightarrow BH \perp AC$ (đpcm).



VD 5.3. Trên tia đối của tia NM ta lấy M' sao cho $NM = NM'$

Xét ΔNMH và $\Delta NM'C$ có :

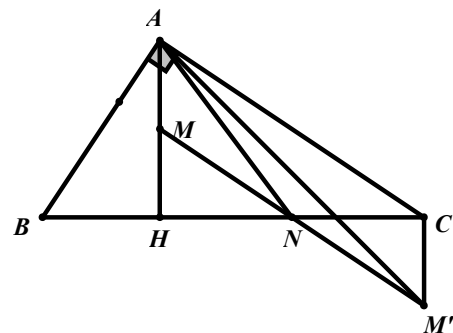
$MN = NM', \widehat{MNH} = \widehat{M'NC}$ (hai góc đối đỉnh),

$HN = NC$ (do N là trung điểm HC)

$\Rightarrow \Delta NMH$ và $\Delta NM'C$ (c.g.c) $\Rightarrow CM' = HM$

và $\widehat{HMN} = \widehat{CM'N} \Rightarrow HM \parallel CM'$

Xét $\Delta AMM'$ và $\Delta M'CA$ có:



$AM = HM = CM' \quad (1), \widehat{MAM'} = \widehat{CM'A} \quad (\text{vì } AM // CM'); AM' \text{ chung}$

$\Rightarrow \Delta AMM' = \Delta M'CA \quad (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{MM'A} = \widehat{CAM'} \Rightarrow MN // AC$

Mà $AC \perp AB \Rightarrow MN \perp AB$

Xét ΔABN có $AH \perp BN$ và $MN \perp AB \Rightarrow M$ là giao của hai đường cao M là trực tâm $\Delta ABN \Rightarrow BM$ thuộc đường cao hạ từ B

$\Rightarrow BM \perp AN \quad (\text{đpcm}).$

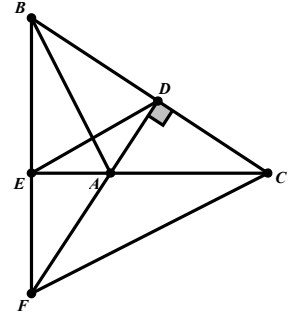
VD 5.4. Xét ΔFBC có: $AD \perp BC \Rightarrow FD \perp BC \quad (1)$

Có $BE \perp AC \Rightarrow CE \perp BF \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CE$ và FD là các đường cao của ΔFBC

Mà $A = FD \cap CE \Rightarrow A$ là trực tâm ΔFBC

$\Rightarrow AB$ thuộc đường cao $\Delta FBC \Rightarrow AB \perp FC \quad (\text{đpcm}).$

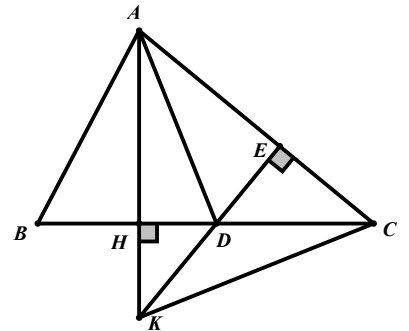


VD 5.5. Xét ΔAKC ta có $AH \perp BC \quad (\text{gt}) \Rightarrow CH \perp AK \quad (1)$

Có $DE \perp AC \quad (\text{gt}) \Rightarrow KE \perp AC \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KC$ và CH là hai đường cao của ΔAKC

Mà $D = KE \cap CH \Rightarrow D$ là trực tâm $\Delta AKC \Rightarrow AD$ thuộc đường cao hạ từ A của $\Delta AKC \Rightarrow AD \perp KC \quad (\text{đpcm}).$



VD 5.6. Vì I là trung điểm của EC , O là trung điểm của $HE \Rightarrow$ theo cách chứng minh tương tự như ví dụ 3 ở trên $\Rightarrow IO // HC$

Mà $AH \perp BC \Rightarrow OI \perp AH$

Xét ΔAHI có $IO \perp AH \quad (\text{c.m.t}), HE \perp AC \quad (\text{gt}) \Rightarrow HE$ và

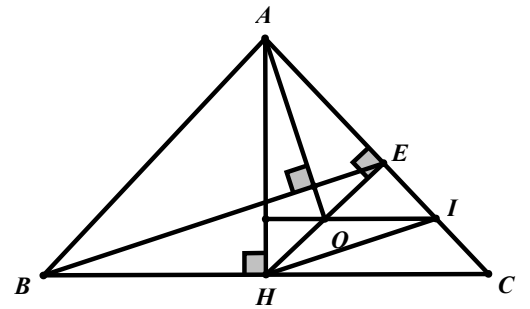
IO thuộc các đường cao của ΔAHI .

Mà $O = HE \cap IO \Rightarrow O$ là trực tâm $\Delta AHI \Rightarrow AO \perp HI$.

Mặt khác xét ΔCBE có I là trung điểm của EC , H là trung điểm BC (do ΔABC cân tại A) $\Rightarrow HI // BE$

(tương tự ví dụ 3)

Mà $AO \perp HI \Rightarrow AO \perp BE \quad (\text{đpcm}).$



VD 6.1. Trên tia đối của tia AH lấy G sao cho GA = BC. Xét $\triangle AGC$ và $\triangle CBE$ ta có:

$$AG = CB;$$

$$\widehat{GAC} = 180^\circ - \widehat{HAC} = 180^\circ - (90^\circ - \widehat{HCA}) = 90^\circ + \widehat{HCA}$$

$$\widehat{BCE} = \widehat{ACE} + \widehat{ACB} = 90^\circ + \widehat{ACH} \Rightarrow \widehat{GAC} = \widehat{BCE}$$

$$AC = CE \text{ (do } \triangle ACE \text{ vuông cân tại } C)$$

$$\Rightarrow \triangle AGC = \triangle CBE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ACG} = \widehat{CEB}$$

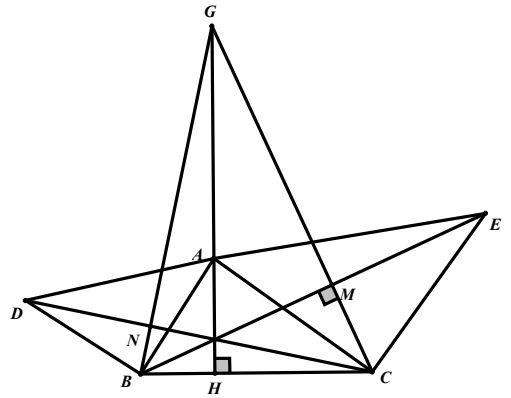
Gọi M là giao điểm của GC và BE.

Xét $\triangle MEC$ có:

$$\widehat{MEC} + \widehat{ECM} = \widehat{ECM} + \widehat{MCA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow BM \perp GC$$

Hoàn toàn tương tự nếu gọi N là Giao điểm của BG và CD ta có $CN \perp GB$. Xét $\triangle GBC$ có $GH \perp BC$, $CN \perp BG$, $BM \perp GC \Rightarrow CN, BM, GH$ là 3 đường cao của $\triangle GBC \Rightarrow CN, BM$ và GH cùng đi qua trực tâm $\triangle GBC$ hay AH, BE và CD cùng đi qua 1 điểm chính là trọng tâm $\triangle GBC$ (đpcm).



VD 6.2. Gọi D là giao điểm của các đường thẳng AB và CP.

Xét $\triangle DBC$ ta có: $AB \perp AC \Rightarrow AC \perp BD$ (1)

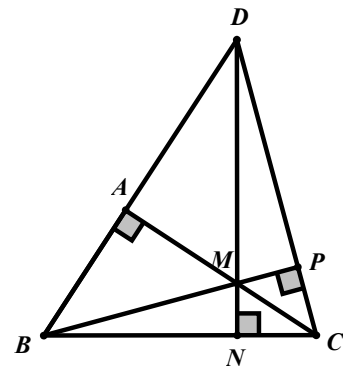
$$CP \perp BP \Rightarrow BP \perp DC$$
 (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CA$ và BP là các đường cao của $\triangle DBC$.

Mà $M = BP \cap CA \Rightarrow M$ là trực tâm $\triangle DBC \Rightarrow DM \perp BC$.

Mặt khác $MN \perp BC \Rightarrow M, N, D$ thẳng hàng

$$\Rightarrow AB, MN \text{ và } CP \text{ cùng đi qua điểm } D \text{ (đpcm).}$$



VD 7.1. Xét $\triangle BAF$ và $\triangle ABC$ ta có :

$$\widehat{FAB} = \widehat{ABC} \text{ (hai góc so le trong)}$$

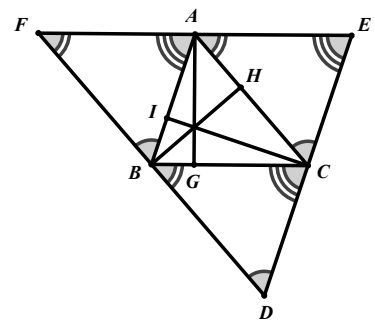
chung;

$$\widehat{ABF} = \widehat{BAC} \text{ (hai góc so le trong)}$$

$$\Rightarrow \triangle BAF = \triangle ABC \text{ (g.c.g)} \Rightarrow FA = BC \text{ (1)}$$

Xét $\triangle CAE$ và $\triangle ABC$ có :

$$\widehat{EAC} = \widehat{ACB} \text{ (hai góc so le trong)}$$



chung;

$$\widehat{ACE} = \widehat{CAB} \text{ (hai góc so le trong)}$$

$$\Rightarrow \triangle CAE = \triangle ABC \Rightarrow AE = BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AF = AE$.

Tương tự ta chứng minh được $BF = BD$ và $CD = CE$

Xét AG là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow AG \perp BC$,

$BC \parallel FE \Rightarrow AG \perp FE$

A là trung điểm $FE \Rightarrow AG$ là trung trực của FE .

Tương tự BH là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow BH$ là trung trực của DF

CI là đường cao $\triangle ABC \Rightarrow CI$ là trung trực của DE , các đường cao của $\triangle ABC$ là các đường trung trực của $\triangle DEF$.

VD 7.2. Xét $\triangle BAP$ và $\triangle CQA$ có: $BA = CQ$ (gt);

$$\widehat{PBA} = 180^\circ - \widehat{ABM} \text{ và } \widehat{ACQ} = 180^\circ - \widehat{ACN}$$

Mặt khác $\widehat{ACN} + \widehat{BAC} = 90^\circ$ và

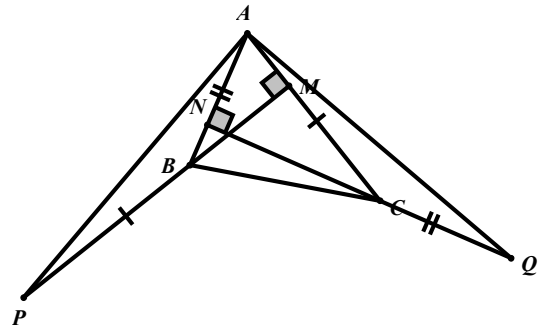
$$\widehat{ABM} + \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{PBA} = \widehat{ACQ}$$

$$BP = AC \text{ (gt)} \Rightarrow \triangle BAP = \triangle CQA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AP = AQ \text{ và } \widehat{CAQ} = \widehat{BPA}$$

Xét $\triangle APQ$ có: $\widehat{PAQ} = \widehat{PAC} + \widehat{CAQ} = \widehat{PAC} + \widehat{BPA} = \widehat{PAM} + \widehat{MAP} = 90^\circ$

và $AP = AQ$ (c.m.t) $\Rightarrow \triangle APQ$ vuông cân tại A (đpcm).



VD 7.3. Xét $\triangle IBH$ và $\triangle ICK$ có $IB = IC$ (gt);

$$\widehat{HIB} = \widehat{KIC} \text{ (hai góc đối đỉnh); } IH = IK \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle IBH = \triangle ICK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BH = CK$$

$$\text{và } \widehat{ICK} = \widehat{IBH} = \widehat{IBA} + \widehat{ABH} = \widehat{CBA} + 30^\circ$$

Mà H là trực tâm $\triangle ABE$ đều

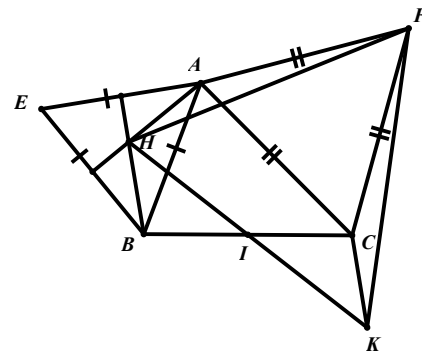
$$\Rightarrow BH = AH \Rightarrow CK = AH$$

Xét $\triangle AHF$ và $\triangle CKF$ có: $AF = CF$ (vì $\triangle ACF$ đều)

$$\widehat{HAF} = \widehat{HAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = 30^\circ + \widehat{BAC} + 60^\circ = 90^\circ + \widehat{BAC} \quad (1)$$

$$\widehat{KCF} = 360^\circ - \widehat{KCI} - \widehat{BCA} - \widehat{ACF} = 360^\circ - (\widehat{CBA} + 30^\circ) - \widehat{BCA} - 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{KCF} = 270^\circ - (\widehat{CBA} + \widehat{BCA}) = 270^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ + \widehat{BAC} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{HAF} = \widehat{KCF}$

Ngoài ra có : $AH = CK$ (c.m.t) $\Rightarrow \Delta AHF = \Delta CKF$ (c.g.c) \Rightarrow (đpcm).

$\Rightarrow \widehat{AFH} = \widehat{CFK}$ và $HF = KF$

Xét ΔKHF có $HF = KF \Rightarrow \Delta KHF$ cân tại F

Mặt khác $\widehat{HFK} = \widehat{HFC} + \widehat{CFK} = \widehat{HFC} + \widehat{AFH} = \widehat{AFC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta KHF$ đều (đpcm).

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Phần 1:

Bài 1.

- a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC .

Xét ΔDAB có DM là trung trực $\Rightarrow \Delta DAB$ cân tại D

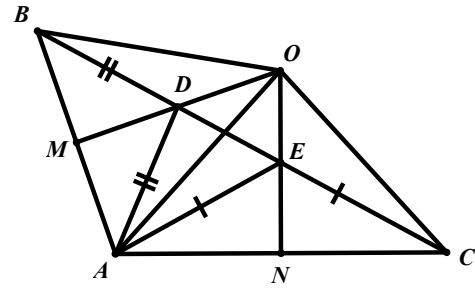
Tương tự ta có ΔEAC cân tại E .

- b) Xét ΔOAB có OM là trung trực $\Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O

$\Rightarrow OA = OB$ (1)

Tương tự có ΔOAC cân tại $O \Rightarrow OA = OC$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow$ đường tròn tâm O bán kính OA đi qua A, B, C .



Bài 2. Xét ΔEAB có ME là trung trực của

$AB \Rightarrow \Delta EAB$ cân tại E

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{ABE} = \widehat{ABC}$

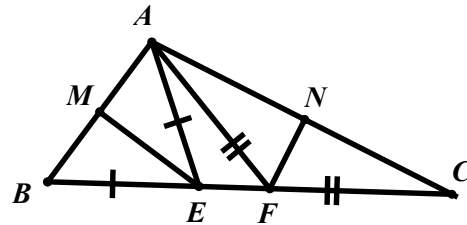
Xét ΔFAC có FN là trung trực của

$AC \Rightarrow \Delta FAC$ cân tại F

$\Rightarrow \widehat{CAF} = \widehat{ACF} = \widehat{ACB}$ (2)

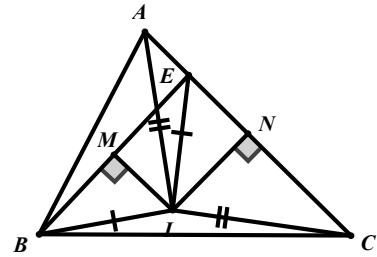
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{CAF} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} - \widehat{CAF} = 100^\circ - (\widehat{BAE} + \widehat{CAF}) = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$



Bài 3.

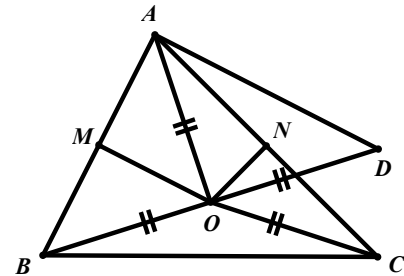
- a) Xét $\triangle IBE$ có IM là trung trực của $BE \Rightarrow \triangle IBE$ cân tại $I \Rightarrow IB = IE$
 Xét $\triangle IAC$ có IN là trung trực của $AC \Rightarrow \triangle IAC$ cân tại $I \Rightarrow IA = IC$
 Xét $\triangle AIB$ và $\triangle CIE$ có $IA = IC; AB = CE; IB = IE$
 $\Rightarrow \triangle AIB = \triangle CIE$ (c.c.c) (đpcm).



- b) Vì $\triangle IAC$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ICA}$ (1)
 Vì $\triangle AIB = \triangle CIE \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{ICE} = \widehat{ICA}$ (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{IAB} \Rightarrow AI$ là tia phân giác của góc BAC .

Bài 4.

- a) Vì O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC
 Suy ra: $OA = OB = OC$
 Vì $OD = OB \Rightarrow OD = OA \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AD . (1)
 Vì $OD = OB \Rightarrow OD = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của CD . (2)
 (1) Và (2) \Rightarrow (đpcm).



- b) Xét $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2}$
 Xét $\triangle OAD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODA} = \frac{180^\circ - \widehat{AOD}}{2}$
 $\Rightarrow \widehat{OAB} + \widehat{OAD} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{AOD}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{AOB} + \widehat{AOD}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại A (đpcm).
 Xét $\triangle OCD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \frac{180^\circ - \widehat{DOC}}{2}$
 Xét $\triangle OBC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2}$

$$\widehat{OCB} + \widehat{OCD} = \frac{180^\circ - \widehat{DOC}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{DOC} + \widehat{COB}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = 90^\circ \Rightarrow \Delta CBD \text{ vuông tại } C.$$

c) Ta có

$$\Rightarrow \widehat{ADO} + \widehat{ODC} = 180^\circ - (\widehat{ABO} + \widehat{CBO}) = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 110^\circ$$

Bài 5.

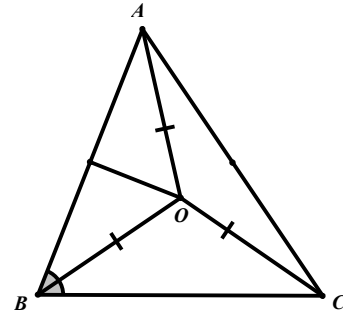
a) Vì O là giao điểm các đường trung trực của

ΔABC nên $OA = OB = OC$.

Xét ΔBOA và ΔBOC có:

$OA = OC$; $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ (do OB là tia phân giác của góc \widehat{ABC}) $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{BOC}$; và OB chung.

$$\Rightarrow \Delta BOA = \Delta BOC \text{ (c.g.c)}$$



b) Vì $\Delta BOA = \Delta BOC \Rightarrow AB = BC \Rightarrow \Delta BAC$ cân tại B ;

Mặt khác OB là tia phân giác của góc $\widehat{ABC} \Rightarrow OB$ là trung trực của AC (đpcm)

Bài 6. Xét ΔOAB vì OI là trung trực của AB nên

$$OA = OB; (1)$$

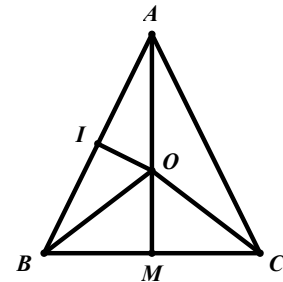
Vì ΔABC cân tại A , mà AM là trung tuyến $AM \perp BC$

Xét ΔOBM và ΔOCM có: $BM = MC$;

$$\widehat{BMO} = \widehat{OMC} = 90^\circ ; OM \text{ chung} \Rightarrow \Delta OBM = \Delta OCM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow OB = OC (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow O$ cách đều 3 đỉnh của ΔABC (đpcm).



Bài 7. Vì O là giao điểm của các đường trung trực trong ΔABC nên: $OA = OB = OC$

Vì MP là trung trực cạnh $AB \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại $M \Rightarrow AM = BM$

Vì NQ là trung trực của cạnh $AC \Rightarrow \Delta NAC$ cân tại $N \Rightarrow AN = NC$

Xét ΔOAM và ΔOBM có $OA = OB$, $AM = BM$ và OM chung

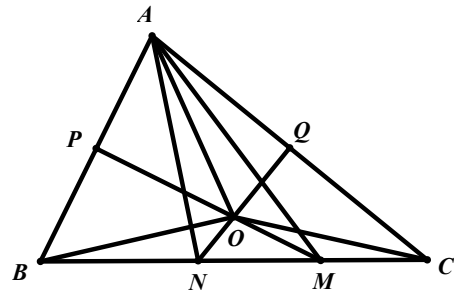
$$\Rightarrow \Delta OAM = \Delta OBM \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OBM}$$

Xét ΔOAN và ΔOCN có: $AN = CN$; $OA = OC$; ON chung

$$\Rightarrow \Delta OAN = \Delta OCN \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{OAN} = \widehat{OCN} \text{ (2)}$$

Xét ΔOBC có $OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \text{ (3)}$

Từ (1),(2) và (3) $\Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OAN} \Rightarrow OA$ là phân giác của góc MAN (đpcm).



Bài 8. Giả sử tìm được các điểm D, E thỏa mãn điều kiện bài, ta có:

ΔDBE cân tại D do $BD = DE \Rightarrow \widehat{DBE} = \widehat{DEB}$

ΔEDC cân tại E do $DE = EC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{ECD} \text{ (2)}$

Mà \widehat{DEB} là góc ngoài $\Delta EDC \Rightarrow \widehat{DEB} = 2\widehat{ECD}$

$$\Rightarrow \widehat{ECD} = \frac{1}{2}\widehat{DEB} = \frac{1}{2}\widehat{DBE}$$

Cách xác định (cách dựng):

- Qua C kẻ tia Cx tạo với CB góc $\frac{1}{2}\widehat{ABC}$, tia Cx cắt AB tại điểm D phải tìm.

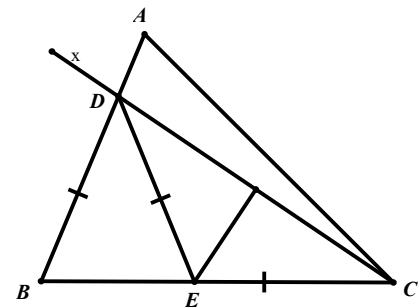
- Kẻ đường trung trực của DC , cắt BC tại E là điểm phải tìm.

Chứng minh:

Xét ΔEDC có E nằm trên trung trực của $DC \Rightarrow ED = EC \Rightarrow \Delta EDC$ cân tại E ;

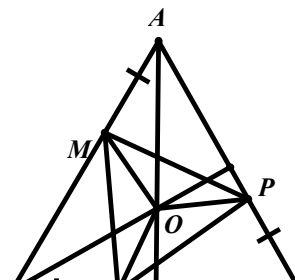
Mặt khác, \widehat{DEB} là góc ngoài $\Delta EDC \Rightarrow \widehat{EDB} = \widehat{EDC} + \widehat{ECD} = 2\widehat{ECD} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \Delta DBE$ cân tại D (vì $\widehat{DEB} = \widehat{DBE}$) $\Rightarrow DB = DE$ (đpcm).



Bài 9.

a) Xét ΔMAP và ΔPCN có:



$$AM = CP \text{ (gt)} ; \widehat{MAP} = \widehat{PCN} = 60^\circ ; AP = AC - PC = BC - BN = CN$$

$$\Rightarrow \triangle MAP = \triangle PCN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MP = PN; \text{ (1)}$$

$$\text{Tương tự ta có } \triangle NBM = \triangle PCN \Rightarrow MN = PN \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow MN = MP = PN \Rightarrow \triangle MPN \text{ đều (đpcm)}$$

b) Vì O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC \Rightarrow OA = OB = OC$.

$$\text{Mặt khác } \triangle ABC \text{ đều nên ta có: } \widehat{OAM} = \widehat{OAP} = \widehat{OCP} = \widehat{OCN} = \widehat{OBN} = \widehat{OBM} = 30^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle MAO \text{ và } \triangle NBO \text{ có } MA = NB; \widehat{MAO} = \widehat{NBO} = 30^\circ; OA = OB$$

$$\Rightarrow \triangle MAO = \triangle NBO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MO = NO. \text{ (3)}$$

$$\text{Tương tự ta có: } NO = PO \text{ (4)}$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP \Rightarrow O$ là giao của các đường trung trực $\triangle MNP$ (đpcm)

Bài 10.

a) Xét $\triangle BEC$ có EM là trung trực $\Rightarrow EB = EC \Rightarrow \triangle BEC$ cân tại E .

b) Vì $\triangle BEC$ cân tại E nên $\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = 30^\circ$

$$\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{EBC} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

$$\text{Vì } \widehat{ACB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ACB} - \widehat{ECB} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

$$\text{Trong } \triangle ABC \text{ ta có: } \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ \text{ (1)}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABE} + \widehat{ACE} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \widehat{BAC} = \widehat{ABE} + \widehat{ACE} \text{ (đpcm)}$$

c) Nếu $\widehat{AEB} > 90^\circ$, trong $\triangle ABE$ có $\widehat{ABE} = 45^\circ$

$$\widehat{A}_1 < 45^\circ$$

$$\Rightarrow AE > BE \Rightarrow AE > EC$$

$$\text{Trong } \triangle EAC \text{ có: } AE > AC \Rightarrow \widehat{A}_2 < \widehat{ACE} = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 < 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ \text{ Điều này là vô lý vì}$$

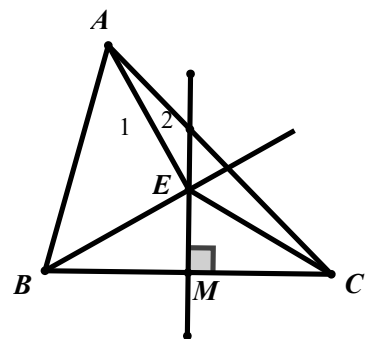
$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 60^\circ \text{ (3)}$$

$$\text{Nếu } \widehat{AEB} < 90^\circ \text{ trong } \triangle ABE \text{ có } \widehat{ABE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 > 45^\circ \Rightarrow AE < BE \Rightarrow AE < EC$$

$$\text{Trong } \triangle EAC \text{ có } AE < AC \Rightarrow \widehat{A}_2 > \widehat{ACE} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 > 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Điều này là vô lý vì } \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 60^\circ \text{ (4)}$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^\circ$$



Phần 2:

Bài 1. Xét bài toán phụ nếu $\triangle ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC thì $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$. Thật vậy:

Trên tia đối của tia NM lấy điểm P sao cho $NP = MN$

Xét $\triangle NAM$ và $\triangle NCP$ có: $AN = NC$; $\widehat{ANM} = \widehat{CNP}$
(đối đỉnh)

và $MN = NP \Rightarrow \triangle NAM = \triangle NCP$ (c.g.c)

$\Rightarrow MA = CP$ và $\widehat{MAN} = \widehat{NCP} \Rightarrow MA \parallel CP \Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{MCP}$ (hai góc ở vị trí so le trong)

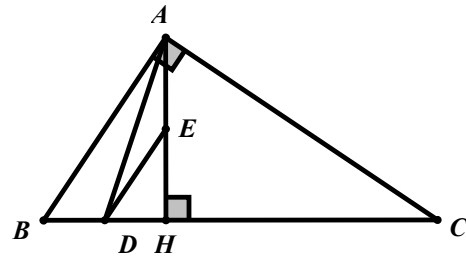
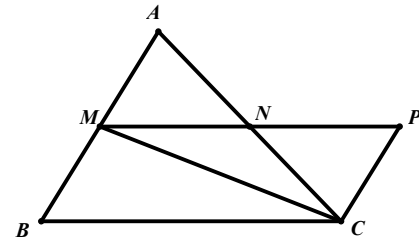
Xét $\triangle BMC$ và $\triangle PCM$ có $CP = MA = MB$; $\widehat{BMC} = \widehat{PCM}$ và MC chung
 $\Rightarrow \triangle BMC = \triangle PCM$ (c.g.c)

$\Rightarrow MP = BC = MN + NP = 2MN$ và

$\widehat{BCM} = \widehat{CMP} \Rightarrow MN \parallel BC$

Xét $\triangle HAB$ có D là trung điểm của BH , E là trung điểm của AH , theo kết quả bài toán trên $DE \parallel AB$

Xét $\triangle ADE$ có
 $DC \perp AE$; $AB \perp AC \Rightarrow AC \perp DE$ (do $DE \parallel AB$)
 $\Rightarrow AC$ và DC thuộc đường cao của $\triangle ADE$
Mà $C = AC \cap DC \Rightarrow C$ là trực tâm của $\triangle ADE$.

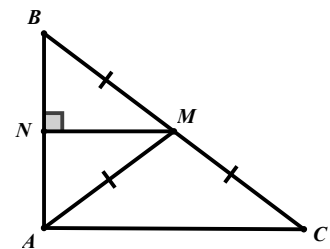


Bài 2.

Xét $\triangle MAB$ có $MA = MB \Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M mà $MN \perp AB$ tại N

$\Rightarrow N$ là trung điểm của AB .

Xét $\triangle ABC$ có N là trung điểm AB , M là trung điểm của BC , theo kết quả của bài 1 $\Rightarrow MN \parallel AC$. Mà $MN \perp AB \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow A$ là trực tâm $\triangle ABC$



Bài 3.

a) Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ABC$ ta có:

$AD = AB$ (gt); $\widehat{DAE} = \widehat{BAC} = 90^\circ$ (hai góc đối đỉnh);

$AE = AC$

$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = BC$ (đpcm).

b) Xét $\triangle ABD$ có $DA \perp AB$ (do $\triangle ABC$ vuông tại A)

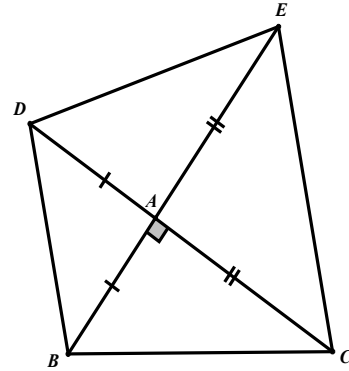
$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$

Mà $AD = AB \Rightarrow \triangle ABD$ vuông cân tại A (đpcm).

Chứng minh tương tự ta có $\triangle ACE$ vuông cân tại A

$\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{ACE} = 45^\circ$ (hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau)

$\Rightarrow BD \parallel CE$ (đpcm).



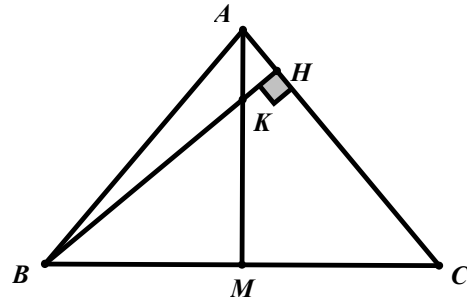
Bài 4. Vì $\triangle ABC$ cân tại A, mà AM là trung tuyến

$\Rightarrow AM$ cũng là đường cao $\Rightarrow AM \perp BC$ tại M.

Mặt khác $BH \perp AC$ (gt)

Mà $K = BH \cap AM \Rightarrow K$ là trực tâm

$\triangle ABC \Rightarrow CK$ thuộc đường cao hạ từ C của $\triangle ABC \Rightarrow CK \perp AB$ (đpcm).



Ta có $\widehat{HKM} = (180^\circ - \widehat{KHC} - \widehat{KCH}) + (180^\circ - \widehat{KMC} - \widehat{KCM})$

$\Rightarrow \widehat{HKM} = (180^\circ - 90^\circ - \widehat{KCH}) + (180^\circ - 90^\circ - \widehat{KCM})$

$\Rightarrow \widehat{HKM} = 180^\circ - (\widehat{KCH} + \widehat{KCM}) = 180^\circ - \widehat{C} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

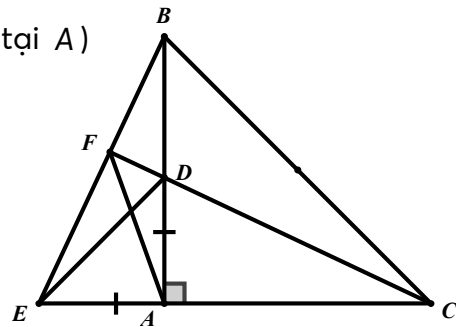
Bài 5. Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có $\widehat{BAE} = \widehat{CAD} = 90^\circ$

$AE = AD$ (gt); $AB = AC$ (do $\triangle ABC$ vuông cân tại A)

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACD \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ABE}$

Gọi F là giao điểm của CD và BE

Ta có: $\widehat{FDB} = \widehat{ADC}$ (hai góc đối đỉnh)



$$\text{Mà } \widehat{ADC} + \widehat{DCA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FDB} + \widehat{FBD} = \widehat{ADC} + \widehat{DCA} = 90^\circ$$

$$\text{Trong } \triangle FDB \text{ có } \widehat{DFB} = 180^\circ - (\widehat{FDB} + \widehat{FBD}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow CD \perp BE$$

Xét $\triangle BEC$ có $AB \perp EC$ (gt); $CD \perp BE$ (c.m.t), mà $D = CD \cap AB \Rightarrow D$ là trực tâm

$\triangle BEC$

$$\Rightarrow ED \text{ thuộc đường cao của } \triangle BEC \Rightarrow ED \perp BC \text{ (đpcm)}.$$

Bài 6.

a) Vì K là đối xứng của H qua BC nên $\widehat{BCK} = \widehat{BCH}$

Ta lại có: $\widehat{IHC} = \widehat{EHA}$ (hai góc đối đỉnh)

$$\text{Mà } \widehat{BCH} + \widehat{IHC} = 90^\circ \text{ và } \widehat{EHA} + \widehat{EAH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{ICH} \Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{BAH} \text{ (đpcm)}.$$

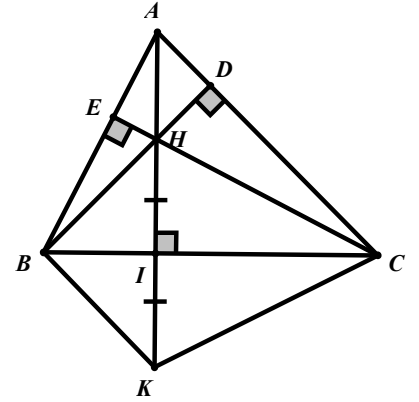
b) Vì K là đối xứng của H qua BC nên $\widehat{KBC} = \widehat{CBH}$

$$\text{Ta có } \widehat{CBH} + \widehat{BHI} = 90^\circ \text{ và } \widehat{AHD} + \widehat{HAD} = 90^\circ$$

$$\text{Hơn nữa: } \widehat{BHI} = \widehat{AHD} \text{ (hai góc đối đỉnh)} \Rightarrow \widehat{CBH} = \widehat{CAH}$$

$$\text{Trong } \triangle IAC \text{ có } \widehat{CAH} = \widehat{CAI} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\widehat{KBC} = \widehat{CBH} = \widehat{CAH} = 40^\circ.$$



Bài 7. Xét $\triangle DBA$ và $\triangle ECA$ có: $\widehat{CEA} = \widehat{BDA} = 90^\circ$; \hat{A} chung

$$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ABD} = 90^\circ - \hat{A}; \text{ và } CE = BD$$

$$\Rightarrow \triangle DBA = \triangle ECA \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AB = AC$$

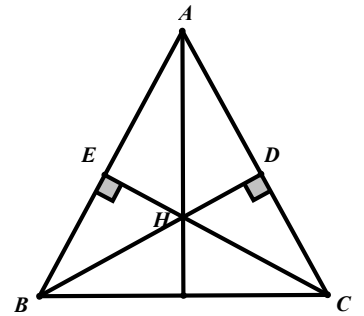
$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A \text{ (đpcm)}.$$

Xét $\triangle ABC$ có $BD \perp AC$ (gt); $CE \perp AB$ (gt)

Mà $H = CE \cap BD \Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABC$

Hơn nữa: $\triangle ABC$ cân tại A

$$\Rightarrow AH \text{ là phân giác của góc } BAC \text{ (đpcm)}.$$



Bài 8.

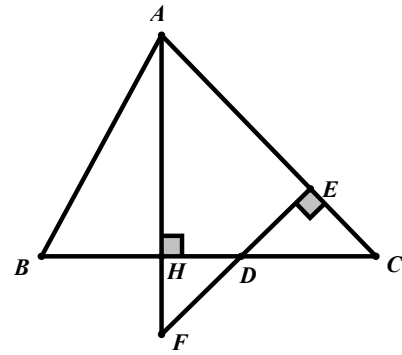
Vì $DE \perp AC \Rightarrow FE \perp AC$;

$AH \perp BC \Rightarrow CH \perp AF$

Xét ΔAFC có $FE \perp AC$ và $CH \perp AF$

Mà $D = FE \cap CH \Rightarrow D$ là trực tâm ΔAFC

$\Rightarrow AD \perp FC$ (đpcm).



Bài 9.

a) Xét bài toán phụ: Nếu ΔABC vuông tại A , I là trung điểm của BC thì $IA = IB = IC$.

Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ I xuống AB và AC

Ta có $IM \perp AB, AC \perp AB \Rightarrow IM \parallel AC$

$\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{ICN}$ (hai góc đồng vị)

Xét ΔMBI và ΔNIC có $\widehat{BIM} = \widehat{ICN} = 90^\circ$, $\widehat{BIM} = \widehat{ICN}$ và $BI = IC$

$\Rightarrow \Delta MBI = \Delta NIC$ (tam giác vuông cạnh huyền – góc nhọn bằng nhau)

$\Rightarrow BM = IN$ và $MI = NC$

Mà $IM \perp AB, NA \perp AB \Rightarrow IM = AN \Rightarrow IM = NC = AN \Rightarrow N$ là trung điểm AC .

Trong ΔIAC có IN vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow \Delta IAC$ cân tại I

$\Rightarrow IA = IC \Rightarrow IA = IB = IC$ (đpcm).

Xét ΔFAH có $\widehat{AFH} = 90^\circ$ và I là trung điểm của $AH \Rightarrow IA = IF = IH$

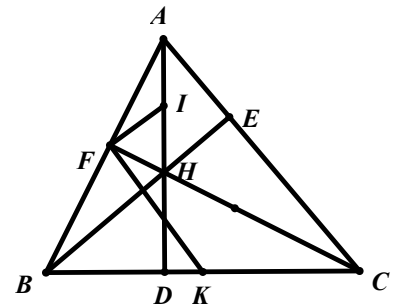
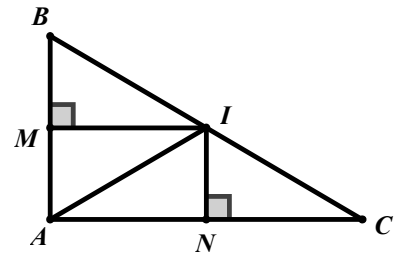
$\Rightarrow \Delta IFH$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IFH} = \widehat{IHF}$

Xét ΔFBC có $\widehat{BFC} = 90^\circ$ và K là trung điểm của $BC \Rightarrow KC = KB = KF$

$\Rightarrow \Delta KFC$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KFC} = \widehat{KCF}$

Ta có: $\widehat{IFK} = \widehat{IFH} + \widehat{HFK} = \widehat{IHF} + \widehat{KCF} = \widehat{DHC} + \widehat{DCH} = 90^\circ$

$\Rightarrow FK \perp FI$ (đpcm).



b) Xét ΔFIK vuông tại F có: $FI = IA = IH = \frac{AH}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm})$

Tương tự $FK = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4(\text{cm})$

Theo pitago ta có: $IK^2 = FI^2 + FK^2 \Rightarrow IK^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow IK = 5(\text{cm})$

Bài 10.

- a) Xét $\triangle ABC$ có I, J lần lượt là trung điểm của AB và AC , theo kết quả bài toán phụ ở bài 1 $\Rightarrow IJ // BC$ và $IJ = \frac{1}{2}BC$

Xét $\triangle IJN$ và $\triangle PKN$ có: $IJ = PK = \frac{1}{2}BC$, $\widehat{IJN} = \widehat{IJA} + \widehat{AJN} = \widehat{IJA} + 90^\circ$

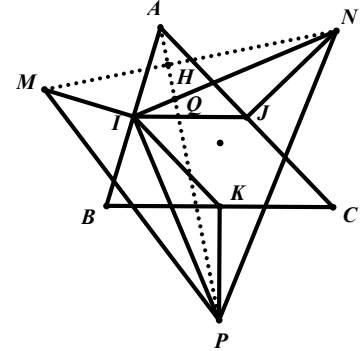
Vì $IJ // BC \Rightarrow \widehat{IJA} = \widehat{ACB}$ (hai góc đồng vị)

Tương tự vì I, K lần lượt là trung điểm của AB và $BC \Rightarrow IK // AC$

$\Rightarrow \widehat{IKB} = \widehat{ACB}$ (hai góc đồng vị) $\Rightarrow \widehat{IJN} = \widehat{PKI}$

và $IK = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KI = JN = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow \triangle IJN = \triangle PKN$ (c.g.c) $\Rightarrow IN = IP$ (đpcm).



- b) Xét $\triangle IPN$ có $\widehat{NIP} = \widehat{NIJ} + \widehat{JIK} + \widehat{KIP} = \widehat{IPK} + \widehat{IJK} + \widehat{KIP}$

vì $\widehat{NIJ} = \widehat{IPK}$ (do $\triangle IJN = \triangle PKN$)

$\Rightarrow \widehat{NIP} = \widehat{IPK} + \widehat{IKB} + \widehat{KIP}$ (vì $\widehat{IKB} = \widehat{IJK}$ hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{NIP} = \widehat{IPK} + \widehat{IKP} + \widehat{KIP} - \widehat{BKP} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle IPN$ vuông cân tại I

Xét $\triangle IMN$ và $\triangle IAP$ có $MI = IA = \frac{1}{2}AB$;

$\widehat{MIN} = 360^\circ - \widehat{BIM} - \widehat{NIP} - \widehat{BIP} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \widehat{BIP} = 180^\circ - \widehat{BIP}$ (1)

$\widehat{AIP} = 180^\circ - \widehat{BIP}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MIN} = \widehat{AIP}$

Ngoài ra $IN = IP$ (c.m.t) $\Rightarrow \triangle IMN = \triangle IAP$ (c.g.c) $\triangle MN = AP$ (đpcm).

Cũng suy ra $\widehat{MNQ} = \widehat{API}$

Gọi Q là giao điểm của IN và AP , ta có:

$\widehat{MNQ} + \widehat{NQA} = \widehat{API} + \widehat{IQP} = 180^\circ - \widehat{NIP} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Gọi H là giao của AP và MN , xét $\triangle HNQ$ có:

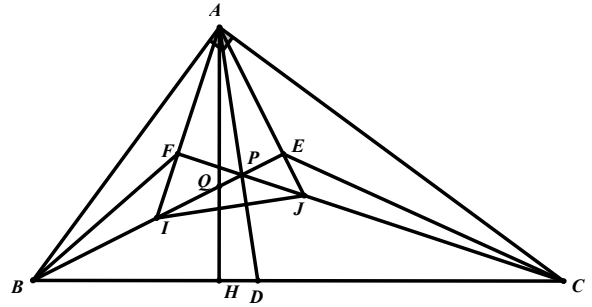
$\widehat{HNQ} + \widehat{NQH} = \widehat{MNQ} + \widehat{NQA} = 90^\circ \Rightarrow AP \perp MN$ (đpcm).

Bài 11.

- a) Gọi Q là giao điểm của BE và AH ta có vì AE là phân giác của góc HAC nên:

$$\widehat{QAE} = \frac{\widehat{HAC}}{2} = \frac{90^\circ - \widehat{ACB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{QAE} = \frac{90^\circ - (90^\circ - \widehat{ABC})}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$$



Xét $\triangle HQB$ vuông tại H nên: $\widehat{HQB} + \widehat{QBH} = 90^\circ$

Mà $\widehat{QBH} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$ và $\widehat{HQB} = \widehat{AQE}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{QAE} + \widehat{AQE} = \widehat{QBH} + \widehat{HQB} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AE \Rightarrow \triangle ABE$ vuông tại E (đpcm).

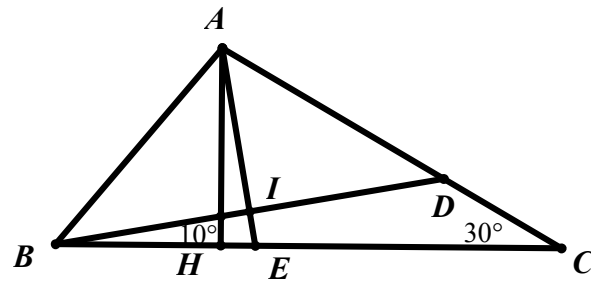
- b) Hoàn toàn tương tự nếu gọi F là giao của CJ và AI thì $CJ \perp AI$

Xét $\triangle AIJ$ có $IE \perp AJ$ và $JF \perp AI \Rightarrow P$ là giao điểm 3 đường phân giác của $\triangle ABC$ lại là trực tâm của $\triangle AIJ \Rightarrow AP$ thuộc đường cao của $\triangle AIJ \Rightarrow AP \perp IJ$ hay $AD \perp IJ$ (đpcm).

Bài 12. Vì \widehat{ADB} là góc ngoài $\triangle DBC$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$$

Trong $\triangle ABC$ có:



$$\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ACB} = 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \widehat{DBC} = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$$

Xét $\triangle ABD$ có $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} = 40^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A

Gọi I là giao của AE và $BD \Rightarrow AI$ là phân giác của BAD

Mà $\triangle ABD$ cân $\Rightarrow AI$ đồng thời là đường cao của $\triangle ABD \Rightarrow AI \perp BD$ hay $AE \perp BD$ (đpcm).

ÔN TẬP CHƯƠNG IX

I. KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nắm được mối quan hệ giữa cạnh và góc trong một tam giác.
- Nhận biết và nắm được tính chất của các đường đồng quy trong tam giác.
- Áp dụng linh hoạt tính chất đồng quy để giải quyết các bài tập.

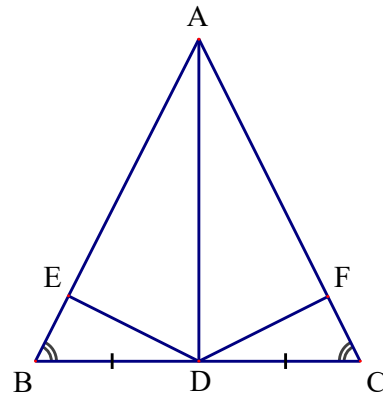
II. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem lại nội dung từ bài 31 đến bài 35.

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

Xét $\triangle ABC$ cân tại A có AD là đường trung tuyến đồng thời cũng là đường phân giác của góc A
Ta có $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ (gt)
Mà AD là đường phân giác của góc A (cmt)
Suy ra $DE = DF$.



Bài 2.

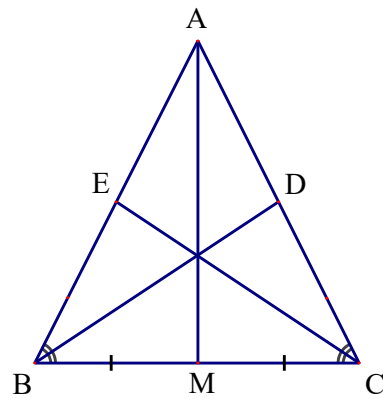
Xét tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC.
AM là tia phân giác của góc A nên
M cách đều hai cạnh AB, AC.

a) Chứng minh được $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.c.c).

Từ đó suy ra AM là tia phân giác của \widehat{BAC} .

b) Xét $\triangle ABC$ có AM, BD, CE là các tia phân giác.

Từ tính chất ba đường phân giác trong tam giác, suy ra ba đường thẳng AM, BD, CE đồng quy.



Bài 3.

Gọi M, N là trung điểm AC và AB.

$\triangle ABC$ cân tại A có BM, CN là đường trung tuyến ứng với cạnh bên AC, AB

$\Rightarrow BM = CN$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC, ta có: $GB = 2 BM$, $GC = 2 CN$.

$$\Rightarrow GB = GC$$

Xét $\triangle AGB$ và $\triangle AGC$ có:

AG chung

$AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A)

$GB = GC$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle AGB = \triangle AGC \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAG} = \widehat{CAG} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$\Rightarrow G$ thuộc tia phân giác của \widehat{BAC} .

Theo đề bài, điểm I cách đều ba cạnh của tam giác

$\Rightarrow I$ là điểm chung của ba đường phân giác

$\Rightarrow I$ thuộc tia phân giác của \widehat{BAC} .

Vì G, I cùng thuộc tia phân giác của BAC nên A, G, I thẳng hàng.

Bài 4.

a) Vì tam giác ABC cân tại A, có AM là đường trung tuyến nên AM là phân giác.

Có AM và BD giao nhau tại điểm I nên I là giao của ba đường phân giác.

$\Rightarrow CI$ là đường phân giác của tam giác ABC.

b) Ta có $\widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ và $\widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$ (Vì I nằm trên

tia phân giác BD, CE của tam giác ABC)

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ do tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow \widehat{IBC} = \widehat{ICB}$. Vậy tam giác IBC cân tại I.

c) Xét tam giác IEB và tam giác IDC có:

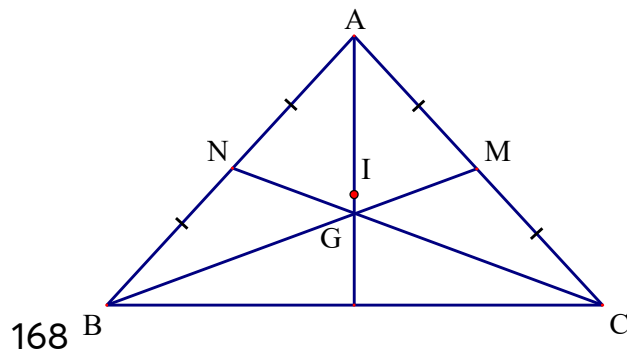
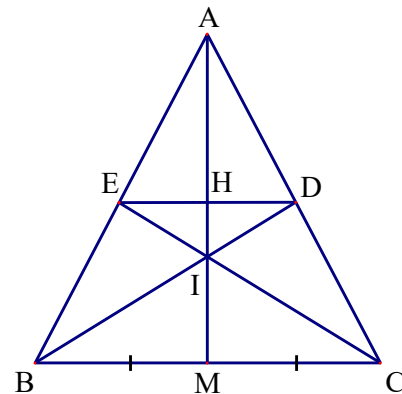
$$\widehat{EBI} = \widehat{DCI}$$

$$\widehat{EIB} = \widehat{DIC} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$IB = IC$ (tam giác IBC cân tại I)

$$\Rightarrow \triangle IEB = \triangle IDC \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BE = DC$$



$$\Rightarrow AE = AD$$

\Rightarrow Tam giác AED cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{AED} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}, \text{ mà } \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABC}$, mà hai góc ở vị trí so le trong

$\Rightarrow ED \parallel BC$.

d) Ta chứng minh được $\triangle AHE = \triangle AHD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow HE = HD$$

$\Rightarrow H$ là trung điểm của ED.

e) Có $AE = AD$, $HE = HD$, suy ra AH là đường trung trực của ED

$$\Rightarrow AH \perp ED \text{ hay } AM \perp ED$$

f) Điểm I và trọng tâm G của tam giác ABC trùng nhau thì tam giác ABC đều.

Bài 5.

a) Từ giả thiết, ta tính được $\widehat{BAC} = 60^\circ$

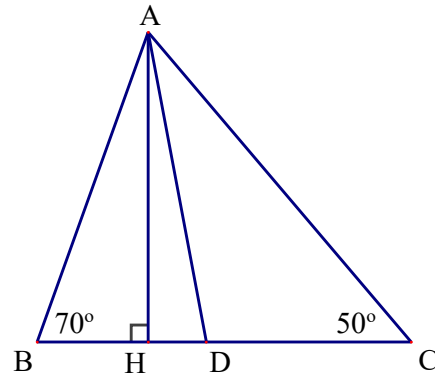
$$\Rightarrow \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = 30^\circ = \widehat{DAB}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{DAC} + \widehat{C} = 80^\circ.$$

Do đó, xét tam giác AHD, ta tính được

$$\widehat{BAH} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{HAD} = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ.$$



$$\text{b) } \widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{HDA} = 90^\circ - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{C} \right) = \frac{180^\circ - \widehat{A} - 2\widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}.$$

Bài 6.

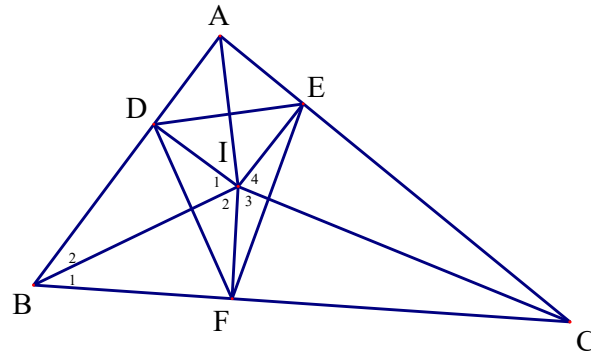
a) Vì H là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc N, P nên MH là phân giác góc M. Do đó, H cách đều hai cạnh MN, MP.

$$\text{b) } \widehat{HMN} = \frac{1}{2} \widehat{NMP} = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ.$$

$$\widehat{NHP} = 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\widehat{MNP} + \frac{1}{2}\widehat{MPN} \right) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{MNP} + \widehat{MPN})$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 70^\circ) = 125^\circ.$$

Bài 7.



a) AI là phân giác góc A nên $\widehat{IAD} = \widehat{IAE} = 45^\circ$.

Hai $\triangle AIE$ và $\triangle AID$ là hai tam giác cân ở E và ở D nên $AE = EI$ và $AD = DI$

Vì AI là phân giác góc A nên $IE = ID$

$\Rightarrow AD = AE$

b) Nếu $\triangle ABC$ vuông cân ở A thì $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$.

$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \widehat{D}_3 = \widehat{D}_4$. Do đó $\widehat{DIF} = \widehat{EIF}$.

Suy ra $\triangle DIF = \triangle EIF$ (c.g.c) $\Rightarrow FD = FE$

Vậy $\triangle EDF$ cân ở F.

CHƯƠNG X.

MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN

BÀI 36. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT VÀ HÌNH LẬP PHƯƠNG

VD 1.1.

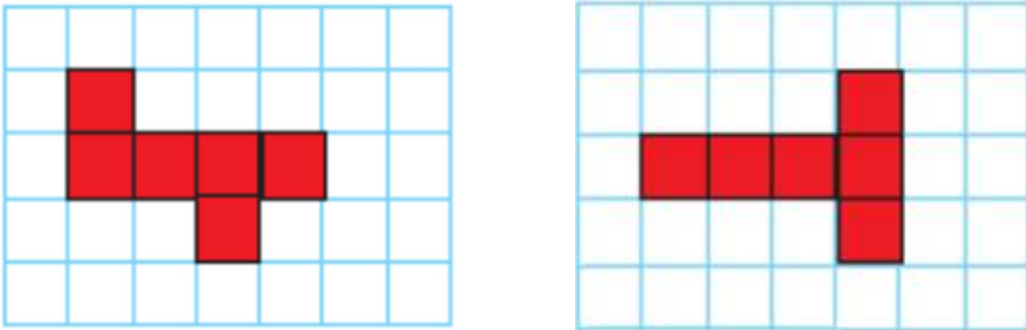
Trong hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, ta có:

- a) 8 đỉnh, đó là $A, B, C, D, A', B', C', D'$.
- b) 12 cạnh, đó là $AB, BC, CD, DA, A'B', B'C', C'D', D'A', AA', BB', CC', DD'$.
- c) 4 đường chéo, đó là $AC', A'C, BD', B'D$.
- d) 6 mặt, đó là các hình chữ nhật $ABCD, A'B'C'D', ABB'A', CDD'C', ADD'A', BCC'B'$.

Vì hình lập phương cũng là một hình hộp chữ nhật, nên ta có kết quả tương tự.

VD 1.2. Khi gập hình lại, chỉ có hình thứ nhất tạo ra hình hộp chữ nhật.

VD 1.3. Ta được 2 hình sau:



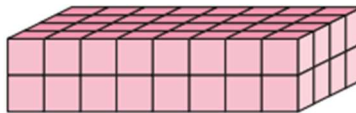
VD 1.4. Học sinh tự thực hiện.

VD 1.5. Những hình dưới đây được xếp bởi bao nhiêu khối lập phương nhỏ? Nêu cách tính nhanh nếu có.

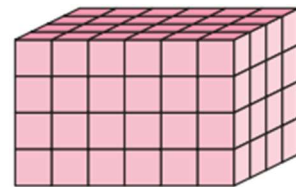
a) $7 \cdot 3 \cdot 3 = 63$ khối



b) $8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ khối



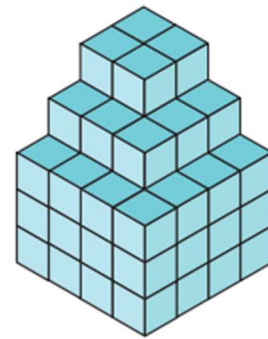
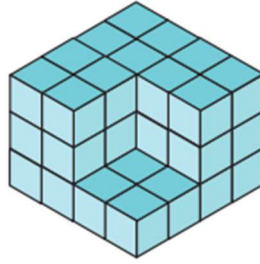
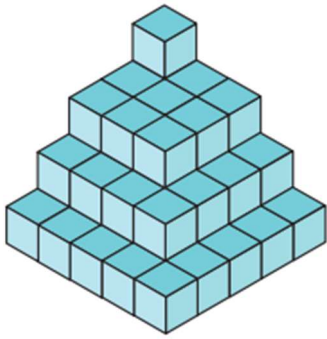
c) $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ khối



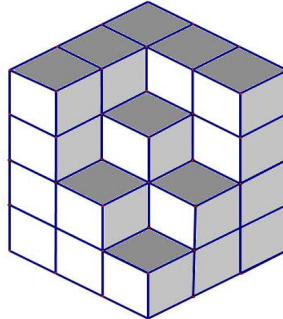
d) $1 + 9 + 16 + 25 = 51$
khối

e) $12 \cdot 3 + 4 = 40$ khối

f) $4 + 9 + 16 \cdot 3 = 61$ khối



VD 1.6. Tính từ tầng cao nhất xuống, ta có phép tính $5 + 6 + 8 + 9 = 28$ khối.



VD 2.1. $2(5+4).3 = 54\text{cm}^2$

VD 2.2. $4.10^2 = 400\text{cm}^2$

VD 2.3. $2\left(\frac{4}{5} + 0,2\right).2 = 4\text{cm}^2$

VD 2.4. $4.\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}\text{cm}^2$

VD 2.5. Chiều rộng là: $16 : 2 - 5 = 3\text{ cm}$. Suy ra chiều cao là 3 cm .

Từ đó, diện tích xung quanh là $2(5 + 3).3 = 48\text{ cm}^2$.

VD 2.6. Chiều dài của hình là $8.1,5 = 12\text{ cm}$; chiều cao của hình là $8.\frac{3}{4} = 6\text{ cm}$.

Từ đó, diện tích xung quanh là $2(12 + 8).6 = 120\text{ cm}^2$.

VD 2.7. Vì chiều dài x chiều rộng = 20 cm^2 và hai độ dài hơn nhau 1 cm , suy ra chiều dài là 5 cm , chiều rộng là 4 cm . Từ đó, chiều cao là 2 cm .

Vậy diện tích xung quanh của hình là $2(5 + 4).2 = 36\text{ cm}^2$.

VD 2.8. Với diện tích đáy là 28 cm^2 và chiều dài lẫn chiều rộng đều là các số tự nhiên nhỏ hơn 10 , ta có chiều dài là 7 cm , chiều rộng là 4 cm .

Vậy diện tích xung quanh của hình là $2(7 + 4).3,5 = 77\text{ cm}^2$.

VD 2.9. $4.25 = 100 \text{ cm}^2$.

Cách khác: Học sinh có thể tính độ dài cạnh của hình là 5cm, sau đó tính diện tích xung quanh. Tuy nhiên cách này chưa tối ưu.

VD 2.10. $4.10 = 40 \text{ cm}^2$.

VD 2.11. Vì độ dài cạnh là một số tự nhiên, vậy diện tích một mặt là một số chính phương.

Vì diện tích xung quanh là số có hai chữ số, vậy diện tích một mặt phải nhỏ hơn $100 : 4 = 25$.

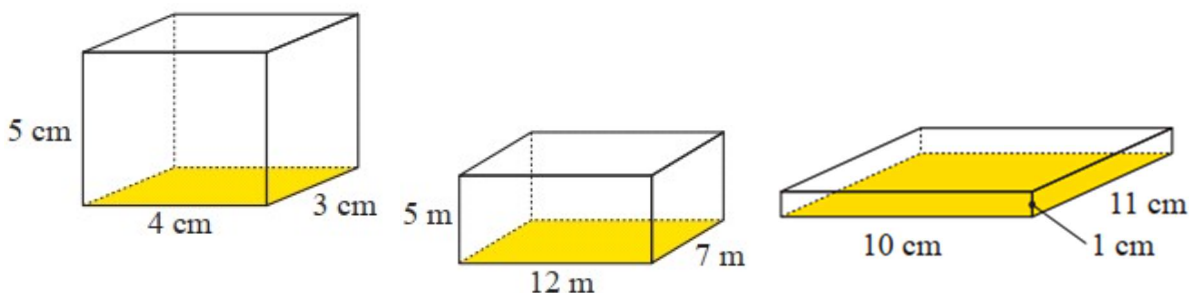
Vậy diện tích một mặt là 16, và diện tích xung quanh của hình lập phương là 64.

VD 3.1. Tính thể tích các hình sau:

a) $4.3.5 = 60 \text{ cm}^3$

b) $12.7.5 = 420 \text{ m}^3$

c) $10.11.1 = 110 \text{ cm}^3$



VD 3.2. $5.4.1,5 = 30 \text{ cm}^3$.

VD 3.3. $5^3 = 125 \text{ cm}^3$.

VD 3.4. $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12} \cdot 0,6 = \frac{1}{5} \text{ cm}^3$.

VD 3.5. $(2,4)^3 = 13,824 \text{ cm}^3$.

VD 3.6. $6.2.2 = 24 \text{ cm}^3$.

VD 3.7. $6.4.3 = 72 \text{ cm}^3$.

VD 3.8. $15.2 = 30 \text{ cm}^3$.

VD 3.9. Độ dài cạnh là $20 : 4 = 5 \text{ cm}$, từ đó thể tích của hình là $5^3 = 125 \text{ cm}^3$.

VD 3.10. Độ dài cạnh là 6cm, từ đó thể tích của hình là $6^3 = 216 \text{ cm}^3$.

VD 4.1.

Diện tích xung quanh: $2(6 + 3).4 = 72 \text{ cm}^2$

Thể tích: $6.3.4 = 72 \text{ cm}^3$

Diện tích toàn phần: $2(6.3 + 3.4 + 4.6) = 108 \text{ cm}^2$

VD 4.2. Tổng của chiều dài và chiều rộng là 30cm. Vì chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, ta có chiều rộng là 12cm, chiều dài là 18cm. Từ đó:

a) Diện tích xung quanh của hình là 600 cm^2 .

b) Thể tích của hình là 2160 cm^3 .

VD 4.3. 125 cm^3 .

VD 4.4. Khi chiều cao tăng thêm 2cm, chu vi đáy tăng thêm 4cm. Mà diện tích xung quanh mới là 140 cm^2 , ta có: $2(chu vi + 4).h = 140$ (với h là chiều cao)

Suy ra, $2chu vi.h + 8.h = 140 \Rightarrow 100 + 8h = 140 \Rightarrow h = 5$.

Vậy chu vi đáy của hình là 10cm.

VD 4.5. Gọi r là chiều rộng, h là chiều cao của hình. Ta có:

$5.r.h - 3.r.h = 12$ (Vì thể tích hình giảm đi 12 dm^3 khi chiều dài giảm đi 2dm)

$\Rightarrow 2.r.h = 12 \Rightarrow r.h = 6$.

Vậy thể tích ban đầu là $\Rightarrow 5.r.h = 5.6 = 30 \text{ dm}^3$.

VD 5.1. Ta tính tổng thể tích của khối trên và khối dưới: $1.1.2 + 5.1.1 = 7 \text{ cm}^3$.

VD 5.2. Tính thể tích của hình sau: $8.5.10 + 19.5.7 = 1065 \text{ mm}^3$.

VD 5.3.

Hình 1: 76 m^3

Hình 2: 240 m^3

VD 6.1. $17,5 \text{ cm}^3$.

VD 6.2. Tổng diện tích xung quanh cùng với trần nhà là: $2(5 + 4,2).4 + 5.4,2 = 94,6 \text{ m}^2$.

VD 6.3. 5dm.

VD 6.4. Lượng không khí trong phòng cần có là $3.500 = 1500 \text{ m}^3$.

Vậy chiều cao cần có là $1500 : 25 : 15 = 4 \text{ m}$.

VD 6.5. Thể tích của bể là $2700 : \frac{3}{4} = 3600$ (lít) = 3600 (dm³) = $3,6$ (m³).

Chiều cao của bể là $3,6 : 2 : 1,5 = 1,2$ m.

VD 6.6. Chu vi đáy là $400 : 10 = 40$ dm. Suy ra chiều dài là 12cm, chiều rộng là 8cm.

Thể tích của hình là $12.8.10 = 960$ dm³.

THỂ TÍCH HÌNH LẬP PHƯƠNG LÀ $2^3 = 8$ DM³, VẬY THÙNG ĐƯỢC ĐƯỢC NHIỀU NHẤT $960 : 8 = 120$ HÌNH LẬP PHƯƠNG NÀY.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. QUAN SÁT TRONG THỰC TẾ VÀ NÊU RA MỘT SỐ ĐỒ VẬT.

BÀI 2. HỌC SINH THAO TÁC VẼ HÌNH.

BÀI 3. ĐẾM SỐ HÌNH LẬP PHƯƠNG TRONG CÁC HÌNH DƯỚI ĐÂY.

A) 45 KHỐI

B) 27 KHỐI

C) 25 KHỐI

D) 22 KHỐI

E) 30 KHỐI

F) 34 KHỐI

BÀI 4. 55CM².

BÀI 5. 7,05CM².

BÀI 6. 64CM².

BÀI 7. 5,76CM².

BÀI 8. 112CM².

BÀI 9. 96CM².

BÀI 10. 120CM².

BÀI 11. 64CM².

BÀI 12. 160CM².

BÀI 13. TA CÓ: $216 = 2^3.3^3 = 4.6.9$; $350 = 2.5^2.7 = 5.7.10$.

TỪ ĐÓ SUY RA ĐỘ DÀI CÁC CẠNH CỦA HÌNH.

BÀI 14. 10 000CM³.

BÀI 15. 174CM³.

BÀI 16. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CÙNG VỚI TRẦN NHÀ LÀ $2(9 + 6).5 + 9.6 = 204$ M².

TỔNG DIỆN TÍCH CÁC LOẠI CỬA LÀ: $4(1,6.2,2.2 + 1,8.1,2.4) = 62,72$ M².

VẬY DIỆN TÍCH CẦN QUÉT VÔI LÀ $204 - 62,72 = 141,28$ M².

BÀI 17. 540CM².

BÀI 18. $(1,2)^2 .5.25 000 = 180 000$ ĐỒNG.

BÀI 19. THỂ TÍCH BỂ LÀ $2,1.5.1,2 = 3,6$ M³.

LƯỢNG NƯỚC ĐÃ LẤY LÀ $20.45 : 1000 = 0,9$ M³.

VẬY LƯỢNG NƯỚC TRONG BỂ CÒN $\frac{3}{4}$, TƯƠNG ỨNG MỨC NƯỚC LÀ

$$1,2 . \frac{3}{4} = 0,9 \text{ M.}$$

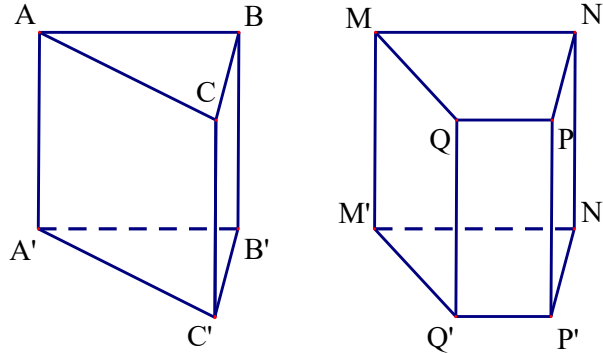
BÀI 20. $2(1,2.1.1) + 0,6.0,3.0,3 = 2,454$ M³.

BÀI 21. HÌNH 2 VÀ HÌNH 3.

BÀI 22. MẶT SỐ 1.

BÀI 37. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TAM GIÁC VÀ HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TỨ GIÁC

VD 1.1.



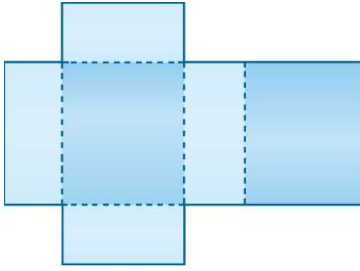
Với hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$, ta có:

- a) 6 đỉnh, đó là A, B, C, A', B', C' .
- b) 9 cạnh, đó là $AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A', AA', BB', CC'$.
- c) Không có đường chéo nào.
- d) 5 mặt, bao gồm hai mặt đáy hình tam giác là ABC và $A'B'C'$, ba mặt bên là các hình chữ nhật $ABB'A', BCC'B', CAA'C'$.

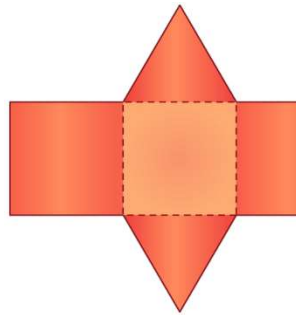
Với hình lăng trụ đứng tứ giác $MNPQ.M'N'P'Q'$, ta có:

- a) 8 đỉnh, đó là $M, N, P, Q, M', N', P', Q'$.
- b) 12 cạnh, đó là $MN, NP, PQ, QM, M'N', N'P', P'Q', Q'M', MM', NN', PP', QQ'$.
- c) 4 đường chéo, đó là $MP', M'P, NQ', N'Q$.
- d) 6 mặt, đó là hai mặt đáy hình tứ giác là $MNPQ$ và $M'N'P'Q'$, bốn mặt bên là các hình chữ nhật $MNN'M', NPP'N', PQQ'P', QMM'Q'$.

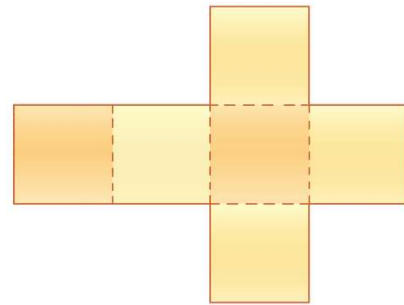
VD 1.2. Các hình dưới đây có thể xếp thành các hình khối nào?



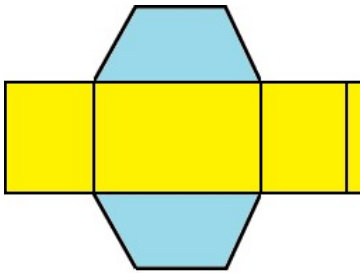
Hình hộp chữ nhật



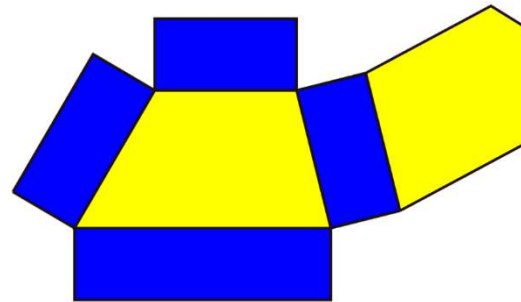
Hình lăng trụ đứng tam giác



Hình lập phương



Hình lăng trụ đứng tứ giác



Hình lăng trụ đứng tứ giác

VD 2.1.

Hình thứ nhất: $(5 + 2,5 + 3,5).6 = 66 \text{ cm}^2$.

Hình thứ hai: $(2 + 2,5 + 4,5 + 3).5 = 60 \text{ cm}^2$.

VD 2.2. 200 cm^2 .

VD 2.3. 120 cm^2 .

VD 2.4. 75 cm^2 .

VD 2.5. 220 cm^2 .

VD 2.6. 120 cm^2 .

VD 3.1. $(\frac{1}{2}.3.5).6 = 45 \text{ cm}^3$.

VD 3.2. $20.7 = 140 \text{ cm}^3$.

VD 3.3. $(\frac{1}{2}.5.8).3 = 60 \text{ cm}^3.$

VD 3.4.

Hình thứ nhất: $(\frac{1}{2}.12.8).16 = 768 \text{ cm}^3.$

Hình thứ hai: $(\frac{1}{2}.5.12).19 = 570 \text{ cm}^3.$

VD 3.5. $[\frac{1}{2}.(5. + 10).4].12 = 360 \text{ cm}^3.$

VD 3.6. $[\frac{1}{2}.(5. + 8).5].7 = 227,5 \text{ cm}^3.$

VD 4.1.

a) Diện tích xung quanh của chiếc hộp đèn là $(12 + 16 + 20).30 = 1440 \text{ cm}^2.$

b) Thể tích chiếc hộp đó là $(\frac{1}{2}.20.9).30 = 2700 \text{ cm}^3.$

VD 4.2.

Thể tích khối lăng trụ đứng tam giác ở trên là $(\frac{1}{2}.7.1).5 = 17,5 \text{ dm}^3.$

Thể tích hình hộp chữ nhật bên dưới là $7.5.3 = 105 \text{ dm}^3.$

Tổng thể tích của hình là $17,5 + 105 = 122,5 \text{ dm}^3 = 0,1225 \text{ m}^3.$

Vậy chi phí bác cần bỏ ra để đúc 10 khối bê tông như này là $0,1225.10.500\ 000 = 612\ 500$ đồng.

VD 4.3.

a) Thể tích khoảng không bên trong lều là $(\frac{1}{2}.3.2).5 = 15 \text{ m}^3.$

b) Diện tích vải bạt cần có để dựng lều là $(\frac{1}{2}.3.2 + 5.2,5).2 = 31 \text{ m}^2.$

VD 4.4.

a) Diện tích mặt đáy tam giác là $\frac{1}{2}.75.30 = 1125 \text{ cm}^2.$

b) Thể tích nước mà máng chứa được là $1125.3 = 3375 \text{ cm}^3.$

c) Lượng nước trong hình hiện tại là $3375.\frac{3}{5} = 2025 \text{ cm}^3.$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Học sinh thao tác vẽ hình và trả lời câu hỏi.

Bài 2. Hình thứ nhất: $428,4\text{cm}^2$ Hình thứ hai: 287cm^2

Bài 3. 65cm^2 .

Bài 4. 60cm^2 .

Bài 5. 96cm^2 .

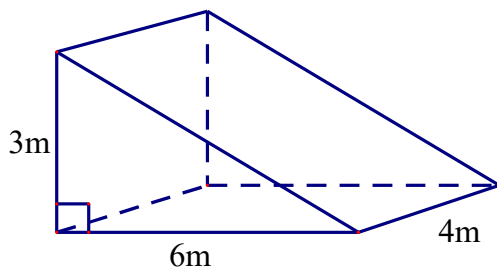
Bài 6. 312cm^2 .

Bài 7. 144cm^2 .

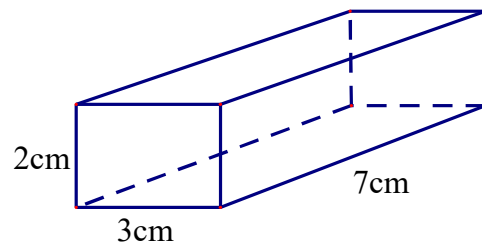
Bài 8. 70cm^3 .

Bài 9. 180cm^3 .

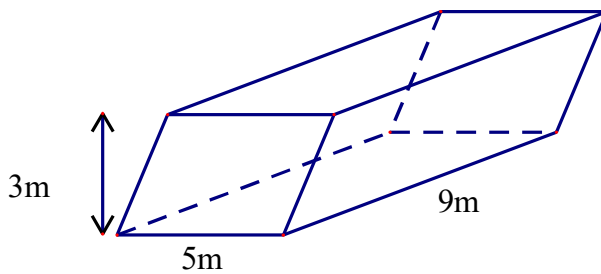
Bài 10. A



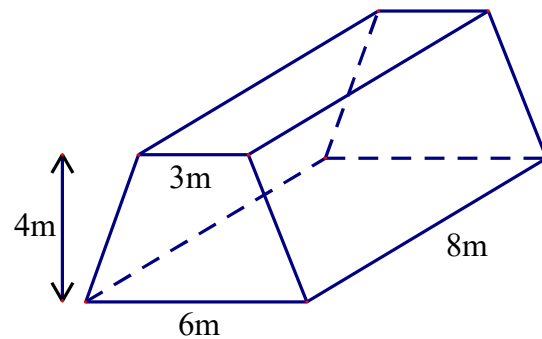
36m^3



42cm^3



135m^3



144m^3

Bài 11.

Hình thứ nhất: $S_{xq} = (6 + 8 + 10).12 = 288\text{ cm}^2$, $V = (\frac{1}{2}.8.6).12 = 288\text{ cm}^3$.

Hình thứ hai: $S_{xq} = (3 + 4 + 6).10 = 130\text{ cm}^2$, $V = (\frac{1}{2}.6.2).10 = 60\text{ cm}^3$.

Bài 12. Các cạnh được dính với nhau là:

- AB và BC
- ON và NM
- CD và FG
- ML và IH
- DE và EF
- LK và KI
- OA và GH

ÔN TẬP CHƯƠNG X

Bài 1. a và b; c và d; e và k; f và g; h và i.

Bài 2. 144cm^2 .

Bài 3.

a) Diện tích xung quanh: 90cm^2 , thể tích: 100cm^3 .

b) Diện tích mặt đáy là 20cm^2 , thể tích mới là 140cm^3 , vậy chiều cao mới là 7cm .

Vậy hình cần có chiều cao dài thêm 2cm .

Bài 4. 42cm^2 .

Bài 5. 15cm^3 .

Bài 6. $\left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10\right) \cdot 50 + 15 \cdot 15 \cdot 50 = 15\,000\text{cm}^3$.

Bài 7. $144\,000\text{cm}^3$.

Bài 8. 160cm^3 .

Bài 9. $5,4\text{m}^3$.

Bài 10. Ta sẽ cắt ngang hình và có tổng thể tích là $7 \cdot 5 \cdot 11 + 17 \cdot 5 \cdot 8 = 1065\text{cm}^3$.

Bài 11. $\left[\left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8\right) \cdot 20\right] : 2^3 = 50$ viên.

Bài 12. Cắt ngang hình để được một hình lăng trụ đứng tam giác và một hình hộp chữ nhật nằm bên trên. Lúc ấy, thể tích của hình là

$\left[\left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2\right) \cdot 5\right] + 20 \cdot 5 \cdot 1 = 200\text{m}^3$.