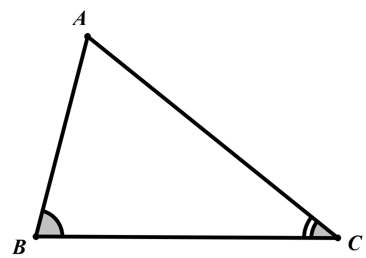
CHƯƠNG IX.

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG MỘT TAM GIÁC

BÀI 31. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

VD 1.1. Cho tam giác ABC có $AB = 8\,\text{cm}$, $AC = 10\,\text{cm}$. So sánh $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$.

Giải:



Xét ΔABC có:

$AB = 8cm,\ AC = 10cm$

$\Rightarrow AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$

VD 1.2. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3cm, BC = 5cm.$ Hãy so sánh hai góc B và C.

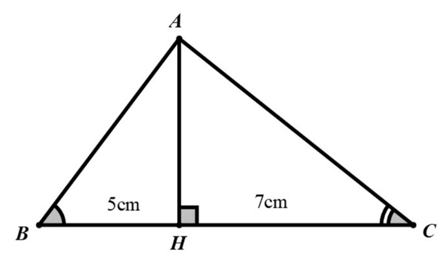
- **Lời giải**

Vì ΔABC vuông tại A, áp dụng định lý pitago ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$

$\Rightarrow AC^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AC = 4cm \Rightarrow AC > AB$. Do đó $\hat{B} > \hat{C}$

VD 1.3. Cho tam giác ΔABC, đường cao AH, biết $BH = 5cm,\ CH = 7cm.$ Hãy so sánh hai góc B và C.



- **Lời giải**

Vì ΔHAB vuông tại H, theo định lý pitago ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = BH^2 + AH^2 = 25 + AH^2 \\ AC^2 = CH^2 + AH^2 = 49 + AH^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AC^2 > AB^2 \Rightarrow AC > AB$$

Xét ΔHAB có $AC > AB$ nên: $\hat{B} > \hat{C}$

VD 1.4. Cho tam giác ABC, tia phân giác của góc A cắt BC tại D, biết $BD = 2DC$. Chứng minh rằng $\hat{B} < \hat{C}$

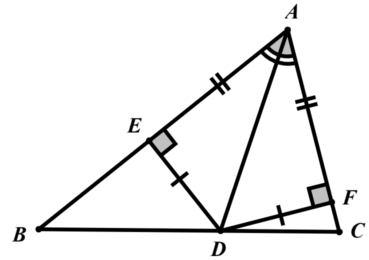
- **Lời giải**

Kẻ $DE \perp AB; DF \perp AC \quad (E \in AB, F \in AC)$.

Xét ΔADE và ΔADF có: $\hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$,AD chung,

$\widehat{EAD} = \widehat{FAD}$ (do AD là tia phân giác)

Do đó $\Delta ADE = \Delta ADF \Rightarrow \begin{cases} AE = AF \\ DE = DF \end{cases}$.



Xét ΔEBD có $\hat{E} = 90^\circ$, Áp dụng pitago ta có:

$BE^2 = BD^2 - ED^2 = (2DC)^2 - DF^2 = 4DC^2 - DF^2 \quad (1)$

Xét ΔFDC có $\hat{F} = 90^\circ$, Áp dụng pitago ta có:

$CF^2 = DC^2 - DF^2 \quad (2)$

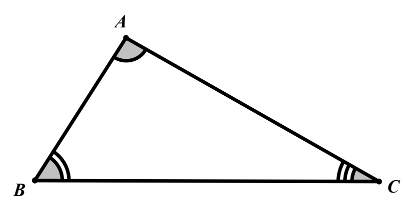
Từ (1) và (2), suy ra: $BE > CF$

Mặt khác $\begin{cases} AB = BE + AE \\ AC = AF + FC \end{cases}$ mà $AE = AF$ *nên* $AB > AC$ do đó $\hat{B} < \hat{C}$ (đpcm).

Dạng 2. So sánh hai cạnh trong một tam giác

VD 2.1. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 2\hat{B}$, $\hat{B} + \hat{C} = 80^0$. Hãy so sánh các cạnh của tam giác ABC.

Giải:



Xét ΔABC ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$

Mặt khác theo giả thiết $\hat{B} + \hat{C} = 80^0$

$\Rightarrow \hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - 80^0 = 100^0$

$\Rightarrow \hat{B} = \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{100^0}{2} = 50^0 \Rightarrow \hat{C} = 80^0 - \hat{B} = 80^0 - 50^0 = 30^0$

Vậy $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ Nên $BC > AC > AB$.

VD 2.2. Cho ΔABC, biết $\hat{A} + \hat{C} = 120^\circ$, $\hat{A} - \hat{C} = 40^\circ$.

a) So sánh các cạnh của ΔABC.

b) Tia phân giác của góc A cắt BC ở D. So sánh độ dài các đoạn BD và CD.

- **Lời giải**

a) Từ giả thiết $\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 120^\circ \\ \hat{A} - \hat{C} = 40^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = 80^\circ \\ \hat{C} = 40^\circ \end{cases}$

Mặt khác: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$

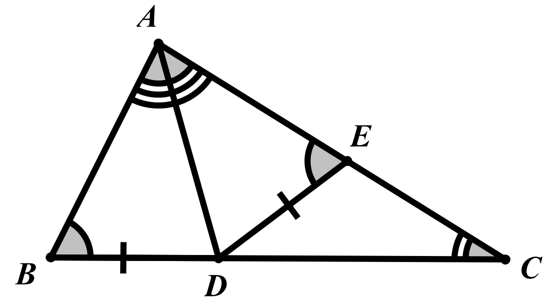
$\Rightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ do đó $BC > AC > AB$.

b) Trên AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$

Xét ΔABD và ΔAED có $AB = AE$, $\widehat{BAD} = \widehat{DAE}$ (vì AD là tia phân giác của góc A), AD chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABD} = 60^\circ$ và $BD = DE$.



Xét ΔDEC có: $\widehat{DEC} = 180^\circ - \widehat{AED} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{ECD}$ Do đó $DC > DE$ *hay* $DC > BD$

VD 2.3. Cho tam giác ABC, biết $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 2 : 3 : 4$. So sánh các cạnh của tam giác.

- **Lời giải**

Theo giả thiết ta có: $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 2 : 3 : 4 \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta được:

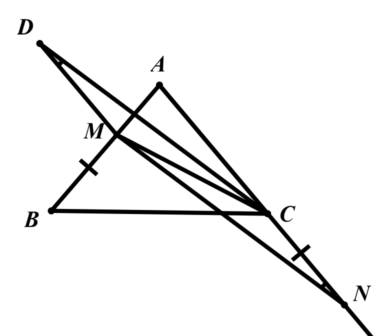
$$\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{4} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{2 + 3 + 4} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

$\Rightarrow \hat{A} = 40^0; \hat{B} = 60^0; \hat{C} = 80^0$ Vậy $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C} \Rightarrow BC < AC < AB$

VD 2.4. Cho tam giác ABC cân ở A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Kẻ $Cx // MN$, từ M kẻ $My // CN$. Hai tia Cx và My cắt nhau tại D. So sánh BC *và* CD.

- **Lời giải**

Xét ΔMDC và ΔCNM có MC chung, $\widehat{DMC} = \widehat{MCN}$ hai góc so le do $MD // CN$ và $\widehat{DCM} = \widehat{CMN}$ hai góc so le do $CD // MN$



$\Rightarrow \Delta MDC = \Delta CNM$ $(g.c.g) \Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{CMN}$ và $DM = CN = BM$

Dễ thấy $\widehat{ACB} > \widehat{CNM}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ do ΔABC cân

$\Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{CNM} = \widehat{MDC}$

Mặt khác xét ΔMBD có $BM = DM \Rightarrow \Delta MBD$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MDB}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{MBD} > \widehat{MDC} + \widehat{MDB} \Leftrightarrow \widehat{DBC} > \widehat{BDC} \Rightarrow DC > BC$

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: a) ΔABC có: $AB = 4cm;\ BC = 6cm;\ CA = 5cm.$

$\Rightarrow BC > CA > AB$

$\Rightarrow \widehat{BAC} > \widehat{CBA} > \widehat{ACB}\ hay\ \widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$ (Định lý 1)

b) ΔABC có: $AB = 9cm;\ AC = \sqrt{72}cm \approx 8,5cm;\ BC = 8cm.$

$\Rightarrow AB > AC > BC$

$\Rightarrow \widehat{ACB} > \widehat{ABC} > \widehat{BAC}\ hay\ \widehat{C} > \widehat{B} > \widehat{A}$ (Định lý 1)

c) ΔABC có: Độ dài các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt tỉ lệ nghịch với $2,3,4$.

$\Rightarrow AB.2 = BC.3 = CA.4$

$\Rightarrow AB > BC > AC$

$\Rightarrow \widehat{ACB} > \widehat{BAC} > \widehat{ABC}\ hay\ \widehat{C} > \widehat{A} > \widehat{B}$ (Định lý 1)

d) Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác ΔABC vuông ở B

Ta có: $BA^2 + BC^2 = AC^2$

$\left(\sqrt{19}\right)^2 + BC^2 = 6^2$

$19 + BC^2 = 36$

$BC^2 = 36 - 19$

$BC^2 = 17$

$\Rightarrow BC = \sqrt{17}$ (cm) $\approx 4,13$ (cm)

$\triangle ABC$ có: $AB = \sqrt{19}cm \approx 4,35cm;$ BC $= \sqrt{17}cm \approx 4,13cm;\ AC = 6cm.$

$\Rightarrow AC > AB > BC$

$\Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ACB} > \widehat{BAC}\ hay\ \widehat{B} > \widehat{C} > \widehat{A}$ (Định lý 1)

Bài 2:

So sánh góc trong tam giác: $\Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$. Góc ngoài tại các đỉnh B < Góc ngoài tại đỉnh C.

Bài 3:.

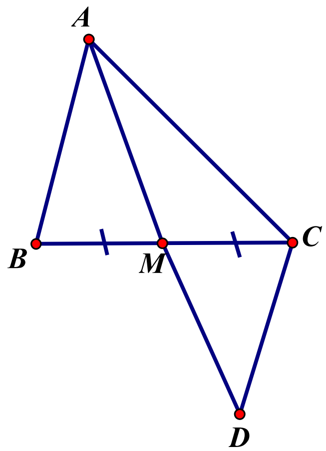
Giải: AB là cạnh nhỏ nhất nên $\hat{B} \ge \hat{C}, \hat{A} \ge \hat{C} \qquad 3\hat{C} \le \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$
$\Rightarrow 3\hat{C} \le \hat{C} + B \Rightarrow \hat{C} \le 60^o$

Bài 4:

Theo giả thiết ta có: $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ và $BC > B_1C_1$

Thì $A > A_1$ (quan hệ giữa các cạnh đối diện trong tam giác)

Bài 5:



Giải: Vẽ tia đối của tia MA và trên đó

lấy điểm D sao cho MD = MA

Xét tam giác MAB và tam giác MDC có

MA = MD; $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh)

MB = MC (M là trung điểm của cạnh BC)

Do đó: $\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c)

Suy ra: AB = CD; $\widehat{BAM} = \widehat{MDC}$

Ta có: AB = CD; AB < AC $\Rightarrow$ CD < CA

Xét tam giác ADC có: CD < AC $\Rightarrow$ $\widehat{MAC} < \widehat{MDC}$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

Mà $\widehat{MAC} < \widehat{MDC}$ và $\widehat{BAM} = \widehat{MDC}$

Suy ra: $\widehat{MAC} < \widehat{BAM}$

Bài 6:

Trong tam giác vuông cạnh huyền là cạnh lớn nhất vì cạnh huyền đối diện với góc vuông .

Trong tam giác tù cạnh đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất vì góc tù là góc lớn nhất trong tam giác

Bài 7:

Xét tam giác ABC. Có $\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{C} < 60^o. \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o \le \hat{A} + 120^o\end{array} \Rightarrow \hat{A} \ge 60^o \Rightarrow \hat{A} \ge \hat{C} = \hat{B}$. Vậy cạnh đáy lớn hơn cạnh bên

Bài 8: Cho tam giác ABC cân tại A, biết $\widehat{B}$ = 45⁰.

a) So sánh các cạnh của tam giác ABC.

b) Tam giác ABC còn gọi là tam giác gì? Vì sao?

Giải:

a) Tam giác ABC cân tại A nên $\hat{C} = \hat{B}$ = 45⁰ => $\hat{A} = 90^0$

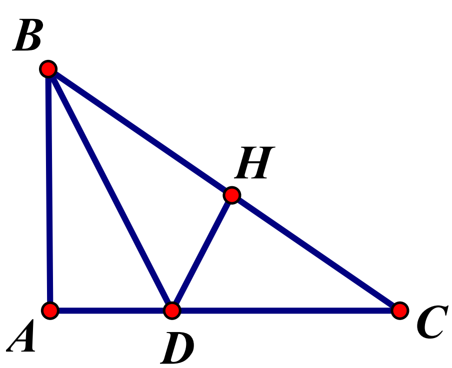
Vậy $\hat{A} = 90^0$ > $\hat{C} = \hat{B}$ = 45⁰

=> BC > AB = AC

b) Tam giác ABC vuông cân tại A vì $\hat{A} = 90^0$

Bài 9:

a) Kẻ DH $\perp$ BC



$\Delta ABD = \Delta HBD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$BA = BH$

$\Rightarrow$ AD = DH

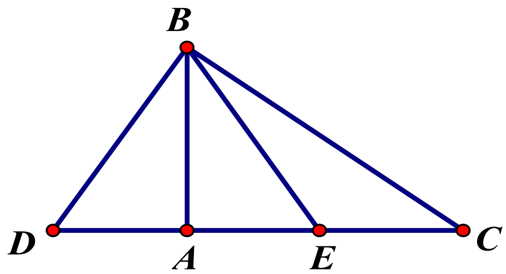
b) ΔDHC vuông tại H $\Rightarrow$ DH < DC

ΔDHC (cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền)

suy ra: AD < DC

Bài 10: Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 90^0$. Trên tia đối của tia AC lấy D sao cho AD < AC. Nối B với D. Chứng minh rằng: BC > BD

Lấy E thuộc AC sao cho AD = AE



Ta có: AE < AC (Vì AD < AC)

Nên E nằm giữa A và C

Mà BA $\perp$ DE và DA = AE

$\Rightarrow$ ΔBDE cân đỉnh B

$\Rightarrow$ $\widehat{BDE} = \widehat{BEA}$

Ta có: $\widehat{BEA} > \widehat{BCE}$ (BEA là góc ngoài của tam giác BEC)

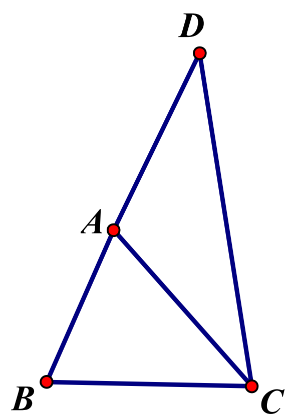
Do đó: $\widehat{BDC} > \widehat{BCD}$

Xét tam giác BDC có: $\widehat{BDC} > \widehat{BCD}$

Suy ra: BC > BD (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác)

Bài 6: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng AB + AC > BC

Giải:



Trên tia đối của tia AB lấy điểm D

sao cho AD = AC

Ta có: AD = AC $\Rightarrow \Delta ADC$ cân đỉnh D

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACD}$ (1)

Tia CA nằm giữa hai tia CB và CD

Do đó: $\widehat{BCD} > \widehat{ACD}$ (2)

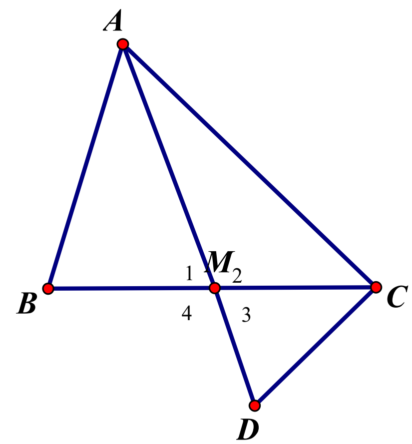
Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{BCD} > \widehat{ADC}$

Xét tam giác DBC có $\widehat{BCD} > \widehat{BDC}$

suy ra DB > BC (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác) (3) mà DB = AB + AD = AB + AC (4)

Từ (3) và (4) ta có: AB + AC > BC

Bài 11: Cho tam giác ABC trung tuyến AM. Lấy điểm D bất kì trên tia đối của tia MA. So sánh độ dài CD và BD.



Giải

Ta lần lượt nhận thấy

Với hai tam giác ABM và ACM có:

MB = MC (Vì M là trung điểm BC);AM chung; AB < ACDo đó: $\hat{M}_1 < \hat{M}_2 \Rightarrow \hat{M}_3 < \hat{M}_4$

Với hai tam giác BDM và CDM có

MB = MC (M là trung điểm của BC)

DM chung; $\hat{M}_3 < \hat{M}_4$. Do đó: CD < BD

Bài 12. Trong tam giác vuông, góc vuông là góc lớn nhất nên cạnh huyền (đối diện với góc vuông) là cạnh lớn nhất.

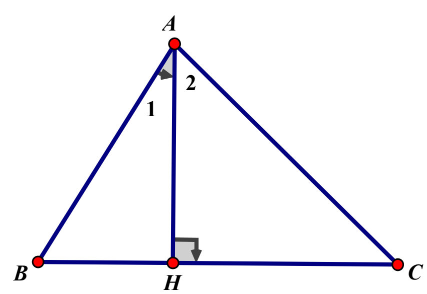
Bài 13. Tính được $\hat{B} = \hat{C} = 65^0$, do đó $\hat{C} > \hat{A} \Rightarrow AB > BC$

Bài 14.

Ta có $AB < AC \Rightarrow \hat{C} > \hat{B}$

Chú ý $\hat{A}_1 = 90^0 - \hat{B}$; $\hat{A}_2 = 90^0 - \hat{C}$

$\Rightarrow \hat{A}_1 < \hat{A}_2$

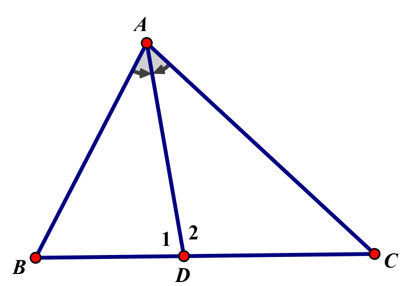


Bài 15.

Chú ý: $\hat{D}_1 = \hat{C} + \dfrac{\hat{A}}{2}$; $\hat{D}_2 = \hat{B} + \dfrac{\hat{A}}{2}$

Mà $AB < AC \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$

Nên $\hat{D}_1 < \hat{D}_2$

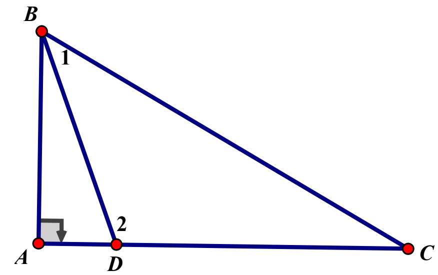


Bài 16.

Tính được

$\hat{B}_1 = 40^0; \hat{D}_1 = 110^0; \hat{C} = 30^0$

Từ đó ta có DB < DC < BC



Bài 17.

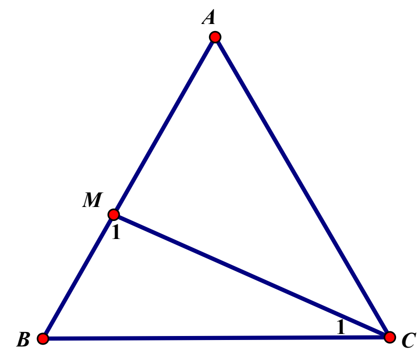
Ta có $\hat{C}_1 < \hat{A} = 60^0$

Chú ý $\hat{M}_1$ là góc ngoài của tam giác AMC nên $\hat{M}_1 > \hat{A} = 60^0$

Do đó

$\hat{M}_1 > \hat{B} > \hat{C}_1$

$\Rightarrow MB < MC < BC$



Bài 18.

a) Ta có

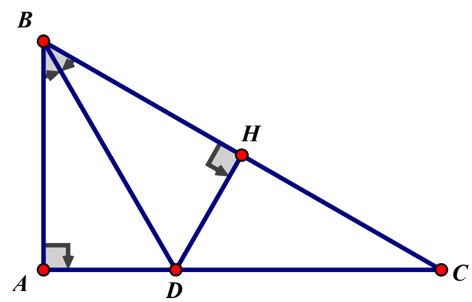
$\Delta ABD = \Delta HBD \quad (ch - gn)$

$\Rightarrow BA = BH$

b) Chứng minh được DA = DH

Lại có tam giác DHC vuông tại H nên DH < DC

=> DA < DC



Bài 19.

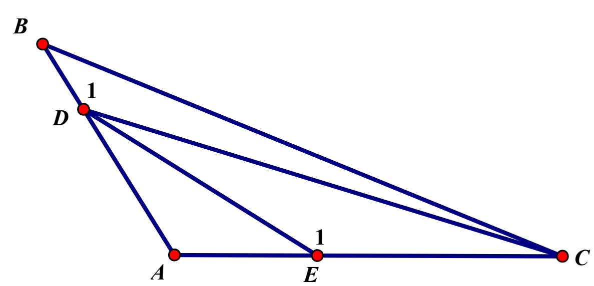
Chú ý $\hat{E}_1$ là góc ngoài của tam giác DAC

nên $\hat{E}_1 > \hat{A} > 90^0 \Rightarrow DE < DC$

Tương tự ta có

$\hat{D}_1 > \hat{A} > 90^0 \Rightarrow DC < BC$

Do đó $DE < DC < BC$



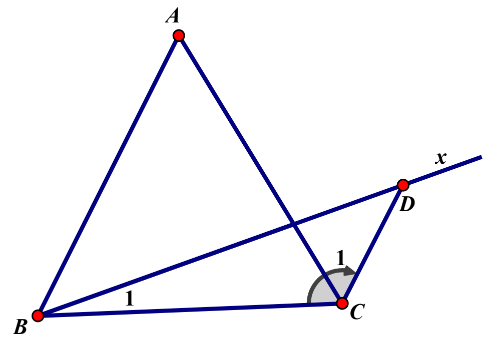
Bài 20.

Do Bx nằm giữa BA và BC

nên $\hat{B}_1 < \hat{B}$

Chú ý D nằm ngoài tam giác ABC nên CA nằm giữa CD và CB, do đó $\hat{C}_1 > \hat{C}$

Từ đó $\hat{C}_1 > \hat{B}_1 \Rightarrow DC < DB$



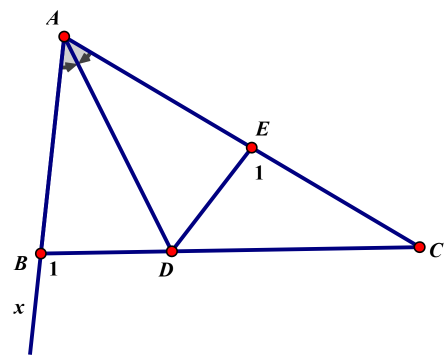
Bài 21.

Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AB = AE, chứng minh được

$\Delta ABD = \Delta AED \ (c.g.c)$

$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}_1 > \hat{C}$ và $DB = DE$

Từ đó DB = DE < DC



Bài 18.

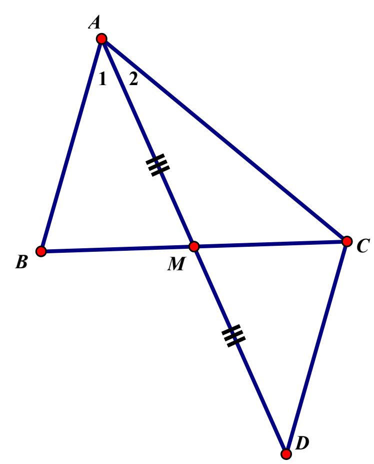
Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MA = MD, chứng minh được

$\Delta MAB = \Delta MDC \ (c.g.c)$

$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}$

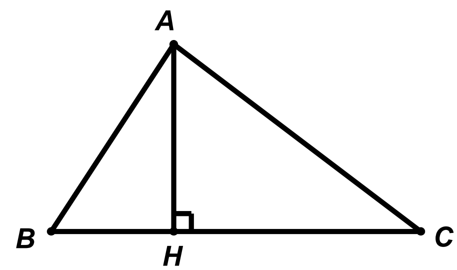
Chú ý rằng CD = AB < AC

$\Rightarrow \hat{A}_2 < \hat{D}$. Do đó $\hat{A}_1 > \hat{A}_2$



BÀI 32. QUAN HỆ ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

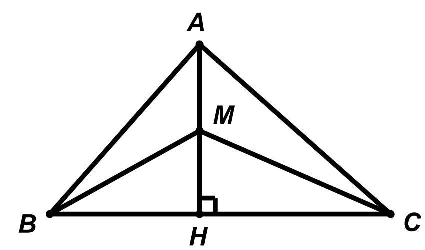
VD 1.1.



Ta có $AH \perp BC$ nên AH là đường vuông góc còn AB và AC là các đường xiên và BH, CH tương ứng là hình chiếu của AB, AC lên đường thẳng BC.

Vì $AB < AC$ nên $HB < HC$

VD 1.2.



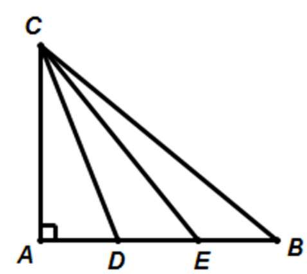
Ta có BH, CH tương ứng là hình chiếu của hai đường xiên AB, AC trên đường thẳng BC.

Vì $AB < AC \Rightarrow BH < CH$.

Mặt khác BH, CH tương ứng là hình chiếu của hai đường xiên BM, CM lên đường thẳng BC.

Do $BH < CH$ nên $BM < CM$.

VD 1.3.



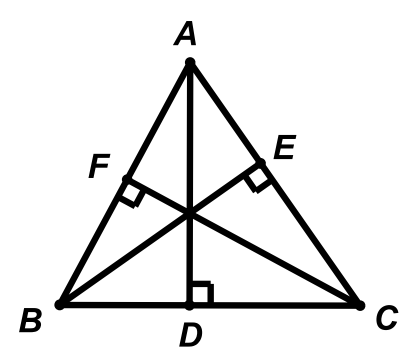
Xét trên cạnh AB, ta có $AD = DE = EB \Rightarrow AD < AE < AB$.

Vì $CA \perp AB$ nên AD, AE, AB tương ứng là hình chiếu của các đường xiên CD, CE, CB lên đường thẳng AB. Do $AD < AE < AB \Rightarrow CD < CE < CB$ (1)

Mặt khác $CA < CD$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CA < CD < CE < CB$.

VD 2.1.



a) Ta có $\begin{cases} AD < AB \\ AD < AC \end{cases}$ (đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên)

Do đó $AD + AD < AB + AC$ hay $AD < \dfrac{AB + AC}{2}$ (1)

b) $BE \perp AC \Rightarrow BE$ là đường vuông góc còn BA, BC là các đường xiên

$\Rightarrow BE < BA, BE < BC$

$\Rightarrow BE + BE < BA + BC$ hay $BE < \dfrac{AB + BC}{2}$ (2)

Chứng minh tương tự ta có: $CF < \dfrac{AC + BC}{2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$AD + BE + CF < \dfrac{AB + AC}{2} + \dfrac{AB + BC}{2} + \dfrac{AC + BC}{2}$ .Hay $AD + BE + CF < AB + BC + AC$

(đpcm).

VD 2.2.

Ta có $AB > AH, AC > AH$ (đường xiên lớn hơn đường vuông góc)
$\Rightarrow AB + AC > AH + AH$

Hay $AB + AC > 2AH$ (1)

Ta cũng có $AB > BH, AC > CH$ (đường xiên lớn hơn đường vuông góc)
$\Rightarrow AB + AC > BH + CH$

Hay $AB + AC > BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2\left(AB + AC\right) > 2AH + BC$

$\Rightarrow AB + AC > AH + \dfrac{BC}{2}$ (*)

Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$

$\Rightarrow \Delta ABE$ cân ở $B \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BEA}$

Mặt khác $\widehat{BAE} = \widehat{AEF}$ (cùng phụ với $\widehat{EAF}$).

Suy ra $\widehat{BEA} = \widehat{AEF}$

$\Rightarrow \Delta AHE = \Delta AFE$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow AH = AF$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó $BC + AH = BE + EC + AH = BA + EC + AF$.

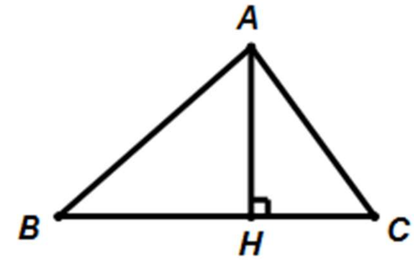
Vì $EC > CF$ (đường xiên lớn hơn đường vuông góc)

Nên $BC + AH > BA + CF + AF$

Hay $BC + AH > BA + AC$ (**)

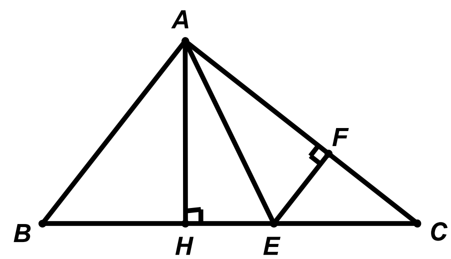
Từ (*) và (**) suy ra điều phải chứng minh.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP



Bài 1. Ta có BH là hình chiếu của đường xiên AB lên đường thẳng BC và CH là hình chiếu của đường xiên AC lên đường thẳng BC. Do $AB > AC$ nên $BH > CH$.

Bài 2.

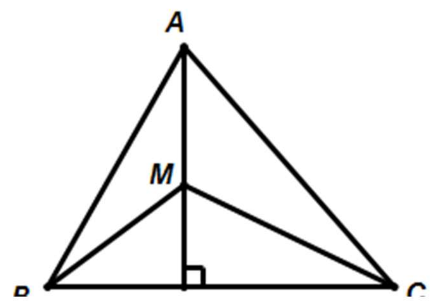


a) Ta có $AH \perp BC \Rightarrow AH$ là đường vuông góc còn AB là đường xiên $\Rightarrow AH < AB$ (1)

Lập luận tương tự AC là đường xiên còn AH là đường vuông góc $\Rightarrow AH < AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH + AH < AB + AC$

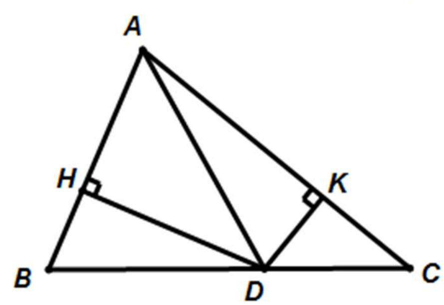
hay $AH < \dfrac{AB + AC}{2}$.



b) Ta có BH và CH tương ứng là hình chiếu của đường xiên AB và AC lên đường thẳng BC. Vì $AB < AC$ nên $BH < CH$.

Mặt khác BH và CH là hình chiếu của đường xiên MB và MC. Do $BH < CH$ nên $MB < MC$.

Bài 3.

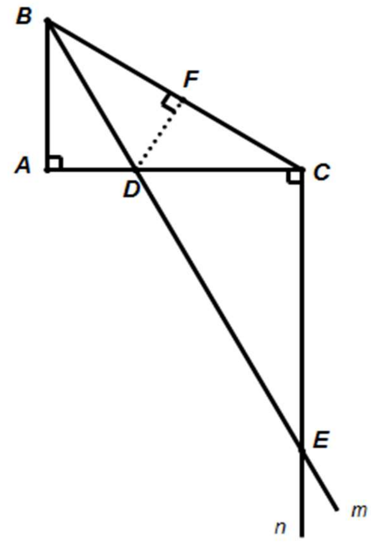


Ta có $DH < BD$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên)

$DK < DC$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên)

Suy ra $DH + DK < BD + DC$ hay $DH + DK < BC$.

Bài 4.



a) Kẻ $DF \perp BC\left(F \in BC\right) \Rightarrow DF < DC$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên).

Tam giác ABD và tam giác FBD có:

+ $\hat{A} = \hat{F} = 90^0$

+ Cạnh huyền BD chung

+ $\widehat{ABD} = \widehat{FBD}$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta FBD (ch - gn) \Rightarrow AD = FD \Rightarrow AD < DC$ (vì $DF < DC$)

Ta lại có $ED > EC$ (đường xiên dài hơn đường vuông góc). Do đó $ED + EC > EC + EC$ hay $ED + EC > 2EC$ (1)

Mặt khác ta có $AB // EC \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CED}$ (2 góc so le trong) mà $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ (BD là tia phân giác góc ABC). Suy ra $\widehat{CED} = \widehat{CBE} \Rightarrow \Delta BCE$ cân ở $C \Rightarrow CB = CE$ (2)

Lại có: $CA > AD \Rightarrow BC > BD$ (hình chiếu lớn hơn thì đường xiên lớn hơn) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $ED + EC > 2BD$ (4)

Mà $BD > BA \Rightarrow 2BD > BD + BA$ (5)

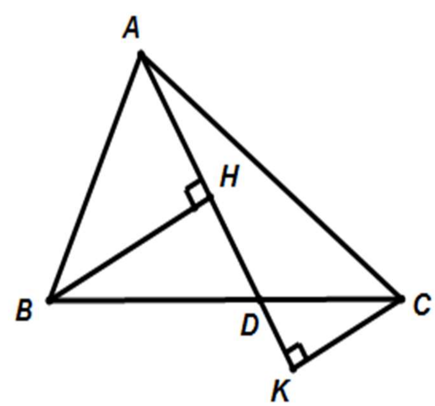
Từ (4), (5) suy ra $ED + EC > BD + BA$

Lại có $DC > AD$ (chứng minh trên)

Ta suy ra $ED + EC + DC > BD + BA + AD$ (đpcm).

Vậy: chu vi tam giác ABD nhỏ hơn chu vi tam giác CDE.

Bài 5. Ta có $DH \perp HB \Rightarrow DH$ là đường vuông góc còn DB là đường xiên $\Rightarrow DH < BD$ (1)



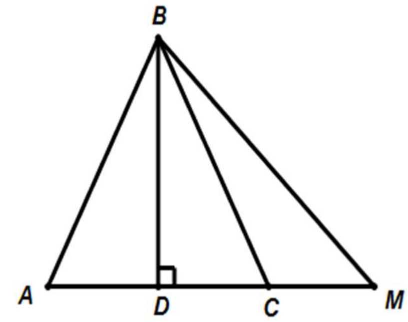
$DK \perp CK \Rightarrow DK$ là đường vuông góc

Còn CD là đường xiên $\Rightarrow DK < CD$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có

$DH + DK < BD + CD$ hay $DH + DK < BC$ (đpcm).

Bài 6.



a) Xét tam giác BDA và BDC có:

+ $\widehat{BDA} = \widehat{BDC} = 90^0$

+ BD chung

+ $BA = BC$ (vì ΔABC cân ở B)

$\Rightarrow \Delta BDA = \Delta BDC$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông)

$\Rightarrow DA = DC$ hay D là trung điểm AC

Ta có $DC < DM$ (vì C nằm giữa D và M)

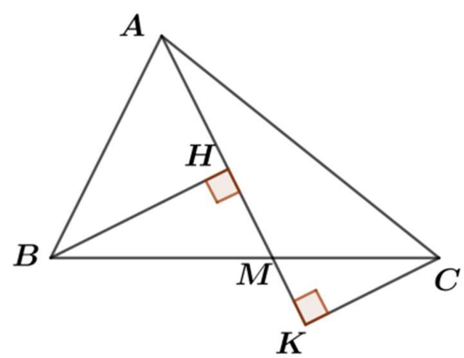
Suy ra $DA < DM$

b) Ta có DC là hình chiếu của đường xiên BC lên đường thẳng AC

DM là hình chiếu của đường xiên BM lên đường thẳng AC

Vì $DC < DM$ nên $BC < BM$. Mà $BC = BA$, từ đó suy ra $BA < BM$.

Bài 7.



a) Kẻ $BH \perp AM; CK \perp AM (H, K \in AM)$

Theo đề ra , ta có : $d = BH + CK$

Ta có : $BH \leq BM$ (quan hệ đường vuông góc , đường xiên)

Và $BH = BM$ khi và chỉ khi $H \equiv M$ hay $AM \perp BC$ (1)

Lại có $CK \leq CM$ (quan hệ đường vuông góc , đường xiên)

Và $CK = CM$ khi và chỉ khi $K \equiv M$ hay $AM \perp BC$ (2)

Từ $(1);(2)$ suy ra : $BH + CK \leq BM + CM = BC$ hay $d \leq BC$ (đpcm) .

b) Giá trị lớn nhất của d bằng BC (ta viết $d_{max} = BC$) khi và chỉ khi $AM \perp BC$, hay M là hình chiếu của A lên BC . Vì hai góc B và C nhọn nên khi đó M nằm giữa B và C - thỏa mãn điều kiện .

Nhận xét : Ví dụ trên thuộc dạng toán "cực trị hình học": Xác định vị trí của một điểm (hay một hình để một đại lượng (có độ dài đoạn thẳng , số đo góc, diện tích ,.......) có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất .

BÀI 33. QUAN HỆ BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

VD 1.1. Gọi độ dài cạnh AB là x (cm)$\left(x>0\right)$.

Theo bất đẳng thức trong tam giác ABC ta có: $\left|BC-AC\right|<AB<BC+AC$

$$\left|1-7\right|<x<1+7\Leftrightarrow 6<x<8.$$

Vì x là số nguyên nên $x=7$. Vậy độ dài cạnh $AB=7\text{cm}$.

VD 1.2.

TH1: Nếu AB là cạnh bên và ΔABC cân tại A

$\Rightarrow AB=AC=5\text{cm}\Rightarrow BC=13cm$.

Lại có: $BC-AB>AC$ $\left(13-5>5\right)$ (không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác).

TH2: Nếu AB là cạnh bên và ΔABC cân tại B

$\Rightarrow AB=BC=5\text{cm}\Rightarrow AC=13\text{cm}$.

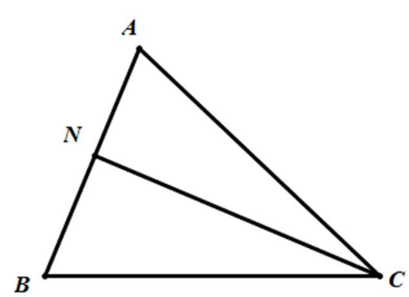
Lại có: $AC-AB>BC$ $\left(13-5>5\right)$ (không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác).

TH3: Nếu AB là cạnh đáy thì ΔABC cân tại C.

$\Rightarrow AC=BC=\left(23-5\right):2=9\text{cm}$ (thỏa mãn bất đẳng thức tam giác)

Vậy: $AC=BC=9\text{cm}$.

VD 2.1.



a) Xét ΔANC, ta có:

$NC<AN+AC$ (bất đẳng thức tam giác)

b) Theo câu a) ta có:

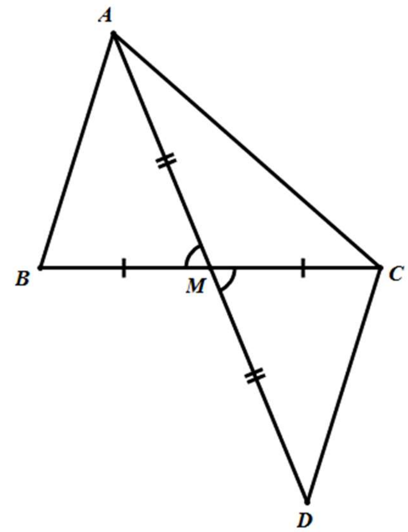
$NC<AN+AC$

$\Rightarrow NB+NC<NB+AN+AC$

$\Leftrightarrow NB+NC<AB+AC$ (đpcm).

VD 2.2 Trên tia AM lấy điểm D sao cho $AM = MD$.

Xét hai ΔAMB và ΔDMC có:



$AM = MD$ (giả thiết); $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh);

$BM = MC$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta DMC$ (c – g – c)

$\Rightarrow AB = DC$ (hai cạnh tương ứng)

Xét ΔACD có:

$DC - AC < AD < AC + DC$ (bất đẳng thức tam giác)

Do $AB = DC$ (cmt); $AD = 2AM$ (giả thiết) nên ta có:

$AB - AC < 2AM < AB + AC$. Vậy:

$\frac{AB - AC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}$

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

a) Đây không phải độ dài ba cạnh của tam giác bởi 2 + 7 =9

b) Đây chình là độ dài ba cạnh của tam giác bởi 5 + 6 >7; 6+7 >5; 5+ 7>6

c) Đây chình là độ dài ba cạnh của tam giác bởi 3 + 4> 5; 4 + 5 >3; 3+ 5>4

d) Đây không phải độ dài ba cạnh của tam giác bởi 2 + 3 < 6

Bài 2.

Quãng đường của bạn Hòa: BC

Quãng đường của bạn Bình: $AB + AC$

Quãng đường đi được của bạn Hòa ngắn hơn.

Ta thấy: $AB + AC > BC$

Bài 3. Điều kiện về độ dài cho cạnh AB là : $\left|AC - BC\right| < AB < AC + BC$

$$\left|8 - 1\right| < AB < 8 + 1$$
$$7 < AB < 9$$

Suy ra: $AB = 8cm$ vì nó có điều kiện nguyên. Khi đó ΔABC có $AB = AC$ nên nó cân tại A

Bài 4:

a) Điều kiện về độ dài cho cạnh AC là

$|BC - AB| < AC < BC + AB$

$|7,9 - 3,9| < AC < 7,9 + 3,9$

$4 < AC < 11,8$

$\Rightarrow AC = 7,9cm$

b) ΔABC có $AC = BC = 7,9cm$ nên nó cân tại C

c) Chu vi: $AB + AC + BC = 3,9 + 7,9 + 7,9 = 19,7cm$

Bài 5. Giả sử tam giác có ba cạnh a, b, c ta cần đi chứng minh:

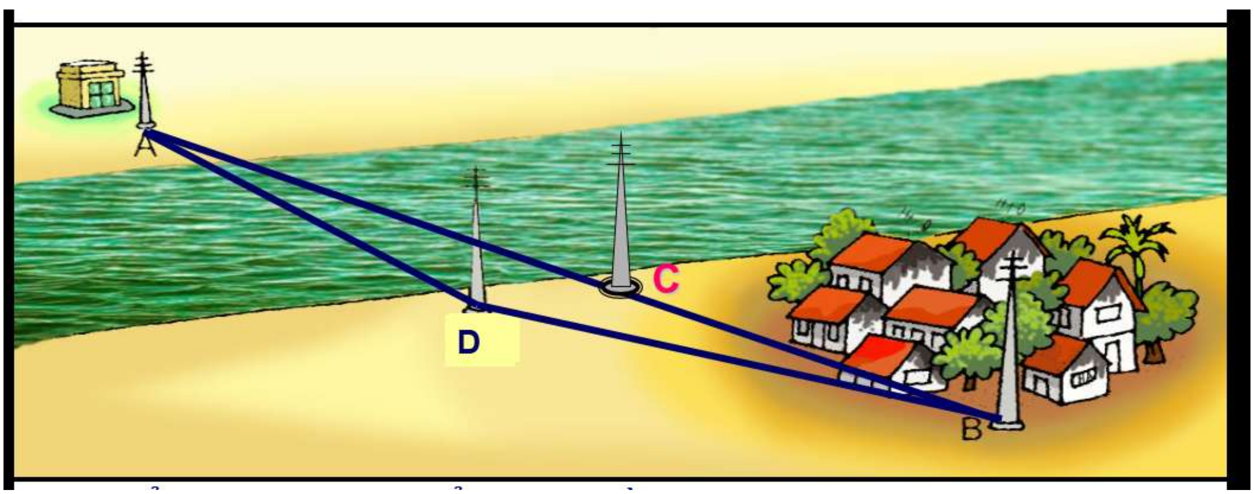
$a < \frac{1}{2}(a+b+c)$; $b < \frac{1}{2}(a+b+c)$; $c < \frac{1}{2}(a+b+c)$

Thật vậy ta luôn có: $a < b + c \Rightarrow a + a < a + b + c$

$$2a < a + b + c \Rightarrow a < \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Các đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

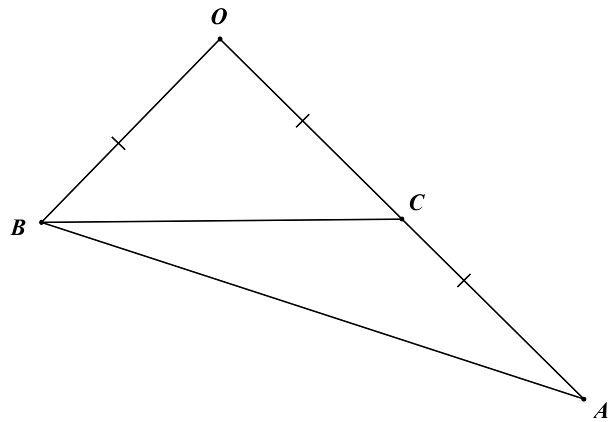
Bài 6.



Địa điểm C thuộc đường thẳng AB và gần bờ sông có khu dân cư vì đường dây dẫn ngắn nhất khi: $AC + BC = AB$

Thật vậy, nếu dựng điểm D khác C thì theo bất đẳng thức tam giác ta có: $AD + BD > AB$

Bài 7.



Xét ΔOBA có $AB + BO > OA$ hay

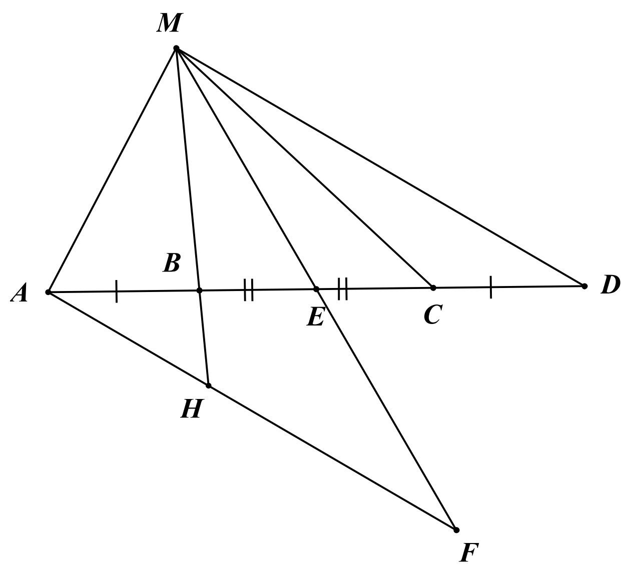
$AB + BO > OA + AC$ (1)

Mà $\left.\begin{matrix} OB = OC \\ CO = AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OB = AC$ (2)

Từ (1) và (2) => $AB + BO > BO + AC$ =>

$AB > AC$

Bài 8.



a) Có $\Delta MAE = \Delta FDE(c-g-c) \Rightarrow \hat{A} = \hat{D} \Rightarrow AM//DF$

Có $\Delta MCE = \Delta FBE(c-g-c) \Rightarrow \hat{C} = \hat{B} \Rightarrow MC//BF$

b) Ta có:

$$\left.\begin{matrix} \Delta AMH: AM + AH > MH \\ \Delta BHF: BH + HF > BF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM + AH + BH + HF > MH + BF$$

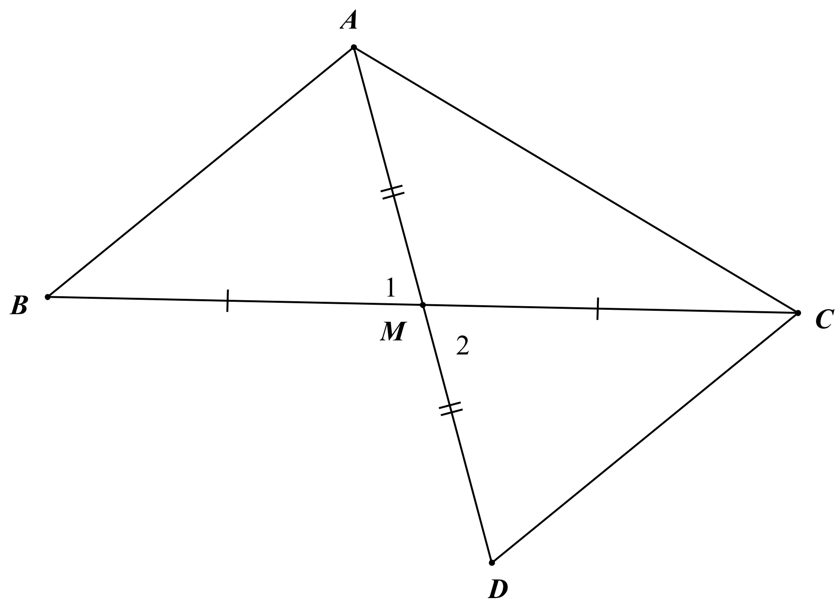
$$\Rightarrow AM + AH + BH + HF > MB + BH + BF$$

$$\Rightarrow AM + AH + HF > MB + BF$$

c) Ta có $AH + HF = AF; AF = MD; MC = BF$

Mà $AM + AH + HF > MB + BF$. Suy ra $AM + MD > MA + MC$

Bài 9.

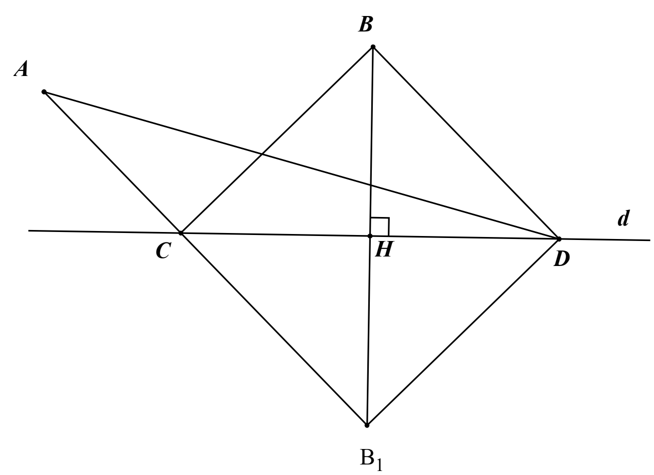


a) Ta chưng minh: $\Delta AMD = \Delta DMC$ (c – g – c)

b) Có ΔABD có $AB + BD > AD$ hay $AB + BD > 2AM$

Mà $BD = AC$ Vì $\Delta BMD = \Delta CMA$. Khi đó $AB + AC > 2AM$

Bài 10



Kẻ $BH \perp d$. Trên tia đối của tia HB lấy điểm B_1 sao cho $BH = B_1H$

Gọi làC là giao điểm của AB_1 và d. D là điểm bất kì trên d $(D \neq C)$. Ta cần đi chứng minh $CA + CB < DA + DB$

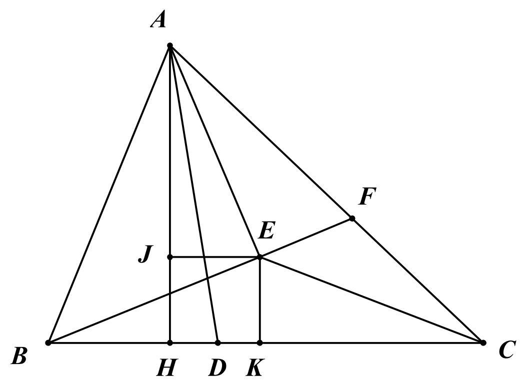
Thật vậy, trong ΔAB_1D, ta luôn có: $AB_1 < DA + DB_1 <=> CA + CB_1 < DA + DB_1$ (1)

$\Delta HBC = \Delta HB_1C \Rightarrow CB = CB_1$
$\Delta HDB = \Delta HB_1D \Rightarrow DB = DB_1$ (2)

Thay (2) vào (1) , ta được: $CA + CB < DA + DB$

Vậy điểm C cần tìm chính là giao điểm của AB_1 và d.

Bài 11.



a) Xét ΔADC có AD < AC + CD (bđt tam giác)

Xét ΔADB có AD < AB + BD (bđt tam giác)

Cộng từng vế hai bđt trên ta được

$AD + AD < AB + AC + BD + DC$

$2AD < AB + BC + AC$

$\Rightarrow AD < \dfrac{AB + BC + AC}{2}$

Vậy AD bé hơn nửa chu vi ΔABC.

b)Trong các $\Delta AEC; AEB; BEC$ áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có :

$$\left.\begin{array}{l} AE + CE > AC \\ AE + BE > AB \\ BE + CE > BC \end{array}\right\} \Rightarrow 2(AE + BE + CE) > AB + AC + BC$$

$\Rightarrow AE + BE + CE > \dfrac{AB + AC + BC}{2}$

Vậy tổng khoảng cách từ E đến mỗi đỉnh tam giác luôn lớn hơn nửa chu vi ΔABC.

Kéo dài BE cắt AC tại F. Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào tam giác ABF ta được:

BF < AB + AF => BE + EF < AB + AF (1)

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào tam giác EFC ta được:

EC < EF + FC (2)

Cộng từng vế của (1) với (2) ta được: BE + EF + EC < AB + AF + EF + FC

EB + EC < AB + AC. (4)

Chứng minh tương tự ta được:

EA + EB < AC + BC (5)

EA + EC < AB + BC (6)

Cộng theo từng vế của (4), (5), (6) ta được :

$2(EA+EB+EC)<2(AB+AC+BC)$

$\Rightarrow EA+EB+EC<AB+AC+BC.$

Vậy tổng khoảng cách từ E đến mỗi đỉnh tam giác luôn bé hơn chu vi ΔABC.

c) Gọi S là diện tích ΔABC, kẻ $AH\perp BC\ (H\in BC), EK\perp BC\ (K\in BC)$

Khi đó

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC; S_{\Delta EBC}=\frac{1}{2}EK.BC; S_{\Delta AEB}+S_{\Delta AEC}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta EBC}=\frac{1}{2}AH.BC-\frac{1}{2}EK.BC=\frac{1}{2}BC(AH-EK)$$

Theo bài ra ta phải chứng minh $S_{\Delta AEB}+S_{\Delta AEC}\le\frac{1}{2}AE.BC$ suy ra $\frac{1}{2}BC(AH-EK)$

$\le\frac{1}{2}AE.BC$

Hay $AE\ge AH-EK$.

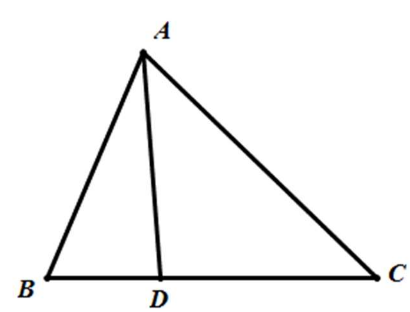
Thật vậy từ E ta kẻ EJ//BC, do AH//EK(cùng vuông góc với BC) nên ta chứng minh được EK = JH

Và ΔAJE vuông tại J. Trong ΔAJE vuông tại J có $AE\ge EJ\Rightarrow AE\ge AH-EK$.

Dấu " = " xảy ra khi $E\in AH$.

Vậy $S_{\Delta AEB}+S_{\Delta AEC}\le\frac{1}{2}AE.BC$.

Bài 12.



Xét tam giác ABD, có:

$AD>AB-BD$ (bất đẳng thức tam giác) (1)

Xét tam giác ADC, có:

$AD>AC-DC$ (bất đẳng thức tam giác) (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta có:

$2AD > AB + AC - (BD + DC)$

Hay $2AD > AB + AC - BC$

$\Rightarrow AD > \dfrac{AB + AC - BC}{2}$

Chứng minh tương tự ta có:

$AD < AB + BD$ và $AD < AC + DC$

Suy ra: $2AD < AB + AC + (BD + DC)$

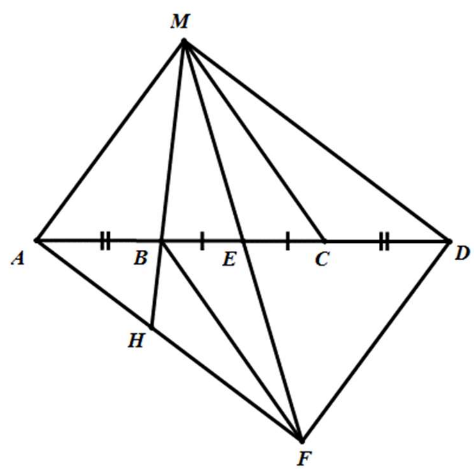
Hay $2AD < AB + AC + BC$

$\Rightarrow AD < \dfrac{AB + AC + BC}{2}$

Vậy $\dfrac{AB + AC - BC}{2} < AD < \dfrac{AB + AC + BC}{2}$ (đpcm).

Bài 13.

a) Ta có:



$\left.\begin{array}{l} AB = CD(\text{gt}) \\ BE = CE(\text{gt}) \end{array}\right\} \Rightarrow AB + BE = CD + CE$

Hay $AE = DE$.

Xét ΔAEM và DEF, có:

$AE = DE$ (chứng minh trên);

$\widehat{MEA} = \widehat{FED}$ (đối đỉnh);

$ME = FE$ (giả thiết);

Nên suy ra $\Delta AEM = \Delta DEF$ (c – g – c).

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{FDE}$ (hai góc tương ứng).

Hay $\widehat{MAD} = \widehat{FDA}$ (mà hai góc này ở vị trí so le trong)

$\Rightarrow MA // DF$.

b) Xét ΔAMH, có:

$AM + AH > MH$ (bất đẳng thức tam giác) (1)

Xét ΔBHF, có:

$BH + HF > BF$ (bất đẳng thức tam giác) (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta có:

$\Rightarrow AM + AH + BH + HF > MH + BF$

$\Rightarrow AM + AH + BH + HF > MB + BH + BF$

$\Rightarrow AM + AH + HF > MB + BF$

Vậy $AM + AH + HF > MB + BF$. (3)

c) Xét ΔAEF và DEM, có:

$AE = DE$ (chứng minh trên);

$\widehat{FEA} = \widehat{MED}$ (đối đỉnh);

$ME = FE$ (giả thiết);

Nên suy ra $\Delta AEF = \Delta DEM$ (c – g – c).

$\Rightarrow AF = DM$ (hai cạnh tương ứng). (4)

Xét ΔBEF và CEM, có:

$BE = CE$ (giả thiết);

$\widehat{FEB} = \widehat{MEC}$ (đối đỉnh);

$ME = FE$ (giả thiết);

Nên suy ra $\Delta BEF = \Delta CEM$ (c – g – c).

$\Rightarrow BF = CM$ (hai cạnh tương ứng). (5)

Lại có: $AH + HF = AF$. (6)

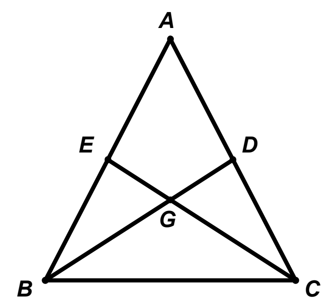
Từ (3), (4), (5), (6) suy ra $MA + MD > MB + MC$.

BÀI 34. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN, BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG MỘT TAM GIÁC

VD 1.1

a) Ta có ABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC$ mà $AB = 2BE; AC = 2CD$ (vì E, D theo thứ tự là trung điểm của AB, AC).

Do đó ta có $2BE = 2CD$ hay $BE = CD$.



Xét tam giác BCE và CBD có: $BE = CD$ (cmt); $\widehat{EBC} = \widehat{DCB}$; BC là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta BCE = \Delta CBD$ (c-g-c)

$\Rightarrow CE = BD$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có G là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow BG = \dfrac{2}{3}BD$ và $CG = \dfrac{2}{3}CE$ (tính chất trọng tâm)

Mà $CE = BD$ (phần b) $\Rightarrow \dfrac{2}{3}CE = \dfrac{2}{3}BD$ hay $CG = BG$

Vậy tam giác GBC cân tại G.

c) Ta có $GB = \dfrac{2}{3}BD \Rightarrow GD = \dfrac{1}{3}BD \Rightarrow GB = 2GD \Rightarrow GD = \dfrac{1}{2}GB$

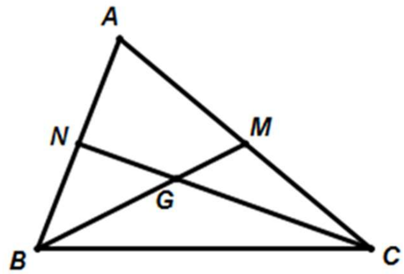
Chứng minh tương tự: $GE = \dfrac{1}{2}GC$.

Do đó $GD + GE = \dfrac{1}{2}GB + \dfrac{1}{2}GC = \dfrac{1}{2}(GB + GC)$

Mà $GB + GC > BC$ (trong một tam giác tổng độ dài hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại)

Nên $GD + GE > \dfrac{1}{2}BC$ (đpcm).

VD 1.2.



Xét tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Suy ra G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow BG = \frac{2}{3}BM; CG = \frac{2}{3}CN \Rightarrow BM = \frac{3}{2}BG; CN = \frac{3}{2}CG$.

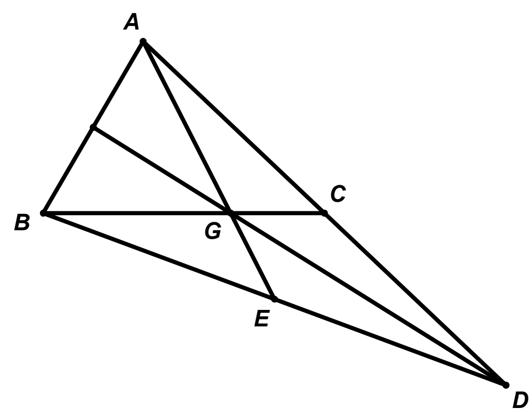
Do đó ta phải chứng minh $\frac{3}{2}BG + \frac{3}{2}CG > \frac{3}{2}BC$

Hay $BG + CG > BC$ (1)

Bất đẳng thức (1) đúng (trong một tam giác tổng độ dài hai cạnh lớn hơn độ dài cạnh còn lại).

Vậy $BM + CN > \frac{3}{2}BC$ (đpcm).

VD 1.3.



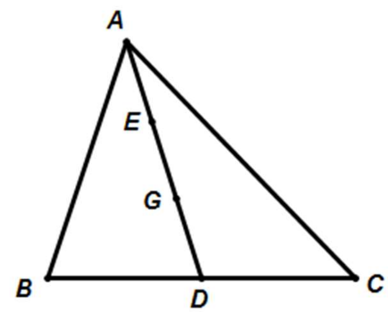
a) Xét tam giác ABD có C là trung điểm của cạnh $AD \Rightarrow BC$ là trung tuyến của tam giác ABD.

Hơn nữa $G \in BC$ và

$GB = 2GC \Rightarrow GB = \frac{2}{3}BC \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác này $\Rightarrow A, G, E$ thẳng hàng (do AE là đường trung tuyến của tam giác ABD).

b) Ta có G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow$ đường thẳng DG là đường trung tuyến của tam giác này. Suy ra DG đi qua trung điểm của cạnh AB (đpcm).

VD 2.1.

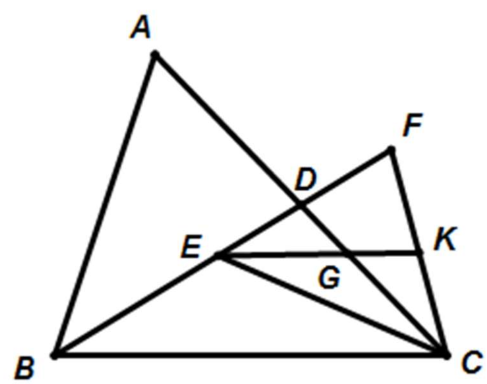


Ta có $AD = AE + EG + GD$ mà $AE = EG = GD$ nên $AD = 3AE$

$\Rightarrow AE = EG = GD = \frac{1}{3}AD \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AD$

Vì AD là đường trung tuyến và $AG = \frac{2}{3}AD$ nên G là trọng tâm tam giác ABC.

VD 2.2.



a) Ta có $BF = 2BE(gt) \Rightarrow BE = EF$ mà $BE = 2ED$ nên $EF = 2ED$.

$\Rightarrow D$ là trung điểm của $EF \Rightarrow CD$ là đường trung tuyến của tam giác EFC.

Tam giác EFC có hai đường trung tuyến CD và EK cắt nhau tại G nên G là trọng tâm tam giác EFC.

b) Ta có G là trọng tâm tam giác EFC

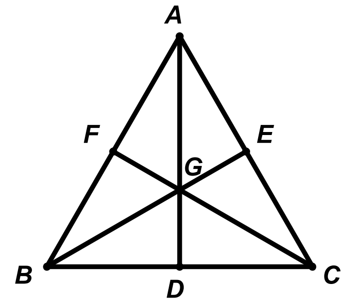
$\Rightarrow GE = \frac{2}{3}EK; GK = \frac{1}{3}EK \Rightarrow GE = 2GK \Rightarrow \frac{GE}{GK} = 2$ và $\frac{GC}{DC} = \frac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm).

VD 2.3.

a) Ta có $BE;CF$ là các đường trung tuyến của tam giác ABC

$\Rightarrow CE=\frac{1}{2}AC;BF=\frac{1}{2}AB$. Vì $AC=AB$ nên $\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB$

hay $CE=BF$.



Xét tam giác BCE và tam giác CBF có:

BC chung

$\widehat{BCE}=\widehat{CBF}$ (do tam giác ABC cân ở A)

$CE=BF$ (cmt)

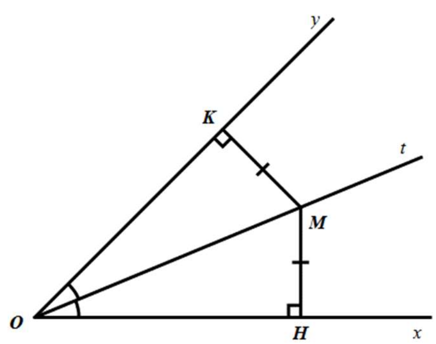
$\Rightarrow \Delta BCE=\Delta CBF\left(c-g-c\right)\Rightarrow BE=CF$ (2 cạnh tương ứng).

Chứng minh tương tự ta có $AD=BE$. Từ đó suy ra $AD=BE=CF$ (đpcm).

b) Ta có $AG=\frac{2}{3}AD;BG=\frac{2}{3}BE;CG=\frac{2}{3}CF$ (tính chất trọng tâm)

Vì $AD=BE=CF$ (theo cm phần a) nên $\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}CF$ hay $AG=BG=CG$ (đpcm).

VD 3.1.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên Ox và Oy. Từ yêu cầu của bài toán ta chứng minh $MH=MK$.

Xét ΔMOK và ΔMOH, có:

$\widehat{MKO}=\widehat{MHO}=90^\circ$ (theo cách dựng hình);

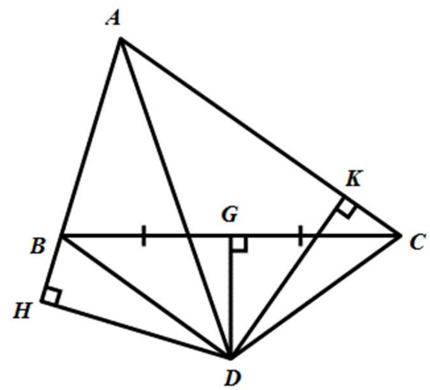
OM là cạnh chung; $\widehat{KOM}=\widehat{HOM}$ (Ot là phân giác).

Do đó: $\Delta MOK=\Delta MOH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow MH = MK$ (hai cạnh tương ứng).

Chú ý: Ta có tính chất tia phân giác của góc: Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

VD 3. 2.



Ta có $D \in$ phân giác của $\widehat{A}$; $DH \perp AB$; $DK \perp AC$

$\Rightarrow DH = DK$ (t/c tia phân giác của một góc).

Gọi G là trung điểm của BC.

Xét ΔBGD và ΔCGD, có:

$\widehat{BGD} = \widehat{CGD} = 90^\circ$ (DG là trung trực của BC);

$BG = CG$ (Theo cách vẽ); DG là cạnh chung.

Do đó: $\Delta BGD = \Delta CGD$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔBHD và ΔCKD, ta có:

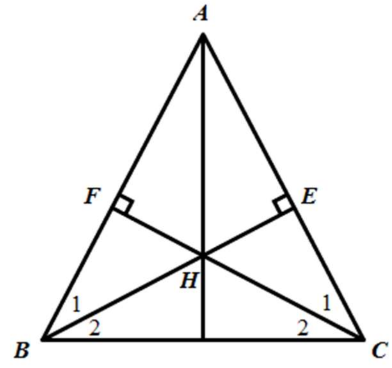
$\widehat{BHD} = \widehat{CKD}$ ($DH \perp AB$; $DK \perp AC$);

$DH = CK$ (cmt); $BD = CD$ (cmt)

Do đó: $\Delta BHD = \Delta CKD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BH = CK$ (hai cạnh tương ứng) (đpcm).

VD 4.1.



Xét ΔBEA, có: $\widehat{B_1} + \widehat{BAE} = \widehat{B_1} + \widehat{BAC} = 90^\circ$

Tương tự ΔCFA, có: $\widehat{C_1} + \widehat{FAC} = \widehat{C_1} + \widehat{BAC} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$). (1)

Lại có: $\hat{B} = \hat{C}$ (ΔABC cân tại A). (2)

Từ (1), (2) $\hat{B}-\widehat{B_1}=\hat{C}-\widehat{C_1}$ hay $\widehat{B_2}=\widehat{C_2}$.

$\Rightarrow \Delta BHC$ cân tại H (tính chất tam giác cân).

$\Rightarrow BH=CH$ (định nghĩa tam giác cân).

Xét ΔBHF và ΔCHE, ta có:

$\widehat{HFB}=\widehat{HEC}=90^\circ$ (BE, CF là đường cao); $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}$ (cmt); $BH=CH$ (cmt).

Do đó $\Delta BHF=\Delta CHE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HF=HE$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy AH là phân giác của $\widehat{BAC}$ (t/c tia phân giác của một góc).

VD 4.2.

Từ E hạ $EH\perp BC$; $EF\perp AB$; $EG\perp AC$

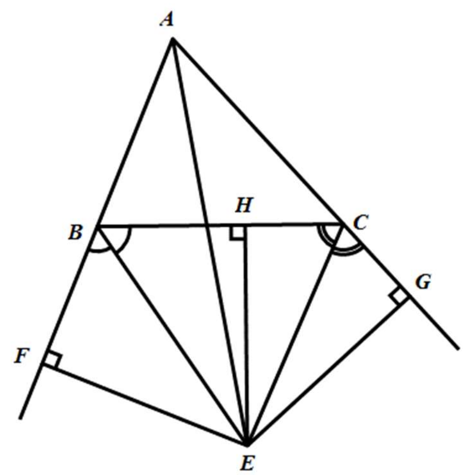
Ta có:

$EF=EH$ (E thuộc phân giác ngoài của $\hat{B}$)
(1)

$EH=EG$ (E thuộc phân giác ngoài của $\hat{C}$)
(2)

Từ (1), (2) ta có $EF=EG$

$\Rightarrow E$ thuộc tia phân giác trong của $\widehat{BAC}$ (t/c tia phân giác của một góc).



IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

PHẦN 1.

Bài 1.

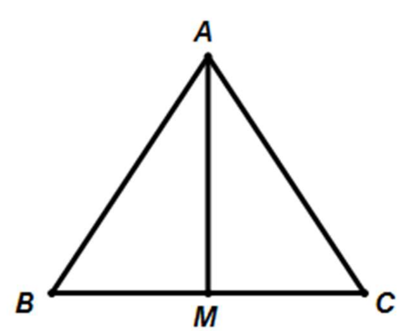
a) AM là đường trung tuyến của tam giác $ABC \Rightarrow MB=MC$.

Xét tam giác AMB và tam giác AMC có

$AB=AC$ (tam giác ABC cân ở A)

AM là cạnh chung

$MB=MC$



$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC\left(c-c-c\right)$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Cho nên $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = \dfrac{\widehat{AMB} + \widehat{AMC}}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

Hay $AM \perp BC$ (đpcm).

b) Ta có $BM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6cm$

Áp dụng định lý py-ta-go vào tam giác vuông AMB,

có $\widehat{M} = 90^\circ$

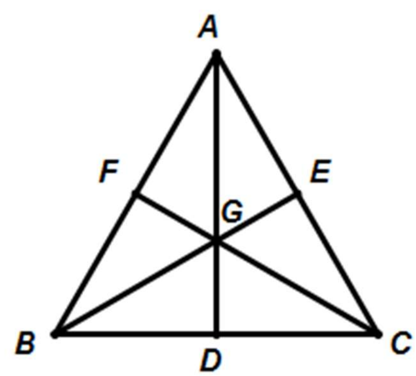
ta có: $AB^2 = AM^2 + MB^2 \Rightarrow AM^2 = AB^2 - MB^2$

Thay số $AB = 10cm, MB = 6cm$ ta được $AM^2 = 64$

Suy ra $AM = 8cm$.

Bài 2.

Gọi D là giao điểm của AG và $BC \Rightarrow DB = DC$.



Ta có $BG = \dfrac{2}{3}BE; CG = \dfrac{2}{3}CF$ (tính chất trọng tâm)

Vì $BE = CF$ nên $BG = CG$.

Xét tam giác GDB và GDC có:

$GB = GC$

GD là cạnh chung

$DB = DC$

$\Rightarrow \Delta GDB = \Delta GDC\left(c-c-c\right)$

$\Rightarrow GB = GC$ (hai cạnh tương ứng)

Và $\widehat{GDB} = \widehat{GDC}$ (hai góc tương ứng)

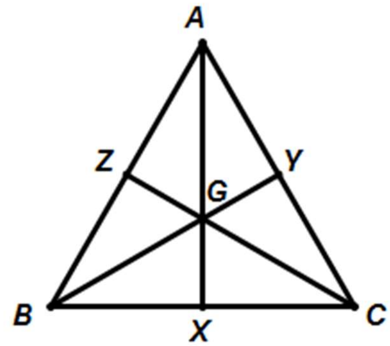
Mà $\widehat{GDB} + \widehat{GDC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Nên $\widehat{GDB} = \widehat{GDC} = \dfrac{\widehat{GDB} + \widehat{GDC}}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$

hay $GD \perp BC$.

Do A, G, D thẳng hàng nên ta suy ra $AG \perp BC$ (đpcm).

Bài 3.



Ta có $GA = \frac{2}{3}AX; GB = \frac{2}{3}BY; GC = \frac{2}{3}CZ$ (tính chất trọng tâm)

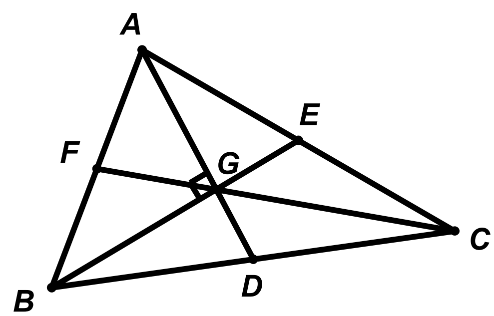
Suy ra $GX = \frac{1}{3}AX; GY = \frac{1}{3}BY; GZ = \frac{1}{3}CZ$

Bởi vậy $GA = 2GX; GB = 2GY; GC = 2GZ$

Theo đề bài $GA = GB = GC$ nên $2GX = 2GY = 2GZ$

Hay $GX = GY = GZ$ (đpcm).

Bài 4.



Gọi F là giao điểm của CG và $AB \Rightarrow FA = FB$.

Ta có $AG = \frac{2}{3}AD; BG = \frac{2}{3}BE$ (tính chất trọng tâm)

Thay số $AD = 4,5cm, BE = 6cm$ ta được

$AG = 3cm; BG = 4cm$.

Áp dụng định lý py-ta-go vào tam giác vuông AGB:

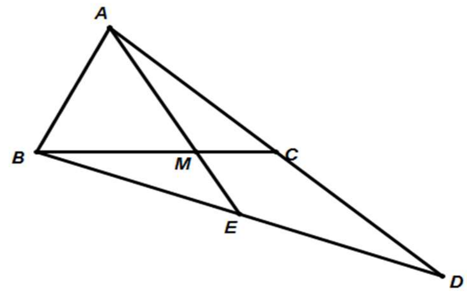
$AB^2 = AG^2 + BG^2 \Rightarrow AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AB = 5cm$.

Chú ý: Ta có thể mở rộng bài toán và tính được CF

Tam giác AGB vuông tại G có trung tuyến ứng với cạnh huyền AB là $GF \Rightarrow GF = FA = FB = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}cm$

Mà $GF = \frac{1}{3}CF \Rightarrow CF = 3GF = 7,5cm$.

Bài 5.



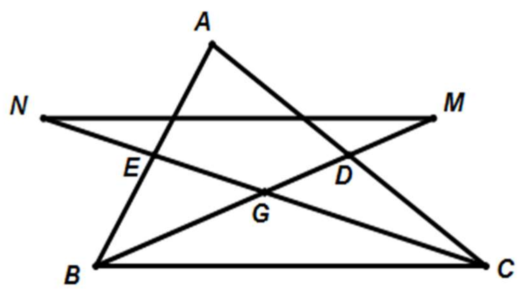
Xét ΔABD có $AC = CD \Rightarrow BC$ là trung tuyến của tam giác

Mà $BM = 2MC \Rightarrow BM = \dfrac{2}{3}BC$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABD

$\Rightarrow AM$ đi qua trung điểm của BD.

Bài 6.



a) Ta có $DM = DG \Rightarrow D$ là trung điểm của GM $\Rightarrow GM = 2GD$

Ta lại có $G = BD \cap CE \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC.

$\Rightarrow BG = 2GD$ .Suy ra $BG = GM$.Chứng minh tương tự ta được :$CG = GN$.

b) Xét tam giác GMN và tam giác GBC có

$GM = GB$ (cmt)

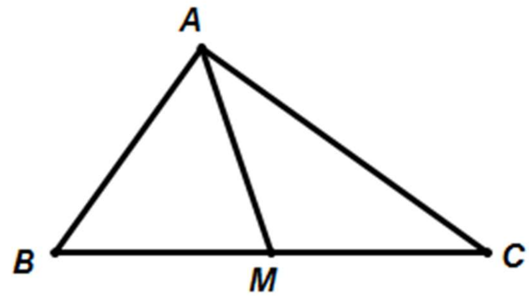
$\widehat{MGN} = \widehat{BGC}$ (2 góc đối đỉnh)

$GN = GC$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta GMN = \Delta GBC\left(c-g-c\right)$ $\Rightarrow MN = BC$ (2 cạnh tương ứng)

c) Theo phần b) ta có $\Delta GMN = \Delta GBC\left(c-g-c\right) \Rightarrow \widehat{NMG} = \widehat{CBG}$ mà $\widehat{NMG}$ và $\widehat{CBG}$ ở vị trí so le trong. Do đó ta suy ra $MN//BC$.

Bài 7.



Xét ΔABC có trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AM = MB = MC\left(= \frac{1}{2}BC \right)$

Khi đó tam giác AMB cân tại M và tam giác AMC cân tại M.

Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MBA}$ và $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$

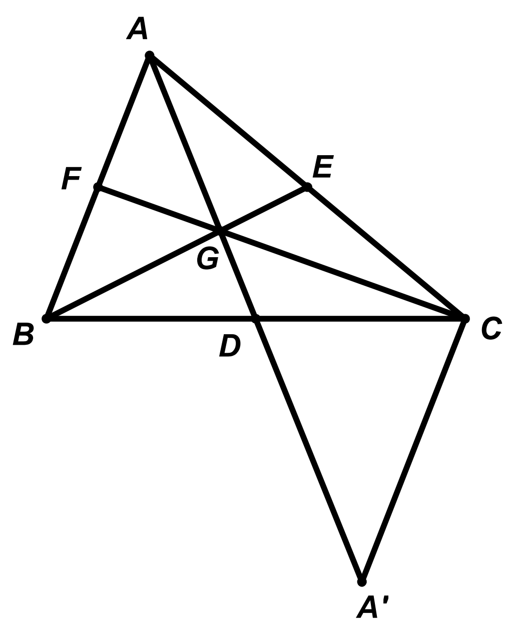
Do đó ta có: $\widehat{MBA} + \widehat{MCA} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC}$ hay $\widehat{CBA} + \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$

Xét tam giác ABC có: $\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{BCA} = 180^\circ$

Mà $\widehat{CBA} + \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$ nên $2\widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

Vậy tam giác ABC vuông ở A.

Bài 8.



Xét tam giác GBC ta có

$GB + GC > BC$ (BĐT trong tam giác)

hay $\frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}CF > BC$

Suy ra $BE + CF > \frac{3}{2}BC$ (1)

Chứng minh tương tự ta được:

$AD + BE > \frac{3}{2}AB$ (2)

$AD + CF > \frac{3}{2}AC$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được:

$2(AD + BE + CF) > \frac{3}{2}(AB + BC + CA)$

$\Rightarrow AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+AC)$ (*)

Bây giờ ta cần chứng minh $AD+BE+CF<AB+BC+CA$

Trên tia AD lấy điểm A' sao cho $DA'=DA$.

Xét tam giác $AA'C$, ta có: $AA'<AC+A'C$ (BĐT trong tam giác).

Dễ dàng chứng minh được tam giác ADB và tam giác $A'DC$ bằng nhau (c-g-c) suy ra $AB=A'C$

Từ đó ta có: $AA'<AC+AB$ hay $2AD<AB+AC$ hay $AD<\frac{AB+AC}{2}$

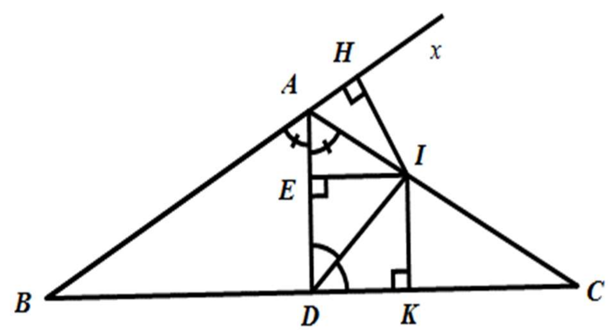
Chứng minh tương tự ta được: $BE<\frac{AB+BC}{2}$ và $CF<\frac{CA+BC}{2}$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại vế theo vế suy ra $AD+BE+CF<AB+BC+CA$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra đpcm.

PHẦN 2.

Bài 1.



Kẻ $IE\perp AD$. Gọi Ax là tia đối của tia AB.

$\widehat{BAC}=120^\circ$ nên $\widehat{CAx}=60^\circ$ (1)

Ta có: AD là phân giác $\widehat{BAC}$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{DAC}=60^\circ$ (2)

Từ (1), (2) suy ra AC là tia phân giác của $\widehat{DAx}$

nên $IH=IE$ (t/c tia phân giác của một góc). (3)

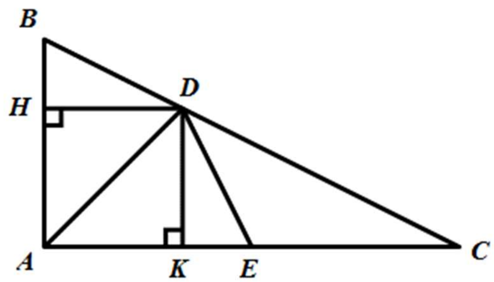
Mà: DI là phân giác của $\widehat{ADC}$ nên $IK=IE$

(t/c tia phân giác của một góc). (4)

Từ (3), (4) suy ra $IH=IK$ (đpcm).

Bài 2.

a) Xét ΔABC vuông tại A, ta có:



$AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow BC^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$

$\Rightarrow BC = \sqrt{45}$ cm.

b) Vì E là trung điểm AC nên

$AE = \dfrac{1}{2}AC = 3$ cm. $\Rightarrow AE = AB$

Xét ΔBAD và ΔEAD, có:

$\widehat{BAD} = \widehat{EAD}$ (AD là phân giác);

AD cạnh chung; $AB = AE$ (cmt).

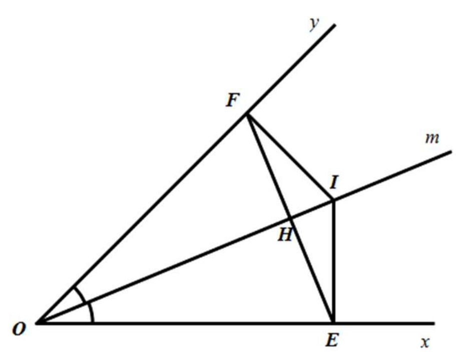
$\Rightarrow \Delta BAD = \Delta EAD$ (c.g.c)

c) Vì D nằm trên tia phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $DH = DK$ (t/c tia phân giác của một góc).

Vậy điểm D cách đều AB và AC.

Bài 3.

a) Xét ΔIOE và ΔIOF có:



$\hat{E} = \hat{F} = 90°; OI$ cạnh chung;

$\widehat{EOI} = \widehat{FOI}$ (giả thiết) .

Vậy $\Delta IOE = \Delta IOF$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) Vì $\Delta IOE = \Delta IOF$ (cmt) $\Rightarrow OE = OF$ (hai cạnh tương ứng).

Gọi H là giao điểm của Om và EF .

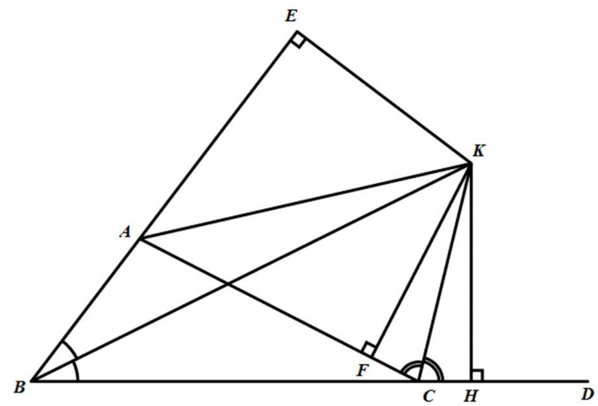
Xét ΔOHE và ΔOHF, có: $OE = OF$ (cmt); $\widehat{EOH} = \widehat{FOH}$ (giả thiết); OH chung.

Do đó $\Delta OHE = \Delta OHF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OHE} = \widehat{FHO}$.

Mà $\widehat{OHE} + \widehat{FHO} = 180°$ do đó $\widehat{OHE} = \widehat{FHO} = 90°$.

Vậy $EF \perp Om$.

Bài 4.



Từ K kẻ $KE \perp AB; KF \perp AC$; $KH \perp BC$.

Do K thuộc tia phân giác của góc B (giả thiết)

Nên $KE = KH$ (t/c tia phân giác của một góc). (1)

Lại có K thuộc tia phân giác của $\widehat{ACD}$ (giả thiết)

Nên $KF = KH$ (t/c tia phân giác của một góc). (2)

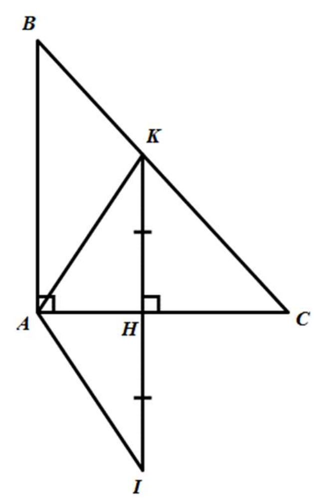
Từ (1), (2) $\Rightarrow KE = KF$.

$\Rightarrow K$ thuộc tia phân giác của $\widehat{CAE}$ (t/c tia phân giác của một góc).

$$\Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{KAE} = \frac{\widehat{CAE}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

Vậy $\widehat{BAK} = 140^\circ$.

Bài 5.



a) Ta có: $AB \perp AC$ (ΔABC vuông tại A)

$KH \perp AC$ (giả thiết)

$\Rightarrow AB // KH$ (từ vuông góc đến song song)

b) Xét ΔAHK và ΔAHI, có:

$\widehat{AHK} = \widehat{AHI} = 90^\circ$ ($KH \perp AC$ tại H);

$HK = HI$ (giả thiết); AH cạnh chung

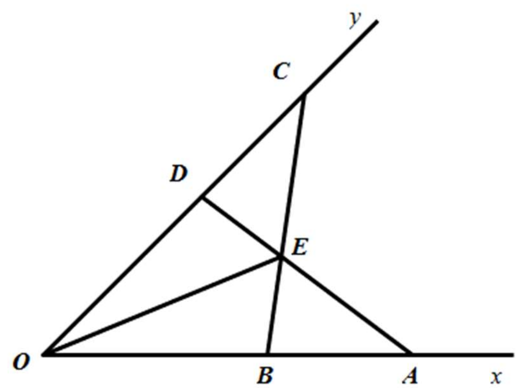
Do đó: $\Delta AHK = \Delta AHI$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{KAH} = \widehat{IAH}$ (2 góc tương ứng)

c) Ta có: ΔAKI có AH vừa là đường trung tuyến, vừa là đường phân giác nên ΔAKI cân tại A.

Bài 6.

a) Xét ΔOAD và ΔOCB, ta có:



$OA = OC$ (giả thiết); $\widehat{O}$ chung;
$OD = OB$ (giả thiết).

$\Rightarrow \Delta OAD = \Delta OCB$ (c.g.)

$\Rightarrow AD = CB$ (hai cạnh tương ứng).

b) Do $OA = OC$ (gt)

$OB = OD$ (gt)

$\Rightarrow AB = CD$.

Lại có $\Delta OAD = \Delta OCB$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{ODA}$;

$\widehat{ABE} + \widehat{OBC} = \widehat{CDE} + \widehat{ODA} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CDE}$.

Và cũng có $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$.

Vậy $\Delta ABE = \Delta CDE$ (g.c.g)

c) Vì $\Delta ABE = \Delta CDE$ (cmt) $\Rightarrow AE = CE$ (hai cạnh tương ứng)

Xét ΔAEO và ΔCEO, có:

$AE = CE$ (cmt); OE cạnh chung;

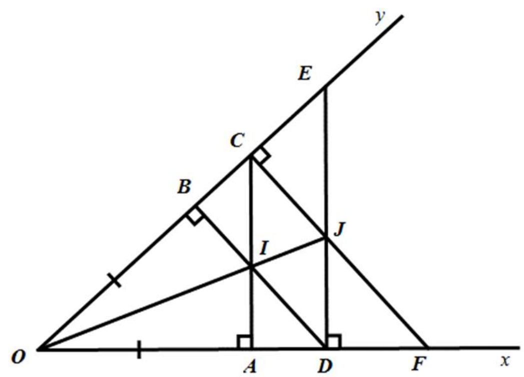
$OA = OC$ (gt)

$\Rightarrow \Delta AEO = \Delta CEO$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{COE}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow OE$ là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Bài 7.



a) Xét ΔOAI và ΔOBI, có:

$\widehat{OAI} = \widehat{OBI} = 90^\circ$ (Vì $BD \perp Oy$; $AC \perp Ox$); OI cạnh chung;

$OA = OB$ (giả thiết).

$\Rightarrow \Delta OAI = \Delta OBI$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{IOA} = \widehat{IOB}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow OI$ là phân giác $\widehat{xOy}$.

b) Xét ΔAOC và ΔBOD, có:

$\widehat{OAC} = \widehat{OBD} = 90^\circ$ (Vì $BD \perp Oy$; $AC \perp Ox$); $OA = OB$ (giả thiết);

$\widehat{O}$ chung

$\Delta AOC = \Delta BOD$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề)

$\Rightarrow OC = OD$ (hai cạnh tương ứng)

Chứng minh tương tự ta có: $\Delta DOJ = \Delta COJ$

$\Rightarrow \widehat{JOD} = \widehat{JOC}$ $\Rightarrow OJ$ phân giác $\widehat{xOy}$.

c) Vì OI, OJ cùng là phân giác của $\widehat{xOy}$ nên ba điểm O, I, J thẳng hàng.

Bài 8.

Kéo dài AC lấy đi

Xét ΔACE và ΔMC

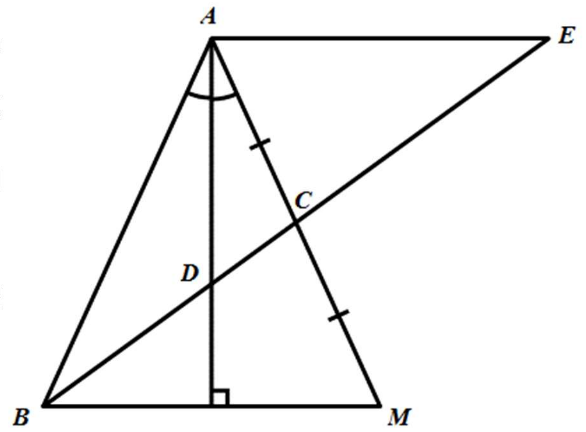
$CE = CB$ (giả thiết) ich vẽ).

$\Rightarrow \Delta ACE = \Delta MCB$ (

Trong tam giác Al

$\Rightarrow D$ là trọng tâm

Đường thẳng AD



là phân giác nên ΔABM cân tại A

Do đó $AD \perp BM$.

Ta lại có $\widehat{AEC} = \widehat{MBC}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AE // BM \Rightarrow AD \perp AE$.

Vậy tam giác ADE vuông.

Bài 9.

Theo giả thiết ta có CP và BP là các tia phân giác của các góc ngoài ở đỉnh C và B của ΔMBC.

$\Rightarrow MP$ là tia phân giác của $\widehat{BMC}$.

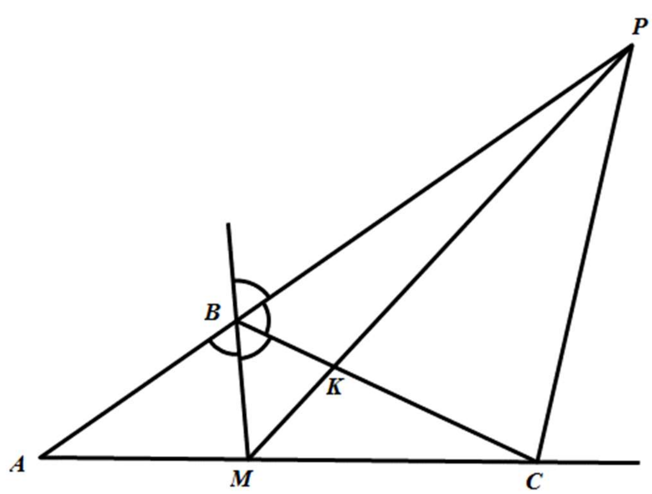
Lại có BK và MK là các tia phân giác của các góc ngoài ở đỉnh B và M của ΔAMB.

$\Rightarrow AK$ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

Như vậy

$$\widehat{AKM} = \widehat{KMC} - \widehat{KAM} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BMC} - \widehat{BAM}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{ABM} = \frac{1}{2}60^0 = 30^0$$

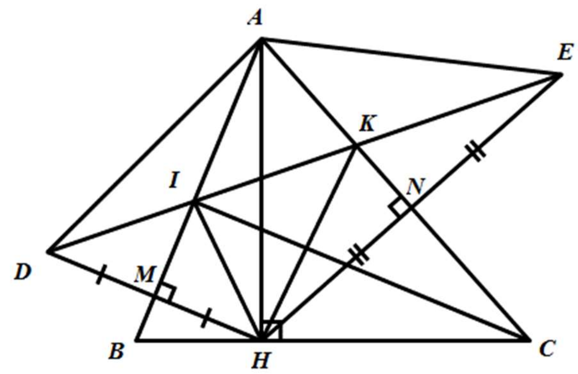


Bài 10.

a) xét ΔDMI và ΔHMI, có:

$\widehat{DMI} = \widehat{HMI}$ ($HM \perp AB$); MI cạnh chung; $MD = MH$ (giả thiết).

Nên suy ra: $\Delta DMI = \Delta HMI$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow BI$ là tia phân giác của $\widehat{HID}$;



b) Chứng minh tương tự phần a) ta có:

$\Delta DAM = \Delta HAM$ (hai cạnh góc vuông); $\Delta ANH = \Delta ANE$ (hai cạnh góc vuông).

$\Rightarrow AD = AH = AE$.

$\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A Do đó $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$ (1)

Xét ΔDAI và ΔHAI, ta có:

AI cạnh chung; $AD = AH$ (cmt);

$DI = HI$ ($\Delta DMI = \Delta HMI$).

$\Rightarrow \Delta DAI = \Delta HAI$ (c – c – c) $\Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{AHI}$ (2)

Chứng minh tương tự ta có:

$\Delta EKA = \Delta HKA$ (c – c – c) $\Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{AHK}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: HA là tia phân giác của $\widehat{IHK}$;

c) Vì HA là tia phân giác của $\widehat{IHK}$ (cmt). Có $AH \perp HC$ $\Rightarrow HC$ là phân giác ngoài của $\widehat{IHK}$.

Mà KC là phân giác ngoài của $\widehat{IKH}$.Suy ra IC là tia phân giác của góc $\widehat{HIK}$.

d) BI là tia phân giác của góc $\widehat{HID}$(cmt)

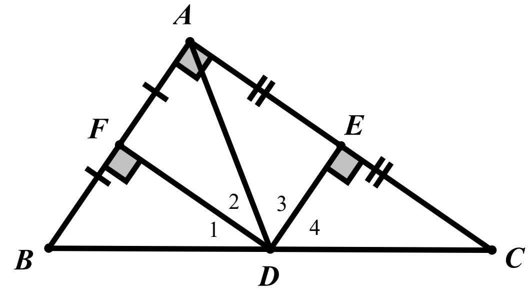
IC là tia phân giác của góc $\widehat{HIK}$(cmt)

Do đó $IB \perp IC$.

BÀI 35. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC,

BA ĐƯỜNG CAO TRONG MỘT TAM GIÁC

VD 1.1. Xét ΔABC vuông tại $A, \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=90°$



Gọi D là giao điểm của các đường trung trực cạnh AB và AC.

Ta có: $EA=EC$ và $DE\perp AC \Rightarrow \Delta DAC$ cân tại D

$\Rightarrow \widehat{D_3}=\widehat{D_4}=90°-\hat{C}$ và $AD=DC$

Có $FA=FC$ và $FD\perp AB \Rightarrow \Delta DAB$ cân tại D

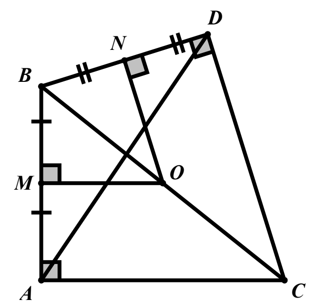
$\Rightarrow \widehat{D_1}=\widehat{D_2}=90°-\hat{B}$ và $AD=BD$

$\Rightarrow \widehat{D_1}+\widehat{D_2}+\widehat{D_3}+\widehat{D_4}=2(90°-\hat{B})+2(90°-\hat{C})=2(180°-\hat{B}-\hat{C})=2(180-90°)=180°$

$\Rightarrow B,D,C$ thẳng hàng $\Rightarrow D$ nằm trên BC.

Mà $BD=AD$ và $AD=DC \Rightarrow BD=DC \Rightarrow D$ là trung điểm của $BC \Rightarrow D$ nằm trên đường trung trực của cạnh BC. $(đpcm)$

VD 1.2. Gọi O là trung điểm của BC

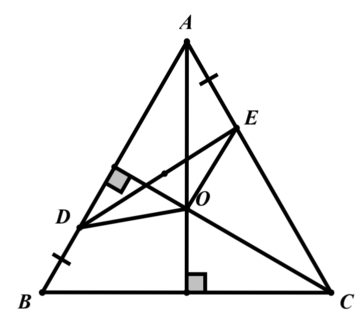


Xét ΔABC có $\widehat{BAC}=90°$. Theo chứng minh ở ví dụ 1 thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow OA=OB=OC.$ (1)

Xét ΔDBC có $\widehat{BDC}=90° \Rightarrow OB=OC=OD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA=OB=OD \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD

VD 2.1. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow OA=OB=OC$



Vì ΔABC đều $\Rightarrow AB=AC=BC$

Xét ΔOAD và ΔOCE

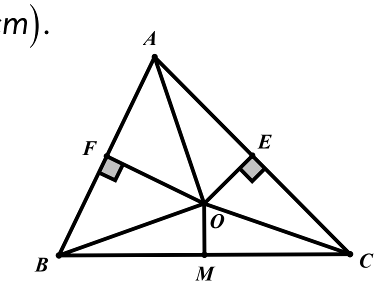
Có $OA=OC;\ \widehat{OAD}=\widehat{OCE}=30°$,

$\begin{cases} CE=AC-AE \\ AD=AB-BD \end{cases} \Rightarrow CE=AD$

(do $AB=AC,\ AE=BD$ theo gt)

$\Rightarrow \Delta OAD=\Delta OCE \Rightarrow OD=OE \Rightarrow \Delta ODE$ cân

Vậy: đường trung trực của đoạn DE luôn đi qua điểm cố định O $(đpcm)$.



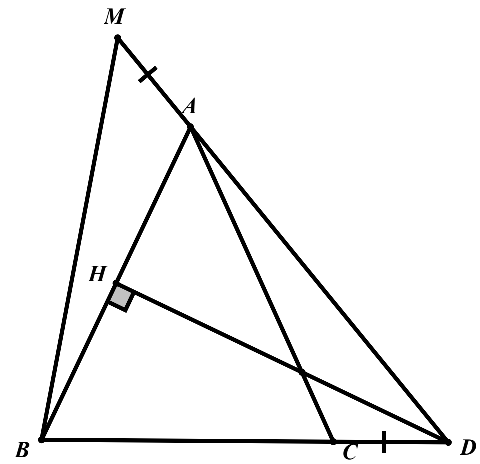
VD 2.2.

Vì OF là trung trực $\Rightarrow OA = OB\ (1)$

Vì OE là trung trực $\Rightarrow OA = OC\ (2)$

$\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O mà M là trung điểm BC, $OM \perp BC \Rightarrow \widehat{OMB} = 90^0$

VD 2.3.



a) Xét ΔDAB có DH là trung trực $\Rightarrow \Delta DAB$ cân tại D

$\Rightarrow AD = BD$ và $\widehat{BAD} = \widehat{ABD}$

Mà ΔABC cân tại A có $\hat{A} = 50°$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180° - \widehat{BAC}}{2} = \dfrac{180° - 50°}{2} = 65°$

$\Rightarrow \widehat{BAD} = 65° \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{BAD} - \widehat{BAC} = 65° - 50° = 15°$

b) Xét ΔBAM và ΔACD có: $AB = AC$ (do ΔABC cân tại A);

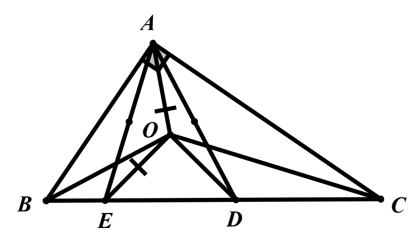
$\widehat{BAM} = 180° - \widehat{BAD} = 180° - 65° = 115°\ (1)$

$\widehat{DCA} = 180° - \widehat{ABC} = 180° - 65° = 115°\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BAM} = \widehat{ACD}$; $MA = CD\ (gt) \Rightarrow \Delta BAM = \Delta ACD\ (c.g.c) \Rightarrow BM = AD.$

Mặt khác theo chứng minh trên $AD = BD \Rightarrow BD = BM \Rightarrow \Delta BMD$ cân tại B $(đpcm)$.

VD 2.4. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ADE \Rightarrow OA = OD = OE$.



Xét ΔOBA và ΔOBD có: $AB = BD$, $OA = OD$, OB chung

$\Rightarrow \Delta OAB = \Delta ODB\ (c.c.c)$

$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OBD} \Rightarrow OB$ là phân giác của góc $\widehat{ABC}$ (1)

Tương tự ta có $\Delta OAC = \Delta OEC\ (c.c.c)$

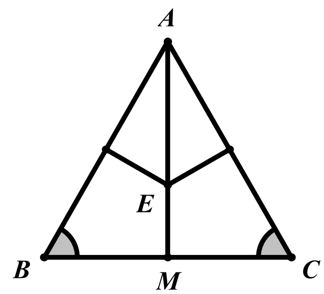
$\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OCE} \Rightarrow OC$ là phân giác của $\widehat{ACB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O$ là giao của 3 đường phân giác của ΔABC $(đpcm)$.

Dạng 3. Chứng minh ba đường trung trực đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Phương pháp giải: Sử dụng tính chất:

Ba đường trung trực trong tam giác cắt nhau tại 1 điểm.



VD 3.1. Xét ΔMAB và ΔMAC có:

$AB = AC$ (vì ΔABC cân tại A);

$BM = MC$ (vì M là trung điểm BC)

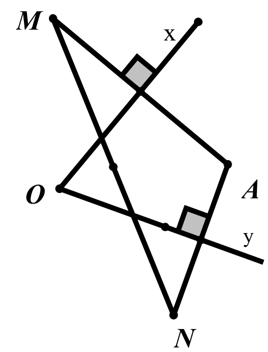
AM chung.

$\Rightarrow \Delta MAB = \Delta MAC \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$

Mặt khác $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^0$

$\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow AM$ là trung trực ứng với cạnh BC của ΔABC giao điểm E của các đường trung trực phải thuộc AM

Hay A, E, M thẳng hàng $(đpcm)$.

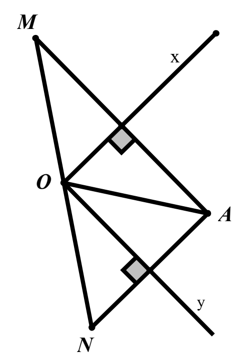


VD 3.2.

a) Xét ΔAMN có Ox là trung trực của AM (gt); Oy là trung trực của AN

$\Rightarrow$ Trung trực của MN luôn đi qua O cố định khi A di động

(*vì 3 đường trung trực trong tam giác luôn đồng quy tại 1 điểm*).



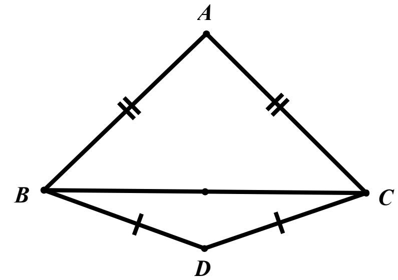
b) Vì O thuộc $MN \Rightarrow O, M, N$ thẳng hàng

$\Rightarrow \widehat{xOM} + \widehat{xOA} + \widehat{yOA} + \widehat{yON} = 180^\circ$

Mặt khác $\begin{cases} \widehat{xOM} = \widehat{xOA} \\ \widehat{yON} = \widehat{yOA} \end{cases}$

$\Rightarrow 2(\widehat{xOA} + \widehat{yOA}) = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{xOy} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{xOy} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^0$

VD 3.3. Gọi I là trung điểm của BC, vì ΔABC cân tại $A \Rightarrow AI \perp BC \Rightarrow AI$ là trung trực của BC.

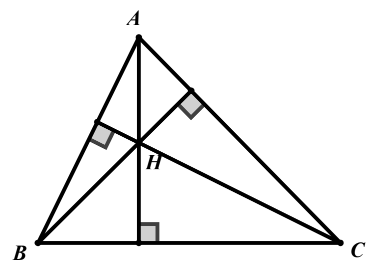


Vì ΔDBC cân tại $D \Rightarrow DI \perp BC \Rightarrow DI$ là trung trực của BC

$\Rightarrow A, D, I$ thẳng hàng hay AD là trung trực của BC.

Xét ΔABC, gọi O là giao điểm đường của trung trực cạnh AB và đường trung trực cạnh $AC \Rightarrow O$ cũng thuộc trung trực của cạnh $BC \Rightarrow O$ thuộc $AD \Rightarrow$ Các đường trung trực của AB và AC đồng quy với AD tại O $(đpcm)$.

VD 4.1. Vì H là trực tâm của ΔABC,



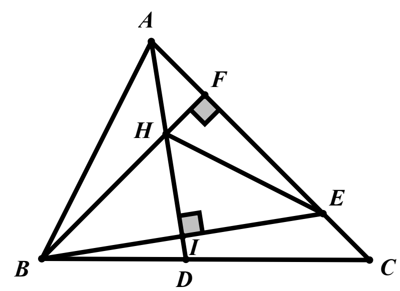
suy ra: $AH \perp BC,\ BH \perp AC,\ CH \perp AB$

Xét ΔHAB ta có: $BC \perp AH$ và $AC \perp BH$

$\Rightarrow C = BC \cap AC \Rightarrow C$ là trực tâm ΔHAB.

Tương tự ta có B là trực tâm ΔHAC và A là trực tâm ΔHBC.

VD 4.2. Vì $AB = AE \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại A, mà AD là phân giác góc A của $\Delta ABC \Rightarrow AI$ là đường cao của ΔABE, $BF \perp AE \Rightarrow BF$ là đường cao của ΔABE



Vì $H = BF \cap AI \Rightarrow H$ là trực tâm ΔABE.

Xét Δ HEF có $\widehat{FHE} = 90^\circ - \widehat{FEH}$ (1)

Xét ΔHIE có $\widehat{EHI} = 90^\circ - \widehat{IEH}$ (2)

Từ (1) và (2) :

$\Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{FHE} + \widehat{EHI} = (90^\circ - \widehat{FEH}) + (90^\circ - \widehat{IEH}) = 180^\circ - \widehat{FEI}$

Vì ΔABE cân tại $E \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ABE} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BAE}}{2} = \dfrac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HDF} = 180^\circ - \widehat{FEI} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

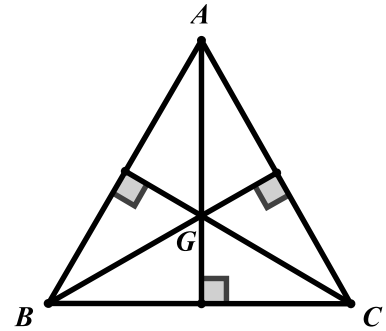
VD 4.3. Vì ΔABC đều, G là trọng tâm $\Rightarrow G$ cũng là trực tâm

$\Rightarrow AG \perp BC;\ BG \perp AC;\ CG \perp AB$

Xét ΔGAB có: $BC \perp AG;\ AC \perp BG$ mà $C = AC \cap BC$

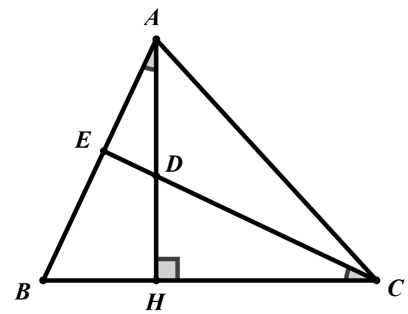
$\Rightarrow C$ là giao của 3 đường cao trong $\Delta ABG \Rightarrow C$ là trực tâm ΔGAB

Tương tự B là trực tâm ΔGAC; A là trực tâm ΔGBC.



VD 5.1. Gọi E là giao điểm của AB và CD kéo dài. Xét ΔEBC có:

$\widehat{BEC} = 180^\circ - \left(\widehat{EBC} + \widehat{ECB}\right)$ (1)



Mặt khác trong ΔHAB có:

$\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ$ (do $AH \perp BC$)

Mà $\widehat{HAB} = \widehat{HCD}$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow EC \perp AB$

Xét ΔABC có $EC \perp AB$ và $AH \perp BC \Rightarrow D = CE \cap AH$ là trực tâm của ΔABC

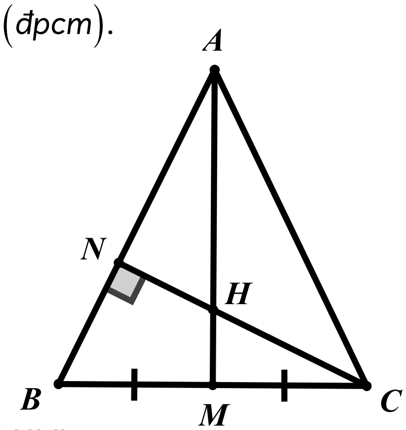
$\Rightarrow BD$ thuộc đường cao hạ từ B của $\Delta ABC \Rightarrow BD \perp AC$ $(đpcm)$.

VD 5.2. Vì ΔABC cân tại A, mà M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM$ vừa là trung tuyến, vừa là đường cao

$\Rightarrow AM \perp BC$. Mà $CN \perp AB$ (gt)

$H = AM \cap CN \Rightarrow H$ là trực tâm ΔABC

$\Rightarrow BH$ thuộc đường cao $\Delta ABC \Rightarrow BH \perp AC$ $(đpcm)$.



VD 5.3. Trên tia đối của tia NM ta lấy M' sao cho $NM = NM'$

Xét ΔNMH và $\Delta NM'C$ có :

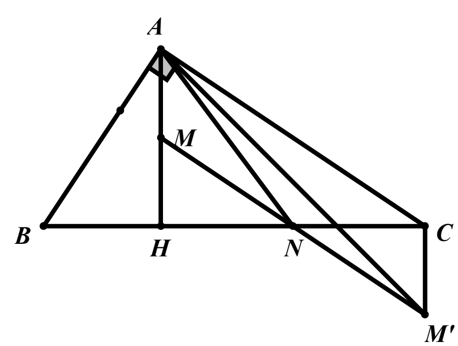
$MN = NM', \widehat{MNH} = \widehat{M'NC}$ (hai góc đối đỉnh),

$HN = NC$ (do N là trung điểm HC)

$\Rightarrow$ ΔNMH và $\Delta NM'C$ $(c.g.c) \Rightarrow CM' = HM$

và $\widehat{HMN} = \widehat{CM'N} \Rightarrow HM // CM'$

Xét $\Delta AMM'$ và $\Delta M'CA$ có:



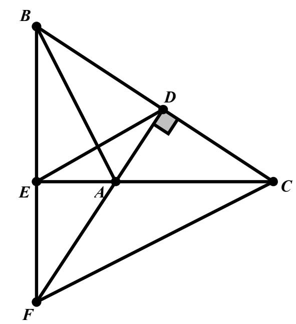
$AM = HM = CM'$ (1), $\widehat{MAM'} = \widehat{CM'A}$ $(vì\ AM//CM')$; AM' chung

$\Rightarrow$ $\Delta AMM' = \Delta M'CA$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{MM'A} = \widehat{CAM'} \Rightarrow MN//AC$

Mà $AC \perp AB \Rightarrow MN \perp AB$

Xét ΔABN có $AH \perp BN$ và $MN \perp AB \Rightarrow M$ là giao của hai đường cao M là trực tâm $\Delta ABN \Rightarrow BM$ thuộc đường cao hạ từ B

$\Rightarrow BM \perp AN$ $(đpcm)$.



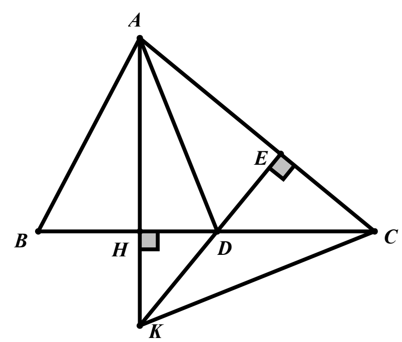
VD 5.4. Xét ΔFBC có: $AD \perp BC \Rightarrow FD \perp BC (1)$

Có $BE \perp AC \Rightarrow CE \perp BF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CE$ và FD là các đường cao của ΔFBC

Mà $A = FD \cap CE \Rightarrow A$ là trực tâm ΔFBC

$\Rightarrow AB$ thuộc đường cao $\Delta FBC \Rightarrow AB \perp FC$ $(đpcm)$.



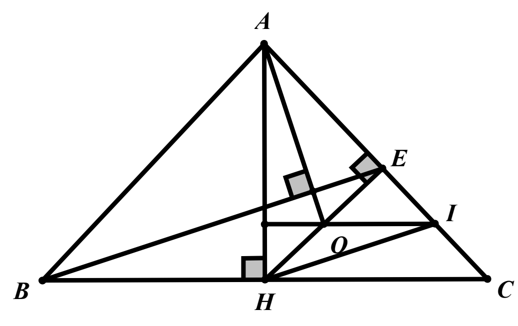
VD 5.5. Xét ΔAKC ta có $AH \perp BC$ $(gt) \Rightarrow CH \perp AK$ (1)

Có $DE \perp AC$ $(gt) \Rightarrow KE \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KC$ và CH là hai đường cao của ΔAKC

Mà $D = KE \cap CH \Rightarrow D$ là trực tâm $\Delta AKC \Rightarrow AD$ thuộc đường cao hạ từ A của $\Delta AKC \Rightarrow AD \perp KC$ $(đpcm)$.

VD 5.6. Vì I là trung điểm của EC, O là trung điểm của $HE \Rightarrow$ theo cách chứng minh tương tự như ví dụ 3 ở trên $\Rightarrow IO//HC$



Mà $AH \perp BC \Rightarrow OI \perp AH$

Xét ΔAHI có $IO \perp AH$ $(c.m.t)$, $HE \perp AC$ $(gt) \Rightarrow HE$ và IO thuộc các đường cao của ΔAHI.

Mà $O = HE \cap IO \Rightarrow O$ là trực tâm $\Delta AHI \Rightarrow AO \perp HI$.

Mặt khác xét ΔCBE có I là trung điểm của EC, H là trung điểm BC (do ΔABC cân tại A) $\Rightarrow HI//BE$ (tương tự ví dụ 3)

Mà $AO \perp HI \Rightarrow AO \perp BE$ $(đpcm)$.

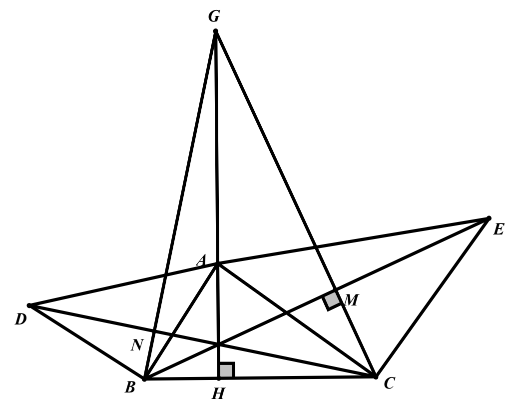
VD 6.1. Trên tia đối của tia AH lấy G sao cho $GA = BC$. Xét ΔAGC và ΔCBE ta có:
$AG = CB$;

$\widehat{GAC} = 180^\circ - \widehat{HAC} = 180^\circ - (90^\circ - \widehat{HCA}) = 90^\circ + \widehat{HCA}$

$\widehat{BCE} = \widehat{ACE} + \widehat{ACB} = 90^\circ + \widehat{ACH} \Rightarrow \widehat{GAC} = \widehat{BCE}$

$AC = CE$ (do ΔACE vuông cân tại C)

$\Rightarrow \Delta AGC = \Delta CBE \ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ACG} = \widehat{CEB}$



Gọi M là giao điểm của GC và BE.

Xét Δ MEC có:

$\widehat{MEC} + \widehat{ECM} = \widehat{ECM} + \widehat{MCA} = 90^\circ$

$\Rightarrow BM \perp GC$

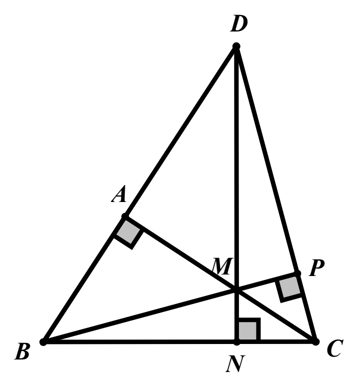
Hoàn toàn tương tự nếu gọi N là Giao điểm của BG và CD ta có $CN \perp GB$.Xét ΔGBC có $GH \perp BC$, $CN \perp BG$, $BM \perp GC \Rightarrow CN, BM, GH$ là 3 đường cao của $\Delta GBC \Rightarrow CN, BM$ và GH cùng đi qua trực tâm ΔGBC hay AH, BE và CD cùng đi qua 1 điểm chính là trọng tâm ΔGBC $(đpcm)$.

VD 6.2. Gọi D là giao điểm của các đường thẳng AB và CP.

Xét ΔDBC ta có: $AB \perp AC \Rightarrow AC \perp BD \ (1)$

$CP \perp BP \Rightarrow BP \perp DC (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CA$ và BP là các đường cao của ΔDBC.
Mà $M = BP \cap CA \Rightarrow M$ là trực tâm $\Delta DBC \Rightarrow DM \perp BC$.
Mặt khác $MN \perp BC \Rightarrow M, N, D$ thẳng hàng
$\Rightarrow AB, MN$ và CP cùng đi qua điểm D $(đpcm)$.



VD 7.1. Xét ΔBAF và ΔABC ta có :

$\widehat{FAB} = \widehat{ABC}$ (*hai góc so le trong*)

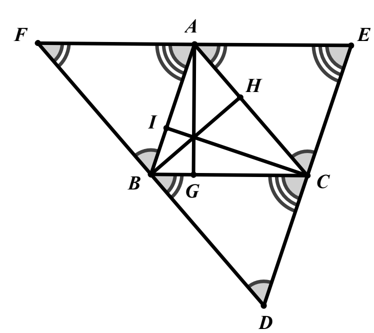
chung;

$\widehat{ABF} = \widehat{BAC}$ (*hai góc so le trong*)

$\Rightarrow \Delta BAF = \Delta ABC \ (g.c.g) \Rightarrow FA = BC \ (1)$

Xét ΔCAE và ΔABC có :

$\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$ (*hai góc so le trong*)



chung;

$\widehat{ACE} = \widehat{CAB}$ *(hai góc so le trong)*

$\Rightarrow \Delta CAE = \Delta ABC \Rightarrow AE = BC \ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AF = AE$.

Tương tự ta chứng minh được $BF = BD$ và $CD = CE$

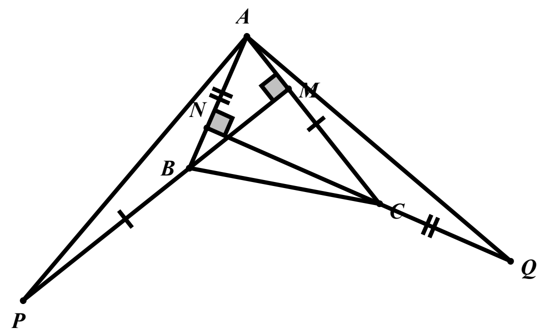
Xét AG là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow AG \perp BC$,

$BC // FE \Rightarrow AG \perp FE$

A là trung điểm $FE \Rightarrow AG$ là trung trực của FE.

Tương tự BH là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow BH$ là trung trực của DF

CI là đường cao $\Delta ABC \Rightarrow CI$ là trung trực của DE, các đường cao của ΔABC là các đường trung trực của ΔDEF.



VD 7.2. Xét ΔBAP và ΔCQA có: $BA = CQ \ (gt)$;

$\widehat{PBA} = 180^\circ - \widehat{ABM}$ và $\widehat{ACQ} = 180^\circ - \widehat{ACN}$

Mặt khác $\widehat{ACN} + \widehat{BAC} = 90^\circ$ và

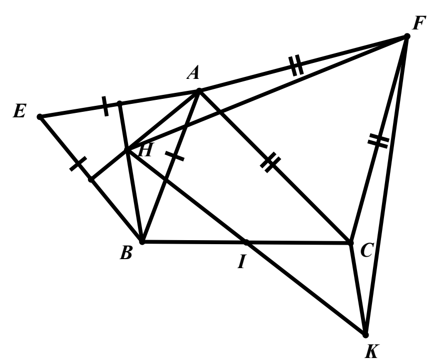
$\widehat{ABM} + \widehat{BAC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{PBA} = \widehat{ACQ}$

$BP = AC \ (gt) \Rightarrow \Delta BAP = \Delta CQA \ (c.g.c) \Rightarrow AP = AQ$ và $\widehat{CAQ} = \widehat{BPA}$

Xét ΔAPQ có: $\widehat{PAQ} = \widehat{PAC} + \widehat{CAQ} = \widehat{PAC} + \widehat{BPA} = \widehat{PAM} + \widehat{MAP} = 90^\circ$

và $AP = AQ \ (c.m.t) \Rightarrow \Delta APQ$ vuông cân tại A $(đpcm)$.



VD 7.3. Xét ΔIBH và ΔICK có $IB = IC \ (gt)$;

$\widehat{HIB} = \widehat{KIC}$ *(hai góc đối đỉnh)*; $IH = IK \ (gt)$

$\Rightarrow \Delta IBH = \Delta ICK \ (c.g.c) \Rightarrow BH = CK$

và $\widehat{ICK} = \widehat{IBH} = \widehat{IBA} + \widehat{ABH} = \widehat{CBA} + 30^\circ$

Mà H là trực tâm ΔABE đều $\Rightarrow BH = AH \Rightarrow CK = AH$

Xét ΔAHF và ΔCKF có: $AF = CF$ (vì ΔACF đều)

$\widehat{HAF} = \widehat{HAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = 30^\circ + BAC + 60^\circ = 90^\circ + \widehat{BAC}$ (1)

$\widehat{KCF} = 360^\circ - \widehat{KCI} - \widehat{BCA} - \widehat{ACF} = 360^\circ - (\widehat{CBA} + 30^\circ) - \widehat{BCA} - 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{KCF} = 270^\circ - (\widehat{CBA} + \widehat{BCA}) = 270^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ + \widehat{BAC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{HAF} = \widehat{KCF}$

Ngoài ra có : $AH = CK\ (c.m.t) \Rightarrow \Delta AHF = \Delta CKF\ (c.g.c) \Rightarrow (đpcm)$.

$\Rightarrow \widehat{AFH} = \widehat{CFK}$ và $HF = KF$

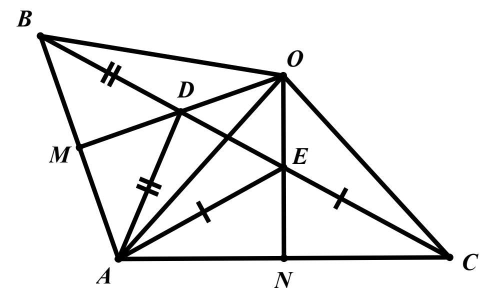
Xét ΔKHF có $HF = KF \Rightarrow \Delta KHF$ cân tại F

Mặt khác $\widehat{HFK} = \widehat{HFC} + \widehat{CFK} = \widehat{HFC} + \widehat{AFH} = \widehat{AFC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta KHF$ đều $(đpcm)$.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

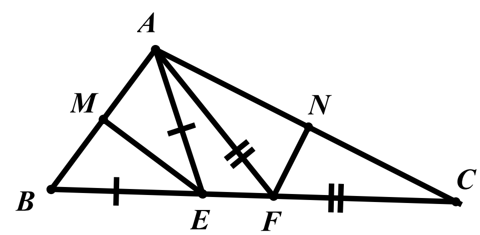
Phần 1:

Bài 1.



a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.
   Xét ΔDAB có DM là trung trực $\Rightarrow \Delta DAB$ cân tại D
   Tương tự ta có ΔEAC cân tại E.
b) Xét ΔOAB có OM là trung trực $\Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O
   $\Rightarrow OA = OB\ (1)$
   Tương tự có ΔOAC cân tại $O \Rightarrow OA = OC\ (2)$.
   Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow$ đường tròn tâm O bán kính OA đi qua A, B, C.

Bài 2. Xét ΔEAB có ME là trung trực của $AB \Rightarrow \Delta EAB$ cân tai E



$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{ABE} = \widehat{ABC}$

Xét ΔFAC có FN là trung trực của $AC \Rightarrow \Delta FAC$ cân tại F

$\Rightarrow \widehat{CAF} = \widehat{ACF} = \widehat{ACB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{CAF} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} - \widehat{CAF} = 100^\circ - (\widehat{BAE} + \widehat{CAF}) = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$

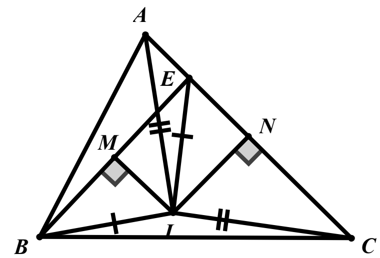
Bài 3.

a) Xét ΔIBE có IM là trung trực của $BE \Rightarrow \Delta IBE$ cân tại $I \Rightarrow IB = IE$

Xét ΔIAC có IN là trung trực của $AC \Rightarrow \Delta IAC$ cân tại $I \Rightarrow IA = IC$

Xét ΔAIB và ΔCIE có $IA = IC;\ AB = CE;\ IB = IE$

$\Rightarrow \Delta AIB = \Delta CIE\ (c.c.c)\ (đpcm)$.



b) Vì ΔIAC cân tại $I \Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ICA}$ (1)

Vì $\Delta AIB = \Delta CIE \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{ICE} = \widehat{ICA}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{IAB} \Rightarrow AI$ là tia phân giác của góc BAC.

Bài 4.

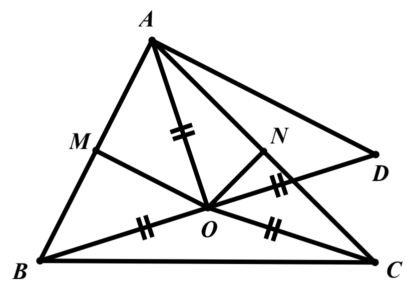
a) Vì O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC

Suy ra: $OA = OB = OC$

Vì $OD = OB \Rightarrow OD = OA \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AD. (1)

Vì $OD = OB \Rightarrow OD = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của CD. (2)

(1) Và (2) $\Rightarrow (đpcm)$.



b) Xét ΔOAB cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \dfrac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2}$

Xét ΔOAD cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODA} = \dfrac{180^\circ - \widehat{AOD}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{OAB} + \widehat{OAD} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{AOD}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{AOB} + \widehat{AOD}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại A $(đpcm)$.

Xét ΔOCD cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \dfrac{180^\circ - \widehat{DOC}}{2}$

Xét ΔOBC cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2}$

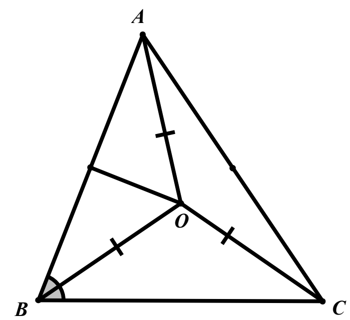
$$\widehat{OCB}+\widehat{OCD}=\frac{180^\circ-\widehat{DOC}}{2}+\frac{180^\circ-\widehat{BOC}}{2}=180^\circ-\frac{\widehat{DOC}+\widehat{COB}}{2}=180^\circ-\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{BCD}=90^\circ \Rightarrow \Delta CBD$ vuông tại C.

c) Ta có

$\Rightarrow \widehat{ADO}+\widehat{ODC}=180^\circ-(\widehat{ABO}+\widehat{CBO})=180^\circ-\widehat{ABC}=180^\circ-70^\circ=110^\circ \Rightarrow \widehat{ADC}=110^\circ$

Bài 5.



a) Vì O là giao điểm các đường trung trực của ΔABC nên $OA=OB=OC$.

Xét ΔBOA và ΔBOC có:

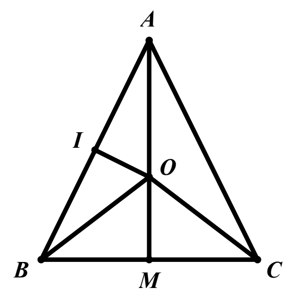
$OA=OC;\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\widehat{OBC}=\widehat{OCB}$ (do OB là tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$) $\Rightarrow \widehat{AOB}=\widehat{BOC}$; và OB chung.

$\Rightarrow\ \Delta BOA=\Delta BOC\ (c.g.c)$

b) Vì $\Delta BOA=\Delta BOC \Rightarrow AB=BC \Rightarrow \Delta BAC$ cân tại B;

Mặt khác OB là tia phân giác của góc $ABC \Rightarrow OB$ là trung trực của AC $(đpcm)$

Bài 6. Xét ΔOAB vì OI là trung trực của AB nên $OA=OB;(1)$



Vì ΔABC cân tại A, mà AM là trung tuyến $AM\perp BC$

Xét ΔOBM và ΔOCM có: $BM=MC;$

$\widehat{BMO}=\widehat{OMC}=90^\circ$; OM chung $\Rightarrow \Delta OBM=\Delta OCM\ (c.g.c)$

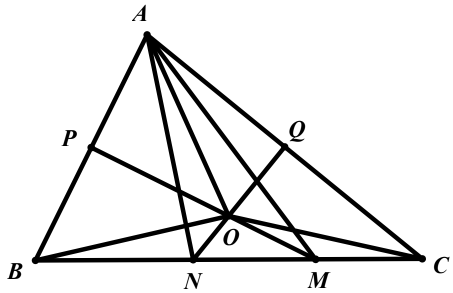
$\Rightarrow OB=OC(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA=OB=OC \Rightarrow O$ cách đều 3 đỉnh của ΔABC $(đpcm)$.

Bài 7. Vì O là giao điểm của các đường trung trực trong ΔABC nên: $OA=OB=OC$

.

Vì MP là trung trực cạnh $AB \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại $M \Rightarrow AM = BM$



Vì NQ là trung trực của cạnh $AC \Rightarrow \Delta NAC$ cân tại $N \Rightarrow AN = NC$

Xét ΔOAM và ΔOBM có $OA = OB,\ AM = BM$ và OM chung

$\Rightarrow \Delta OAM = \Delta OBM\ (c.c.c) \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OBM}$

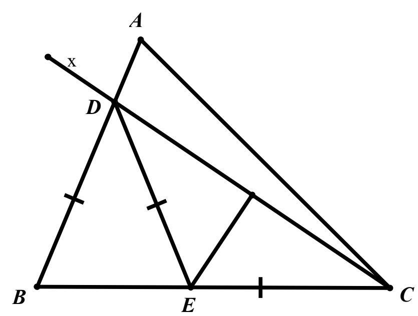
Xét ΔOAN và ΔOCN có: $AN = CN;\ OA = OC;\ ON$ chung

$\Rightarrow \Delta OAN = \Delta OCN\ (c.c.c) \Rightarrow \widehat{OAN} = \widehat{OCN}$ (2)

Xét ΔOBC có $OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ (3)

Từ (1),(2) và (3) $\Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OAN} \Rightarrow OA$ là phân giác của góc MAN $(đpcm)$.

Bài 8. Giả sử tìm được các điểm $D,\ E$ thỏa mãn đầu bài, ta có:



ΔDBE cân tại D do $BD = DE \Rightarrow \widehat{DBE} = \widehat{DEB}$

ΔEDC cân tại E do $DE = EC\ (gt) \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{ECD}$ (2)

Mà $\widehat{DEB}$ là góc ngoài $\Delta EDC \Rightarrow \widehat{DEB} = 2\widehat{ECD}$

$\Rightarrow \widehat{ECD} = \frac{1}{2}\widehat{DEB} = \frac{1}{2}\widehat{DBE}$

Cách xác định (cách dựng):

- Qua C kẻ tia Cx tạo với CB góc $\frac{1}{2}\widehat{ABC}$, tia Cx cắt AB tại điểm D phải tìm.

- Kẻ đường trung trực của DC, cắt BC tại E là điểm phải tìm.

Chứng minh:

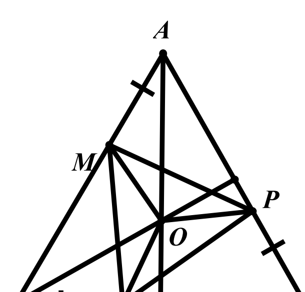
Xét ΔEDC có E nằm trên trung trực của $DC \Rightarrow ED = EC \Rightarrow \Delta EDC$ cân tại E;

Mặt khác, $\widehat{DEB}$ là góc ngoài $\Delta EDC \Rightarrow \widehat{EDB} = \widehat{EDC} + \widehat{ECD} = 2\widehat{ECD} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \Delta DBE$ cân tại D (vì $\widehat{DEB} = \widehat{DBE}$) $\Rightarrow DB = DE$ $(đpcm)$.

Bài 9.

a) Xét ΔMAP và ΔPCN có:



$AM = CP\ (gt)$; $\widehat{MAP} = \widehat{PCN} = 60^\circ$; $AP = AC - PC = BC - BN = CN$

$\Rightarrow \Delta MAP = \Delta PCN\ (c.g.c) \Rightarrow MP = PN;\ (1)$

Tương tự ta có $\Delta NBM = \Delta PCN \Rightarrow MN = PN\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MN = MP = PN \Rightarrow \Delta MPN$ đều *(đpcm)*

b) Vì O là giao điểm các đường trung trực của $\Delta ABC \Rightarrow OA = OB = OC$.

Mặt khác ΔABC đều nên ta có: $\widehat{OAM} = \widehat{OAP} = \widehat{OCP} = \widehat{OCN} = \widehat{OBN} = \widehat{OBM} = 30^\circ$

Xét ΔMAO và ΔNBO có $MA = NB$; $\widehat{MAO} = \widehat{NBO} = 30^\circ$; $OA = OB$

$\Rightarrow \Delta MAO = \Delta BNO\ (c.g.c) \Rightarrow MO = NO.(3)$

Tương tự ta có: $NO = PO\ (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta MNP \Rightarrow O$ là giao của các đường trung trực ΔMNP *(đpcm)*

Bài 10.

a) Xét ΔBEC có EM là trung trực $\Rightarrow EB = EC \Rightarrow \Delta BEC$ cân tại E.

b) Vì ΔBEC cân tại E nên $\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = 30^\circ$

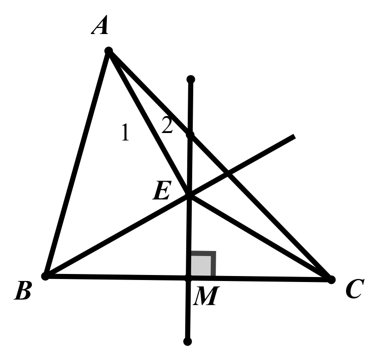
$\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{EBC} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$

Vì $\widehat{ACB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ACB} - \widehat{ECB} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$

Trong ΔABC ta có: $\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$ (1)

Mà $\widehat{ABE} + \widehat{ACE} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BAC} = \widehat{ABE} + \widehat{ACE}$ (đpcm)



c) Nếu $\widehat{AEB} > 90^0$, trong ΔABE có $\widehat{ABE} = 45^\circ$

$\hat{A}_1 < 45^\circ$

$\Rightarrow AE > BE \Rightarrow AE > EC$

Trong ΔEAC có : $AE > AC \Rightarrow \hat{A}_2 < \widehat{ACE} = 15^\circ$

$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 < 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ Điều này là vô lý vì

$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 60^\circ$ (3)

Nếu $\widehat{AEB} < 90^\circ$ trong ΔABE có $\widehat{ABE} = 45^0 \Rightarrow \hat{A}_1 > 45^\circ \Rightarrow AE < BE \Rightarrow AE < EC$

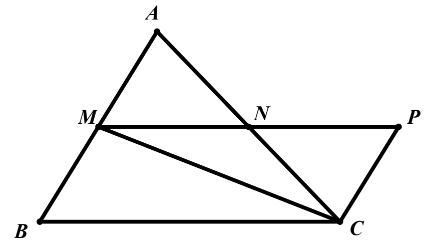
Trong ΔEAC có $AE < AC \Rightarrow \hat{A}_2 > \widehat{ACE} = 15^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 > 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$

Điều này là vô lý vì $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 60^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{AEB} = 90^0$

Phần 2:

Bài 1. Xét bài toán phụ nếu ΔABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC thì $MN//BC$ và $MN=\frac{1}{2}BC$. Thật vây:



Trên tia đối của tia NM lấy điểm P sao cho $NP=MN$

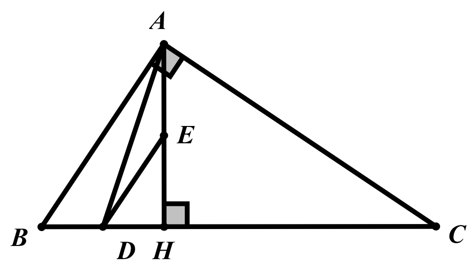
Xét ΔNAM và ΔNCP có: $AN=NC$; $\widehat{ANM}=\widehat{CNP}$ (*đối đỉnh*)

và $MN=NP \Rightarrow \Delta NAM=\Delta NCP$ $(c.g.c)$

$\Rightarrow MA=CP$ và $\widehat{MAN}=\widehat{NCP} \Rightarrow MA//CP$ $\Rightarrow \widehat{BMC}=\widehat{MCP}$ (*hai góc ở vị trí so le trong*)

Xét ΔBMC và ΔPCM có $CP=MA=MB$; $\widehat{BMC}=\widehat{PCM}$ và MC chung $\Rightarrow \Delta BMC=\Delta PCM$ $(c.g.c)$

$\Rightarrow MP=BC=MN+NP=2MN$ và $\widehat{BCM}=\widehat{CMP}$ $\Rightarrow MN//BC$



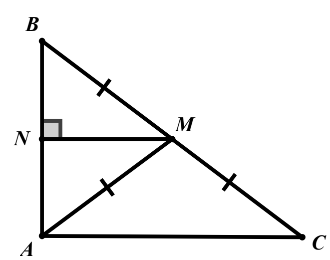
Xét ΔHAB có D là trung điểm của BH, E là trung điểm của AH, theo kết quả bài toán trên $DE//AB$

Xét ΔADE có $DC\perp AE$; $AB\perp AC \Rightarrow AC\perp DE$ (do $DE//AB$)

$\Rightarrow AC$ và DC thuộc đường cao của ΔADE

Mà $C=AC\cap DC \Rightarrow C$ là trực tâm của ΔADE.

Bài 2.



Xét ΔMAB có $MA=MB \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M mà $MN\perp AB$ tại N

$\Rightarrow N$ là trung điểm của AB.

Xét ΔABC có N là trung điểm AB, M là trung điểm của BC, theo kết quả của bài $1 \Rightarrow MN//AC$. Mà $MN\perp AB \Rightarrow AB\perp AC \Rightarrow A$ là trực tâm ΔABC

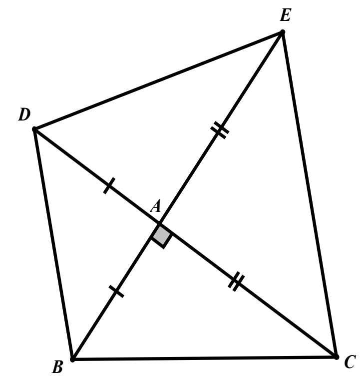
Bài 3.

a) Xét ΔADE *và* ΔABC ta có:

$AD = AB\ (gt)$; $\widehat{DAE} = \widehat{BAC} = 90^\circ$ (*hai góc đối đỉnh*);

$AE = AC$

$\Rightarrow \Delta ADE = \Delta ABC\ (c.g.c) \Rightarrow DE = BC\ (đpcm)$.



b) Xét ΔABD có $DA \perp AB$ (do ΔABC vuông tại A)

$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$

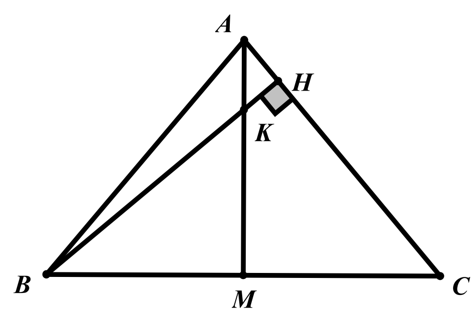
Mà $AD = AB \Rightarrow \Delta ABD$ vuông cân tại A $(đpcm)$.

Chứng minh tương tự ta có ΔACE vuông cân tại A

$\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{ACE} = 45^\circ$ (*hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau*)

$\Rightarrow BD / /CE\ (đpcm)$.

Bài 4. Vì ΔABC cân tại A, mà AM là trung tuyến



$\Rightarrow AM$ cũng là đường cao $\Rightarrow AM \perp BC$ tại M.

Mặt khác $BH \perp AC\ (gt)$

Mà $K = BH \cap AM \Rightarrow K$ là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow CK$ thuộc đường cao hạ từ C của $\Delta ABC \Rightarrow CK \perp AB\ (đpcm)$.

Ta có $\widehat{HKM} = (180^\circ - \widehat{KHC} - \widehat{KCH}) + (180^\circ - \widehat{KMC} - \widehat{KCM})$

$\Rightarrow \widehat{HKM} = (180^\circ - 90^\circ - \widehat{KCH}) + (180^\circ - 90^\circ - \widehat{KCM})$

$\Rightarrow \widehat{HKM} = 180^\circ - (\widehat{KCH} + \widehat{KCM}) = 180^\circ - \widehat{C} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

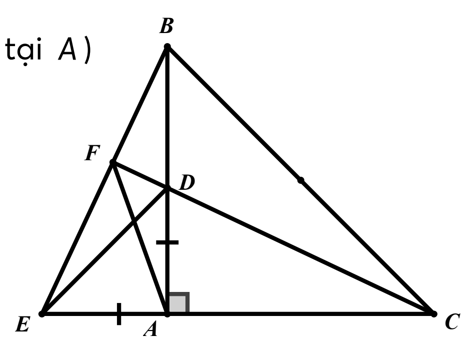
Bài 5. Xét ΔABE *và* ΔACD có $\widehat{BAE} = \widehat{CAD} = 90^\circ$

$AE = AD\ (gt)$; $AB = AC$ (do ΔABC vuông cân tại A)

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACD \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ABE}$

Gọi F là giao điểm của CD *và* BE

Ta có: $\widehat{FDB} = \widehat{ADC}$ (*hai góc đối đỉnh*)



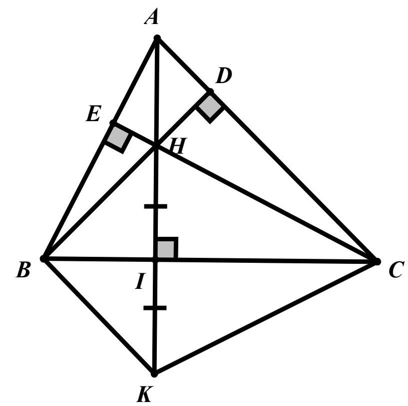
Mà $\widehat{ADC}+\widehat{DCA}=90^\circ \Rightarrow \widehat{FDB}+\widehat{FBD}=\widehat{ADC}+\widehat{DCA}=90^\circ$

Trong ΔFDB có $\widehat{DFB}=180^\circ-(\widehat{FDB}+\widehat{FBD})=180^\circ-90^\circ=90^\circ \Rightarrow CD\perp BE$

Xét ΔBEC *có* $AB\perp EC$ (gt); $CD\perp BE$ $(c.m.t)$, mà $D=CD\cap AB\Rightarrow D$ là trực tâm ΔBEC

$\Rightarrow ED$ thuộc đường cao của $\Delta BEC\Rightarrow ED\perp BC(đpcm)$.

Bài 6.



a) Vì K là đối xứng của H qua BC nên $\widehat{BCK}=\widehat{BCH}$

Ta lại có: $\widehat{IHC}=\widehat{EHA}$ (*hai góc đối đỉnh*)

Mà $\widehat{BCH}+\widehat{IHC}=90^\circ$ và $\widehat{EHA}+\widehat{EAH}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EAH}=\widehat{ICH}\Rightarrow \widehat{BCK}=\widehat{BAH}$ $(đpcm)$.

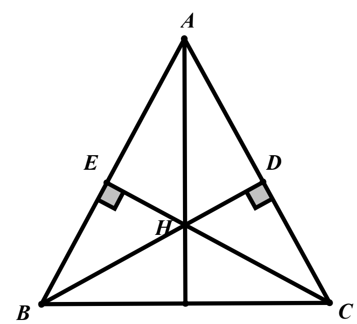
b) Vì K là đối xứng của H qua BC nên $\widehat{KBC}=\widehat{CBH}$

Ta có $\widehat{CBH}+\widehat{BHI}=90^\circ$ và $\widehat{AHD}+\widehat{HAD}=90^\circ$

Hơn nữa : $\widehat{BHI}=\widehat{AHD}$ (*hai góc đối đỉnh*) $\Rightarrow \widehat{CBH}=\widehat{CAH}$

Trong ΔIAC có $\widehat{CAH}=\widehat{CAI}=90^\circ-\widehat{ACB}=90^\circ-50^\circ=40^\circ$ $\widehat{KBC}=\widehat{CBH}=\widehat{CAH}=40^\circ$.

Bài 7. Xét ΔDBA *và* ΔECA có: $\widehat{CEA}=\widehat{BDA}=90^\circ$; $\widehat{A}$ chung



$\Rightarrow \widehat{ACE}=\widehat{ABD}=90^\circ-\widehat{A}$; và $CE=BD$

$\Rightarrow$ $\Delta DBA=\Delta ECA$ $(g.c.g)\Rightarrow AB=AC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A $(đpcm)$.

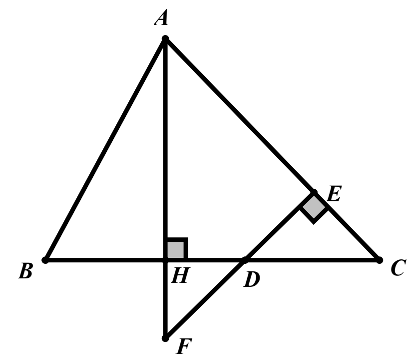
Xét ΔABC có $BD\perp AC$ (gt); $CE\perp AB$ (gt)

Mà $H=CE\cap BD\Rightarrow H$ là trực tâm của ΔABC

Hơn nữa: ΔABC cân tại A

$\Rightarrow AH$ là phân giác của góc BAC $(đpcm)$.

Bài 8.



Vì $DE \perp AC \Rightarrow FE \perp AC$;

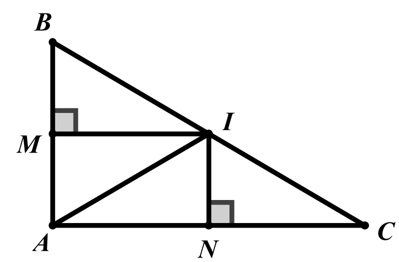
$AH \perp BC \Rightarrow CH \perp AF$

Xét ΔAFC có $FE \perp AC$ và $CH \perp AF$

Mà $D = FE \cap CH \Rightarrow D$ là trực tâm ΔAFC

$\Rightarrow AD \perp FC$ $(đpcm)$.

Bài 9.



a) Xét bài toán phụ: Nếu ΔABC vuông tại A, I là trung điểm của BC thì $IA = IB = IC$.

Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ I xuống AB và AC

Ta có $IM \perp AB,\ AC \perp AB \Rightarrow IM // AC$

$\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{ICN}$ *(hai góc đồng vị)*

Xét ΔMBI và ΔNIC có $\widehat{BMI} = \widehat{INC} = 90^\circ$, $\widehat{BIM} = \widehat{ICN}$ và $BI = IC$

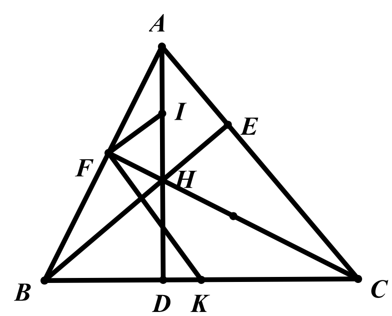
$\Rightarrow \Delta MBI = \Delta NIC$ *(tam giác vuông cạnh huyền – góc nhọn bằng nhau)*

$\Rightarrow BM = IN$ và $MI = NC$

Mà $IM \perp AB, NA \perp AB \Rightarrow IM = AN \Rightarrow IM = NC = AN \Rightarrow N$ là trung điểm AC.

Trong ΔIAC có IN vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow \Delta IAC$ cân tại I

$\Rightarrow IA = IC \Rightarrow IA = IB = IC$ $(đpcm)$.



Xét ΔFAH có $\widehat{AFH} = 90^\circ$ và I là trung điểm của $AH \Rightarrow IA = IF = IH$

$\Rightarrow \Delta IFH$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IFH} = \widehat{IHF}$

Xét ΔFBC có $\widehat{BFC} = 90^\circ$ và K là trung điểm của $BC \Rightarrow KC = KB = KF$

$\Rightarrow \Delta KFC$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KFC} = \widehat{KCF}$

Ta có: $\widehat{IFK} = \widehat{IFH} + \widehat{HFK} = \widehat{IHF} + \widehat{KCF} = \widehat{DHC} + \widehat{DCH} = 90^\circ$

$\Rightarrow FK \perp FI$ $(đpcm)$.

b) Xét ΔFIK vuông tại F có: $FI = IA = IH = \dfrac{AH}{2} = \dfrac{6}{2} = 3(cm)$

Tương tự $FK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{8}{2} = 4(cm)$

Theo pitago ta có: $IK^2 = FI^2 + FK^2 \Rightarrow IK^2 = 3^3 + 4^2 \Rightarrow IK = 5(cm)$

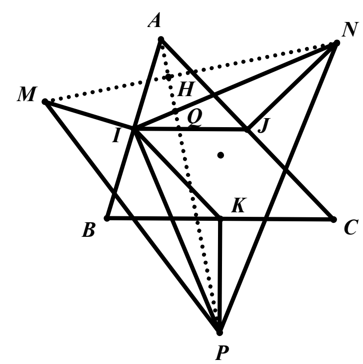
Bài 10.

a) Xét ΔABC có I, J lần lượt là trung điểm của AB và AC, theo kết quả bài toán phụ ở bài 1 $\Rightarrow IJ // BC$ và $IJ = \frac{1}{2}BC$

Xét ΔIJN và ΔPKN có: $IJ = PK = \frac{1}{2}BC$, $\widehat{IJN} = \widehat{IJA} + \widehat{AJN} = \widehat{IJA} + 90^\circ$

Vì $IJ // BC \Rightarrow \widehat{IJA} = \widehat{ACB}$ (*hai góc đồng vị*)

Tương tự vì I, K lần lượt là trung điểm của AB và $BC \Rightarrow IK // AC$



$\Rightarrow \widehat{IKB} = \widehat{ACB}$ (*hai góc đồng vị*) $\Rightarrow \widehat{IJN} = \widehat{PKI}$

và $IK = \frac{1}{2}AC \quad \Rightarrow KI = JN = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow \Delta IJN = \Delta PKN (c.g.c) \Rightarrow IN = IP$ (*đpcm*).

b) Xét ΔIPN có $\widehat{NIP} = \widehat{NIJ} + \widehat{JIK} + \widehat{KIP} = \widehat{IPK} + \widehat{IJK} + \widehat{KIP}$

vì $\widehat{NIJ} = \widehat{IPK}$ (do $\Delta IJN = \Delta PKN$)

$\Rightarrow \widehat{NIP} = \widehat{IPK} + \widehat{IKB} + \widehat{KIP}$ (vì $\widehat{IKB} = \widehat{IJK}$ *hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau*)

$\Rightarrow \widehat{NIP} = \widehat{IPK} + \widehat{IKP} + \widehat{KIP} - \widehat{BKP} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow$ ΔIPN vuông cân tại I

Xét ΔIMN và ΔIAP có $MI = IA = \frac{1}{2}AB$;

$\widehat{MIN} = 360^\circ - \widehat{BIM} - \widehat{NIP} - \widehat{BIP} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \widehat{BIP} = 180^\circ - \widehat{BIP}$ (1)

$\widehat{AIP} = 180^\circ - \widehat{BIP}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MIN} = \widehat{AIP}$

Ngoài ra $IN = IP$ $(c.m.t) \Rightarrow \Delta IMN = \Delta IAP$ $(c.g.c)$ $\Delta MN = AP$ (*đpcm*).

Cũng suy ra $\widehat{MNQ} = \widehat{API}$

Gọi Q là giao điểm của IN và AP, ta có:

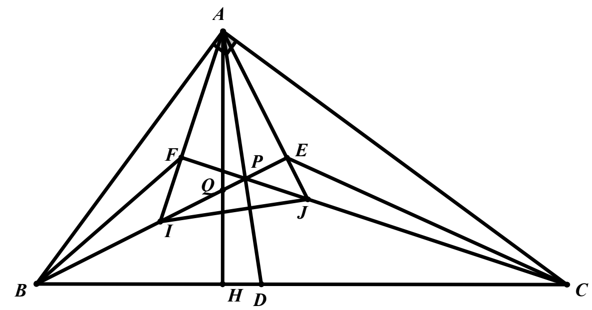
$\widehat{MNQ} + \widehat{NQA} = \widehat{API} + \widehat{IQP} = 180^\circ - \widehat{NIP} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Gọi H là giao của AP và MN, xét ΔHNQ có:

$\widehat{HNQ} + \widehat{NQH} = \widehat{MNQ} + \widehat{NQA} = 90^\circ \Rightarrow AP \perp MN$ (*đpcm*).

Bài 11.

a) Gọi Q là giao điểm của BE *và* AH ta có vì AE là phân giác của góc HAC nên:



$$\widehat{QAE} = \frac{\widehat{HAC}}{2} = \frac{90^\circ - \widehat{ACB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{QAE} = \frac{90^\circ - (90^\circ - \widehat{ABC})}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

Xét ΔHQB vuông tại H nên: $\widehat{HQB} + \widehat{QBH} = 90^\circ$

Mà $\widehat{QBH} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$ và $\widehat{HQB} = \widehat{AQE}$ (*hai góc đối đỉnh*)

$\Rightarrow \widehat{QAE} + \widehat{AQE} = \widehat{QBH} + \widehat{HQB} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AE \Rightarrow \Delta ABE$ vuông tại E (*đpcm*).

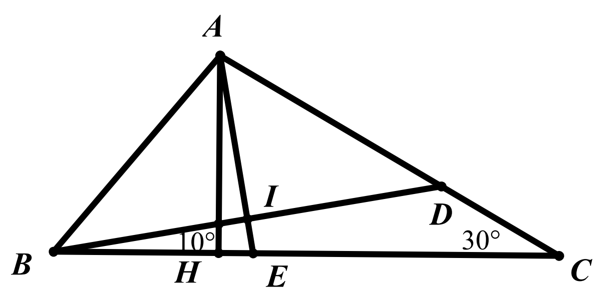
b) Hoàn toàn tương tự nếu gọi F là giao của CJ *và* AI thì $CJ \perp AI$

Xét ΔAIJ có $IE \perp AJ$ *và* $JF \perp AI \Rightarrow P$ là giao điểm 3 đường phân giác của ΔABC lại là trực tâm của $\Delta AIJ \Rightarrow AP$ thuộc đường cao của $\Delta AIJ \Rightarrow AP \perp IJ$ hay $AD \perp IJ$ $\left(đpcm\right)$.

Bài 12. Vì $\widehat{ADB}$ là góc ngoài ΔDBC

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$

Trong ΔABC có:



$\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ACB} = 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ$

$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \widehat{DBC} = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$

Xét ΔABD có $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} = 40^0 \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại A

Gọi I là giao của AE *và* $BD \Rightarrow AI$ là phân giác của BAD

Mà ΔABD cân $\Rightarrow AI$ đồng thời là đường cao của $\Delta ABD \Rightarrow AI \perp BD$ hay $AE \perp BD$ $\left(đpcm\right)$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IX

I. KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

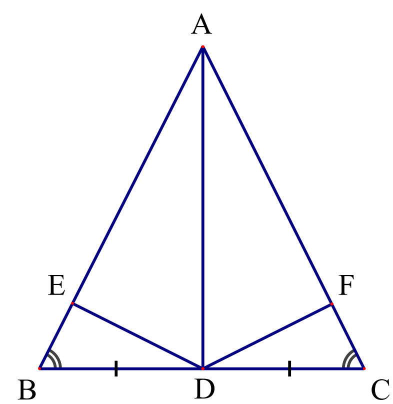
- Nắm được mối quan hệ giữa cạnh và góc trong một tam giác.
- Nhận biết và nắm được tính chất của các đường đồng quy trong tam giác.
- Áp dụng linh hoạt tính chất đồng quy để giải quyết các bài tập.

II. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem lại nội dung từ bài 31 đến bài 35.

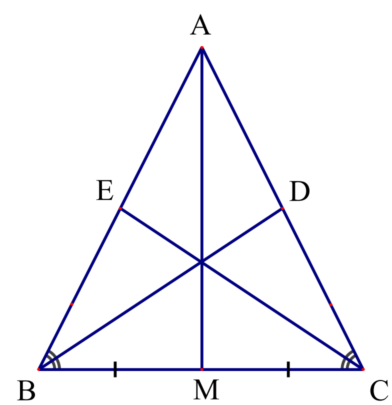
III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.



Xét ΔABC cân tại A có AD là đường trung tuyến
đồng thời cũng là đường phân giác của góc
Ta có DE ⊥ AB, DF ⊥ AC (gt)
Mà AD là đường phân giác của góc A (cmt)
Suy ra DE = DF.

Bài 2.



Xét tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC.
AM là tia phân giác của góc A nên
M cách đều hai cạnh AB, AC.

a) Chứng minh được ΔAMB = ΔAMC (c.c.c).

Từ đó suy ra AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.
b) Xét ΔABC có AM , BD,CE là các tia phân giác.

Từ tính chất ba đường phân giác trong tam giác,
suy ra ba đường thẳng AM , BD,CE đồng quy.

Bài 3.

Gọi M, N là trung điểm AC và AB.

ΔABC cân tại A có BM, CN là đường trung tuyến ứng với cạnh bên AC, AB

$\Rightarrow$ BM = CN.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC, ta có: GB = 2 BM, GC = 2 CN.

$\Rightarrow$ GB = GC

Xét ΔAGB và ΔAGC có:

AG chung

AB = AC (do ΔABC cân tại A)

GB = GC (cmt)

$\Rightarrow \triangle AGB = \triangle AGC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAG} = \widehat{CAG}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow$ G thuộc tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

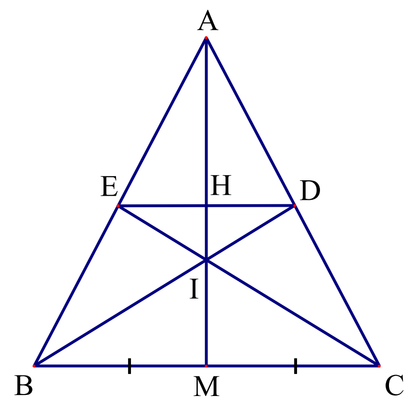
Theo đề bài, điểm I cách đều ba cạnh của tam giác

$\Rightarrow$ I là điểm chung của ba đường phân giác

$\Rightarrow$ I thuộc tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

Vì G, I cùng thuộc tia phân giác của BAC nên A, G, I thẳng hàng.

Bài 4.



a) Vì tam giác ABC cân tại A, có AM là đường trung tuyến nên AM là phân giác.

Có AM và BD giao nhau tại điểm I nên I là giao của ba đường phân giác.

$\Rightarrow$ CI là đường phân giác của tam giác ABC.

b) Ta có $\widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ và $\widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$ (Vì I nằm trên tia phân giác BD, CE của tam giác ABC)

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ do tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow \widehat{IBC} = \widehat{ICB}$. Vậy tam giác IBC cân tại I.

c) Xét tam giác IEB và tam giác IDC có:

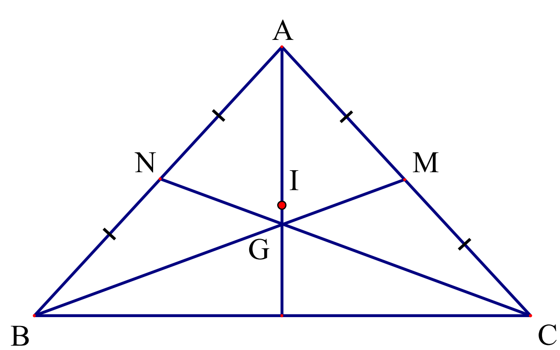
$\widehat{EBI} = \widehat{DCI}$

$\widehat{EIB} = \widehat{DIC}$ (hai góc đối đỉnh)

IB = IC (tam giác IBC cân tại I)

$\Rightarrow \triangle IEB = \triangle IDC$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ BE = DC



$\Rightarrow$ AE = AD

$\Rightarrow$ Tam giác AED cân tại A

$\Rightarrow \widehat{AED} = \dfrac{\widehat{180^o - \hat{A}}}{2}$, mà $\widehat{ABC} = \dfrac{\widehat{180^o - \hat{A}}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABC}$, mà hai góc ở vị trí so le trong

$\Rightarrow$ ED // BC.

d) Ta chứng minh được $\triangle AHE = \triangle AHD$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ HE = HD

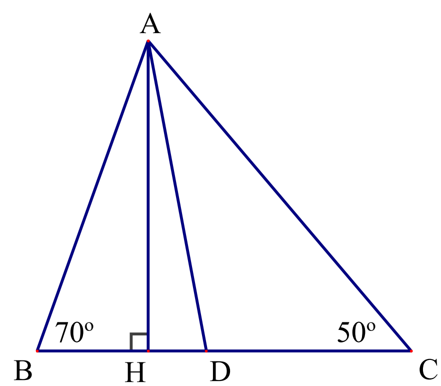
$\Rightarrow$ H là trung điểm của ED.

e) Có AE = AD, HE = HD, suy ra AH là đường trung trực của ED

$\Rightarrow AH \perp ED$ hay $AM \perp ED$

f) Điểm I và trọng tâm G của tam giác ABC trùng nhau thì tam giác ABC đều.

Bài 5.



a) Từ giả thiết, ta tính được $\widehat{BAC} = 60^o$

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} = 30^o = \widehat{DAB}$

$\Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{DAC} + \hat{C} = 80^o$.

Do đó, xét tam giác AHD, ta tính được

$\widehat{BAH} = 90^o - 70^o = 20^o$

Vậy $\widehat{HAD} = 30^o - 20^o = 10^o$.

b) $\widehat{HAD} = 90^o - \widehat{HDA} = 90^o - \left(\dfrac{\hat{A}}{2} + \hat{C}\right) = \dfrac{180^o - \hat{A} - 2\hat{C}}{2} = \dfrac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$.

Bài 6.

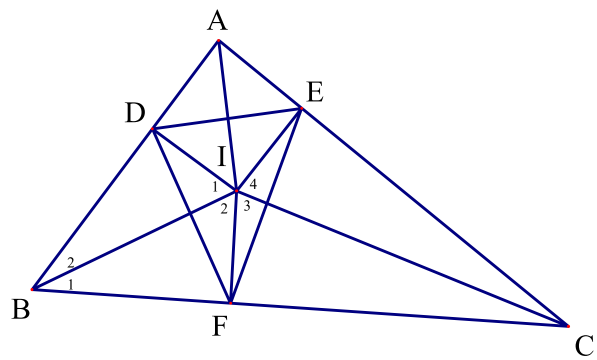
a) Vì H là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc N, P nên MH là phân giác góc M. Do đó, H cách đều hai cạnh MN, MP.

b) $\widehat{HMN} = \dfrac{1}{2}\widehat{NMP} = \dfrac{1}{2}.70^o = 35^o$.

$\widehat{NHP} = 180^o - \left(\frac{1}{2}\widehat{MNP} + \frac{1}{2}\widehat{MPN}\right) = 180^o - \frac{1}{2}\left(\widehat{MNP} + \widehat{MPN}\right)$

$= 180^o - \frac{1}{2}\left(180^o - 70^o\right) = 125^o$.

Bài 7.



a) AI là phân giác góc A nên $\widehat{IAD} = \widehat{IAE} = 45^o$.

Hai ΔAIE và ΔAID là hai tam giác cân ở E và ở D nên AE = EI và AD = DI

Vì AI là phân giác góc A nên IE = ID

$\Rightarrow$ AD = AE

b) Nếu ΔABC vuông cân ở A thì $\hat{B} = \hat{C}$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \widehat{D_3} = \widehat{D_4}$. Do đó $\widehat{DIF} = \widehat{EIF}$.

Suy ra $\Delta DIF = \Delta EIF$ (c.g.c) $\Rightarrow$ FD = FE

Vậy ΔEDF cân ở F.