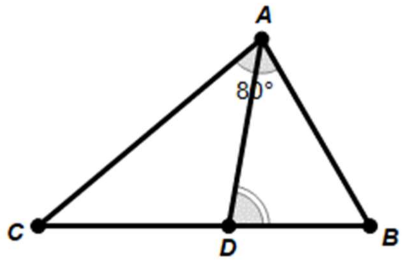
CHƯƠNG IV.

TAM GIÁC BẰNG NHAU

BÀI 12. TỔNG CÁC GÓC TRONG MỘT TAM GIÁC

VD 1.1.



a) Xét ΔABC có $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.Theo giả thiết $\hat{A}=80^\circ$ $\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=100^\circ$.

Mặt khác, ta có: $\hat{B}-\hat{C}=20^\circ$ (giả thiết).Nên, ta có được: $\hat{B}=\dfrac{100^\circ+20^\circ}{2}=60^\circ$.

$\Rightarrow \hat{C}=60^\circ-20^\circ=40^\circ$.

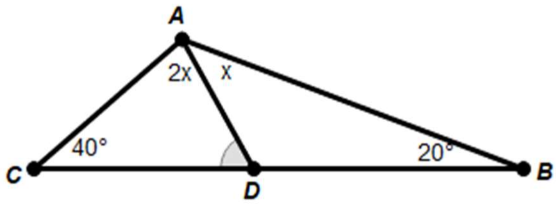
Vậy: $\hat{B}=60^\circ;\hat{C}=40^\circ$

b) Do AD là tia phân giác góc $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAD}=\widehat{DAC}=\dfrac{1}{2}\cdot\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}\cdot 80^\circ=40^\circ$.

Xét ΔACD có $\widehat{ADB}$ là góc ngoài đỉnh D nên $\widehat{ADB}=\widehat{DAC}+\widehat{ACD}=40^\circ+40^\circ=80^\circ$.

Vậy: $\widehat{ADB}=80^\circ$

VD 1.2.



a) Xét ΔABC có $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.

$\Rightarrow \hat{A}=180^\circ-\left(\hat{B}+\hat{C}\right)=180^\circ-\left(20^\circ+40^\circ\right)=120^\circ$.

Do $\hat{A}>90^\circ$ nên tam giác ABC là tam giác có một góc tù.

b) Theo giả thiết, ta có $\widehat{CAD}=2.\widehat{BAD}\Rightarrow \dfrac{\widehat{BAD}}{\widehat{CAD}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{\widehat{BAD}}{\widehat{BAD}+\widehat{CAD}}=\dfrac{1}{1+2}$.

$\Rightarrow \widehat{BAD}=\dfrac{1}{3}\widehat{BAC}=\dfrac{1}{3}.120^\circ=40^\circ$.

Xét ΔADB có $\widehat{ADC}$ là góc ngoài đỉnh D nên $\widehat{ADC}=\widehat{BAD}+\widehat{ABD}$.

$\Rightarrow \widehat{ADC}=40^\circ+20^\circ=60^\circ$.

VD 1.3. Bài toán này chỉ có các mối quan hệ đại số giữa các góc, không tồn tại mối quan hệ hình học nào (ngoại trừ tổng ba góc). Do đó, ta có thể giải quyết bài tập này qua các phương pháp đại số cơ bản: bài toán tổng – hiệu và dãy tỉ số bằng nhau.

Xét ΔABC có: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$.

Mà $\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C}=100^\circ$ (giả thiết) nên ta có:

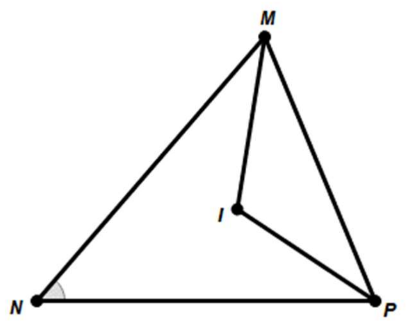
$\widehat{A}+\widehat{B}=\dfrac{180^\circ+100^\circ}{2}=140^\circ$; $\widehat{C}=140^\circ-100^\circ=40^\circ$.

Mặt khác, ta có $\widehat{A}:\widehat{B}=4:3 \Rightarrow \dfrac{\widehat{A}}{4}=\dfrac{\widehat{B}}{3}$.

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có $\dfrac{\widehat{A}}{4}=\dfrac{\widehat{B}}{3}=\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{3+4}=\dfrac{140^\circ}{7}=20^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{A}=4.20^\circ=80^\circ$ và $\widehat{B}=60^\circ$.

VD 2.1.



Xét ΔMIP có: $\widehat{MIP}+\widehat{IMP}+\widehat{IPM}=180^\circ \Rightarrow \widehat{MIP}=180^\circ-\left(\widehat{IMP}+\widehat{IPM}\right)$ (1)

Từ giả thiết, ta có: $\widehat{IMP}=\dfrac{1}{2}\widehat{NMP}$ (do MI là phân giác của $\widehat{NMP}$).

$\widehat{IPM}=\dfrac{1}{2}\widehat{NPM}$ (do PI là phân giác của $\widehat{NPM}$).

Nên, từ (1), ta có $\widehat{MIP}=180^\circ-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\widehat{NMP}+\widehat{NPM}\right)$ (2)

Mặt khác, xét ΔMNP có $\widehat{MNP}+\widehat{NMP}+\widehat{NPM}=180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{NMP}+\widehat{NPM}=180^\circ-\widehat{MNP}$ (3)

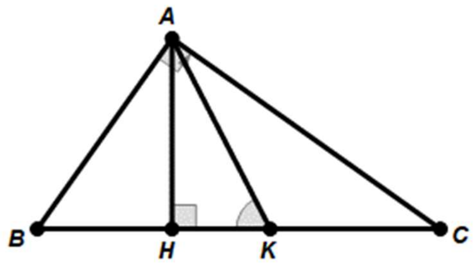
Thế (3) vào (2), ta được: $\widehat{MIP}=180^\circ-\dfrac{1}{2}\cdot\left(180^\circ-\widehat{MNP}\right)$.

$\Leftrightarrow \widehat{MIP}=180^\circ-90^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot\widehat{MNP}$.

$\Leftrightarrow \widehat{MIP} = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \widehat{MNP}$ (đpcm).

Vậy: $\widehat{MIP} = 90^\circ + \frac{\widehat{MNP}}{2}$

VD 2.2.



a) Xét tam giác vuông ABC ($\widehat{BAC} = 90^\circ$) có: $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$ $\quad (1)$.

Xét tam giác vuông ABH ($\widehat{AHB} = 90^\circ$) có: $\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ$ $\quad (2)$.

Từ (1), (2), ta có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BAH}$ (đpcm).

b) Ta có AK là tia phân giác của $\widehat{CAH}$ nên $\widehat{CAK} = \widehat{KAH} = \frac{1}{2}\widehat{CAH}$.

Mà, theo chứng minh trên, ta có $\widehat{ACB} = \widehat{BAH}$ nên suy ra

$\widehat{ACB} + \widehat{CAK} = \widehat{BAH} + \widehat{KAH} \Leftrightarrow \widehat{ACB} + \widehat{CAK} = \widehat{BAK}$ $\quad (3)$.

Ta có $\widehat{AKB}$ là góc ngoài đỉnh K của ΔAKC nên

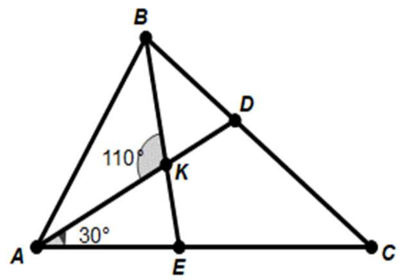
$\widehat{AKB} = \widehat{ACK} + \widehat{CAK}$ hay $\widehat{AKB} = \widehat{ACB} + \widehat{CAK}$ $\quad (4)$.

Từ (3) và (4) ta có $\widehat{AKB} = \widehat{BAK}$ (đpcm).

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

Ta có $\widehat{KAB} = \widehat{KAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 30^\circ$ do AK là phân giác của $\widehat{BAC}$.



$\Rightarrow \widehat{BAC} = 2.\widehat{KAC} = 2.30^\circ = 60^\circ$.

Xét ΔABK có $\widehat{KAB} + \widehat{KBA} + \widehat{AKB} = 180^\circ$.

$\Rightarrow 30^\circ + \widehat{KBA} + 110^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{KBA} = 180^\circ - (30^\circ + 110^\circ) = 40^\circ$.

Mà BK là phân giác của $\widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 2.\widehat{ABK} = 2.40^\circ = 80^\circ$.

Xét ΔABC có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

$\Rightarrow 60^\circ + 80^\circ + \hat{C} = 180^\circ$.

$\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ$.

Vậy ΔABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 80^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$.

Bài 2.

Xét ΔMNP có $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} = 180^\circ$.

a) Do $\widehat{M} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{N} + \widehat{P} = 90^\circ$.

Mà ta có $\widehat{N} : \widehat{P} = 3 : 2$ $\Rightarrow \dfrac{\widehat{N}}{3} = \dfrac{\widehat{P}}{2}$.

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có: $\dfrac{\widehat{N}}{3} = \dfrac{\widehat{P}}{2} = \dfrac{\widehat{N} + \widehat{P}}{2+3} = \dfrac{90^\circ}{5} = 18^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{N} = 3.18^\circ = 54^\circ$; $\widehat{P} = 2.18^\circ = 36^\circ$.

b) Do $\widehat{M} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{N} + \widehat{P} = 100^\circ$ (1).

Theo giả thiết, $\widehat{N} + 2\widehat{P} = 120^\circ$ nên từ (1), suy ra $100^\circ + \widehat{P} = 120^\circ$ $\Rightarrow \widehat{P} = 120^\circ - 100^\circ = 20^\circ$.

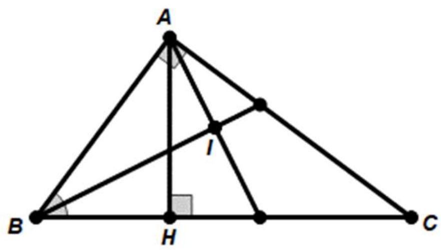
$\Rightarrow \widehat{N} = 100^\circ - \widehat{P} = 100^\circ - 20^\circ = 80^\circ$.

c) Từ giả thiết, ta có $\dfrac{\widehat{M}}{2} = \dfrac{\widehat{N}}{1} = \dfrac{\widehat{P}}{6}$.

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có: $\dfrac{\widehat{M}}{2} = \dfrac{\widehat{N}}{1} = \dfrac{\widehat{P}}{6} = \dfrac{\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P}}{2+1+6} = \dfrac{180^\circ}{9} = 20^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{M} = 2.20^\circ = 40^\circ$; $\widehat{N} = 1.20^\circ = 20^\circ$; $\widehat{P} = 6.20^\circ = 120^\circ$.

Bài 3.



Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Xét ΔAHC vuông tại H có $\widehat{HAC} + \widehat{ACH} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{HAC} + \widehat{ACH} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$).

Từ giả thiết, ta có:

$\widehat{ABI} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$ (do BI là phân giác của $\widehat{ABC}$).

$\widehat{HAI}=\frac{1}{2}\widehat{HAC}$ (do AI là phân giác của $\widehat{HAC}$).

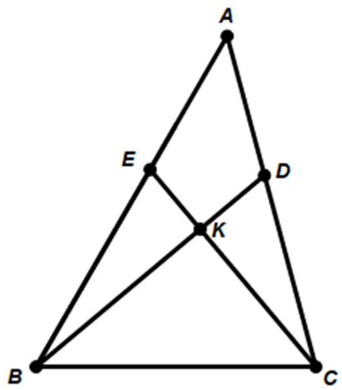
$\Rightarrow \widehat{ABI}+\widehat{HAI}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\frac{1}{2}\widehat{HAC}=\widehat{HAC}$ (do $\widehat{HAC}=\widehat{ABC}$).

Xét tam giác ΔABI có:

$\widehat{ABI}+\widehat{IAB}=\widehat{ABI}+\widehat{IAH}+\widehat{HAB}=\widehat{HAC}+\widehat{HAB}=\widehat{BAC}=90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{AIB}=180^\circ-\left(\widehat{ABI}+\widehat{IAB}\right)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

Bài 4.



a) Xét ΔKBC có $\widehat{BKC}+\widehat{KBC}+\widehat{KCB}=180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{BKC}=180^\circ-\left(\widehat{KBC}+\widehat{KCB}\right)$ (1)

Từ giả thiết,

ta có $\widehat{KBC}+\widehat{KCB}=\frac{2}{3}\widehat{CBA}+\frac{2}{3}\widehat{BCA}$ (2)

Mà trong ΔABC có $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.

$\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=180^\circ-\hat{A}$ (3).

Từ (3) và (2) ta có:

$\widehat{KBC}+\widehat{KCB}=\frac{2}{3}\left(\widehat{CBA}+\widehat{BCA}\right)=\frac{2}{3}\left(\hat{B}+\hat{C}\right)$.

$\Rightarrow \widehat{KBC}+\widehat{KCB}=\frac{2}{3}\left(180^\circ-\hat{A}\right)=120^\circ-\frac{2}{3}\hat{A}$.

Do đó, thay vào (1), ta được: $\widehat{BKC}=180^\circ-\left(120^\circ-\frac{2}{3}\hat{A}\right)=60^\circ+\frac{2}{3}.\hat{A}$ (đpcm).

b) Để $BK\perp CK$ thì $\widehat{BKC}=90^\circ$.

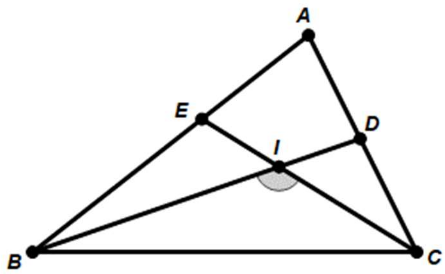
$\Rightarrow \widehat{BKC}=60^\circ+\frac{2}{3}.\hat{A}=90^\circ$.

$\Rightarrow \frac{2}{3}.\hat{A}=30^\circ \Leftrightarrow \hat{A}=45^\circ$.

Do đó, nếu tam giác ABC có $\widehat{BAC}=45^\circ$ thì khi đó $BK\perp CK$.

Bài 5.

a) Từ giả thiết, ta có:



$\widehat{IBA}=\widehat{IBC}=\frac{1}{2}\hat{B}$ (do BI là tia phân giác $\hat{B}$)

$\widehat{ICA}=\widehat{ICB}=\frac{1}{2}\hat{C}$ (do CI là tia phân giác $\hat{C}$)

Xét ΔIBC có $\widehat{BIC}+\widehat{IBC}+\widehat{ICB}=180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{BIC}=180^\circ-\left(\widehat{IBC}+\widehat{ICB}\right)$.

$\Rightarrow \widehat{BIC}=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{C}\right)=180^\circ-\frac{1}{2}\left(\hat{B}+\hat{C}\right)$ (1).

Xét ΔABC có $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.

$\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=180^\circ-\hat{A}$ (2).

Thế (2) vào (1) ta có $\widehat{BIC}=180^\circ-\frac{1}{2}\left(180^\circ-\hat{A}\right)=180^\circ-90^\circ+\frac{1}{2}\hat{A}$

$=90^\circ+\frac{1}{2}\hat{A}$ (đpcm).

b) Từ chứng minh câu a, ta có $\widehat{BIC}=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{BAC}=90^\circ+\frac{1}{2}.60^\circ=120^\circ$.

Mà ta có $\widehat{BIE}+\widehat{BIC}=180^\circ$ (2 góc kề bù)$\Rightarrow \widehat{BIE}=180^\circ-\widehat{BIC}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

c) Do $\widehat{BAC}$ có số đo là trung bình cộng số đo của hai góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ nên

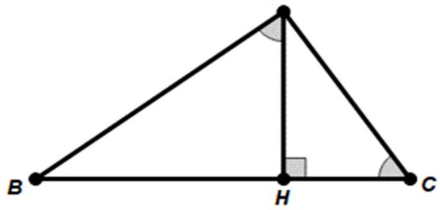
$\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)$ hay $\hat{B}+\hat{C}=2.\hat{A}$.

Mà $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 3.\hat{A}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$.

Do đó, ta có $\widehat{BIC}=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{BAC}=90^\circ+\frac{1}{2}.60^\circ=120^\circ$.

Bài 6.

a) Xét ΔAHC vuông tại H có:



$\widehat{HAC}+\widehat{HCA}=90^\circ$ (1)

Theo giả thiết, ta có: $\widehat{HAB}=\widehat{ACB}$ hay $\widehat{HAB}=\widehat{HCA}$ nên theo

ta có: $\widehat{HAC}+\widehat{HAB}=90^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAC}=90^\circ \Rightarrow AB\perp AC$.

Vậy, tam giác ABC vuông tại A.

b) Do số đo góc $\widehat{ABC}$ bằng trung bình cộng của hai góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ nên ta có: $\widehat{ABC}=\dfrac{\hat{A}+\hat{C}}{2}=\dfrac{90^\circ+\hat{C}}{2}$.

Mà, tam giác vuông ABC có $\hat{B}+\hat{C}=90^\circ \Rightarrow \hat{B}=\dfrac{90^\circ+\hat{C}}{2}=90^\circ-\hat{C} \Rightarrow 90^\circ+\hat{C}=180^\circ-2\hat{C}$.

$\Rightarrow 3\hat{C}=90^\circ \Rightarrow \hat{C}=30^\circ$.Khi đó, ta có: $\hat{B}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

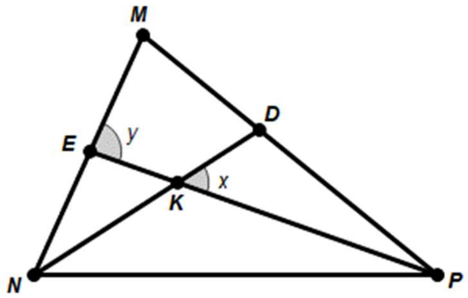
Bài 7.

a) Sử dụng kết quả của ví dụ 1, dạng 2, ta chứng minh được

$\widehat{PKN}=90^\circ+\dfrac{\widehat{NMP}}{2}$.

Do $\widehat{PKN}$ và $\widehat{PKD}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{PKD}+\widehat{PKN}=180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{PKD}=180^\circ-\widehat{PKN}=180^\circ-\left(90^\circ+\dfrac{\widehat{NMP}}{2}\right)$.



$\Rightarrow \widehat{PKD}=90^\circ-\dfrac{\widehat{NMP}}{2}$ (đpcm).

b) Ta có $\widehat{MEP}=y$ là góc ngoài đỉnh E của NEP nên

$\widehat{MEP}=\widehat{ENP}+\widehat{EPN} \Leftrightarrow y=\hat{N}+\dfrac{1}{2}\hat{P}=\dfrac{2\hat{N}+\hat{P}}{2}$ (1).

1. Với $x=50^\circ$, ta có $50^\circ=90^\circ-\dfrac{\hat{M}}{2} \Rightarrow \hat{M}=80^\circ \Rightarrow \Delta MNP$ có $\hat{N}+\hat{P}=180^\circ-\hat{M}=100^\circ$.

Với $y=80^\circ$, từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 80^\circ=\dfrac{\hat{N}+100^\circ}{2} \Rightarrow \hat{N}=60^\circ$, ta có $\hat{P}=100^\circ-\hat{N}=40^\circ$.

2. Với $x=70^\circ$, ta có $70^\circ=90^\circ-\dfrac{\hat{M}}{2} \Rightarrow \hat{M}=40^\circ \Rightarrow \hat{N}+\hat{P}=180^\circ-\hat{M}=140^\circ$.

Vì $y=90^\circ$, từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 90^\circ=\dfrac{\hat{N}+140^\circ}{2} \Rightarrow \hat{N}=40^\circ \Rightarrow \hat{P}=140^\circ-\hat{N}=100^\circ$.

c) Để ΔMNP vuông tại M thì $\widehat{NMP}=90^\circ$.

Khi đó, ta có: $\widehat{PKD} = 90° - \frac{\widehat{NMP}}{2} = 90° - \frac{90°}{2} = 45° \Rightarrow x = 45°$.

Do đó, khi $x = 45°$ thì tam giác MNP vuông tại M.

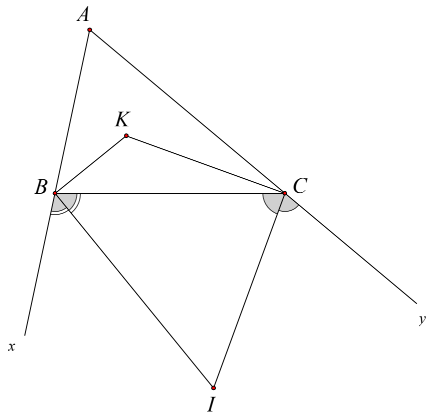
Bài 8.

a) Giả sử phân giác trong của góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ cắt nhau tại K

Suy ra $BK \perp BI, CK \perp CI$ (tính chất phân giác trong – phân giác ngoài của một góc)

Nên $\widehat{IBC} = 90^0 - \widehat{CBK} = 90^0 - \frac{1}{2}.\widehat{ABC}$ và

$\widehat{IBC} = 90^0 - \widehat{KCB} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{ACB}$



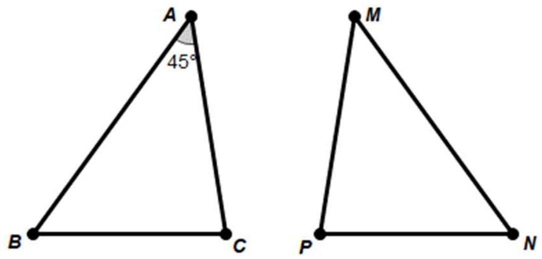
b) Xét ΔBIC có:

$$\widehat{BIC} = 180^0 - \left(\widehat{CBI} + \widehat{BCI}\right) = 180^0 - \left(90^0 - \frac{1}{2}\widehat{ABC} + 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{ACB}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right)$$

c) Ta có: $\hat{A} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^0 - 60^0 = 120^0 \Rightarrow \widehat{BIC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = 60^0$

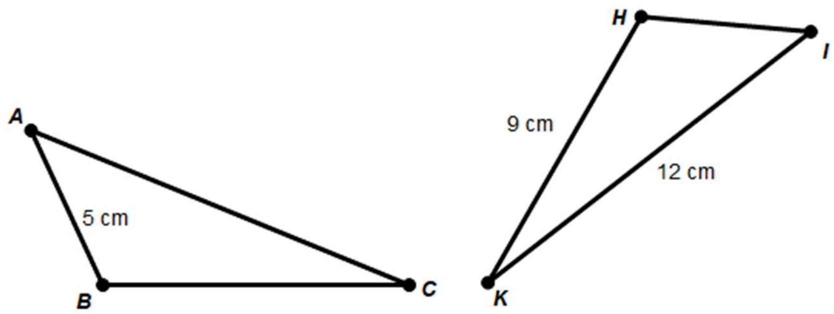
BÀI 13. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU.
TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC

VD 1.1.

<table>
<tr>
<td>
a) Do $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên ta có được:
+ $AB = MN$; $BC = NP$; $CA = PM$.
+ $\widehat{M} = \widehat{A} = 45^\circ$; $\widehat{N} = \widehat{B}$; $\widehat{P} = \widehat{C}$.
b) Xét ΔABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$
thì $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 135^\circ$.
Từ giả thiết, ta có: $\dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{\widehat{C}}{3}$.
Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:
$\dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{\widehat{C}}{3} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2+3} = \dfrac{135^\circ}{5} = 27^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{B} = 2.27^\circ = 54^\circ$; $\widehat{C} = 3.27^\circ = 81^\circ$.
Do đó $\widehat{N} = \widehat{B} = 54^\circ$; $\widehat{P} = \widehat{C} = 81^\circ$.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

VD 1.2.



Do $\Delta ABC = \Delta IHK$ nên ta có: $BC = HK = 9\,\text{cm}$, $CA = IK = 12\,\text{cm}$.

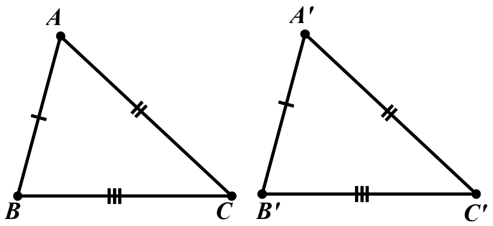
Vậy, chu vi của tam giác ABC bằng $C_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 5 + 9 + 12 = 26\,\text{cm}$.

Nhận xét:

+ Do hai tam giác bằng nhau nên sẽ có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau. Ta chỉ ra được chu vi của các tam giác cũng bằng nhau.

+ Bằng việc tận dụng các đặc điểm bằng nhau tương ứng của hai tam giác, ta có thể chỉ ra được nhiều thông số (chu vi, diện tích, đường phân giác, trung tuyến, đường cao, …) bằng nhau giữa hai tam giác này.

VD 2.1.

Xét hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$, ta có: $AB = A'B'$, $AC = A'C', BC = B'C'$. $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$.	

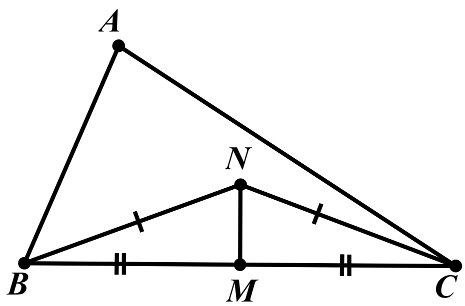
VD 2.2.

Xét hai tam giác ΔNMB và ΔNMC, ta có:

NM là cạnh chung,

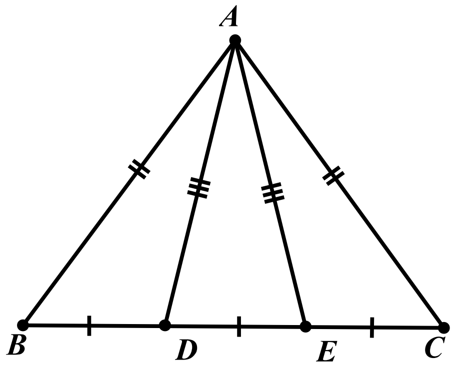
$NB = NC\left(gt\right), MB = MC\left(gt\right)$.

$\Rightarrow \Delta NMB = \Delta NMC\left(c-c-c\right)$.



VD 3.1.

Xét hai tam giác ΔABE và ΔACD, ta có: $AB = AC, AE = AD, BE = CD$ (Vì cùng bằng

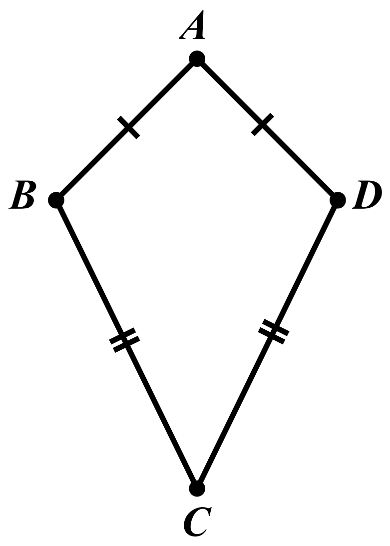


$\frac{2}{3}BC$).

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACD\left(c-c-c\right)$.

$\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{DAC}$ (hai góc tương ứng).

VD 3.2



Xét hai tam giác ΔABC và ΔADC, ta có: $AB = AD(gt)$, $BC = DC(gt)$, AC là cạnh chung.

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ADC(c-c-c)$. $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (hai góc tương ứng).

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

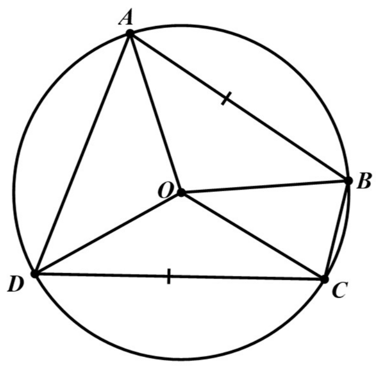
a) Xét hai tam giác ΔAOB và ΔCOD, ta có:

$AB = CD(gt)$, $OA = OC = R$, $OB = OD = R$.

$\Rightarrow \Delta AOB = \Delta COD(c-c-c)$.

b) Theo câu a) ta có $\Delta AOB = \Delta COD$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (2 góc tương ứng).



Bài 2.

a) Xét hai tam giác ΔAMB và ΔANC, ta có:

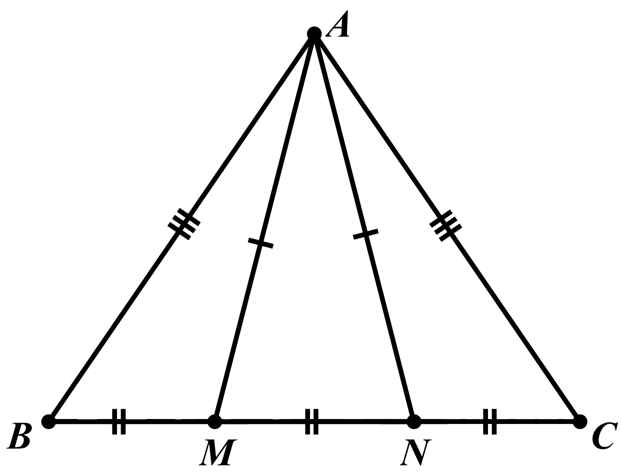
$AM = AN(gt), MB = NC(gt)$, $AB = AC(gt)$.

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta ANC(c-c-c)$.

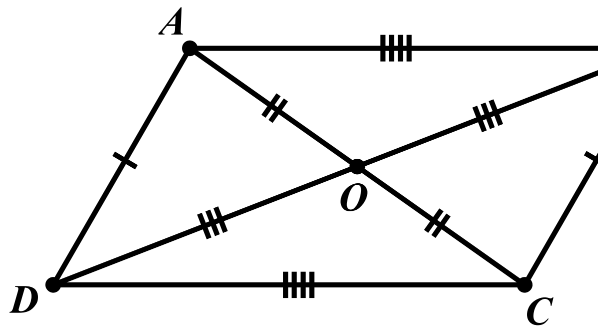
b) Theo câu a) ta có $\Delta AMB = \Delta ANC$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (2 góc tương ứng).

$\Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{ACM}$.



Bài 3.



a) Xét hai tam giác ΔAOD và ΔCOB, ta có:

$AD = BC(gt), AO = OC(gt), OD = OB(gt)$.

$\Rightarrow \Delta AOD = \Delta COB(c-c-c)$.

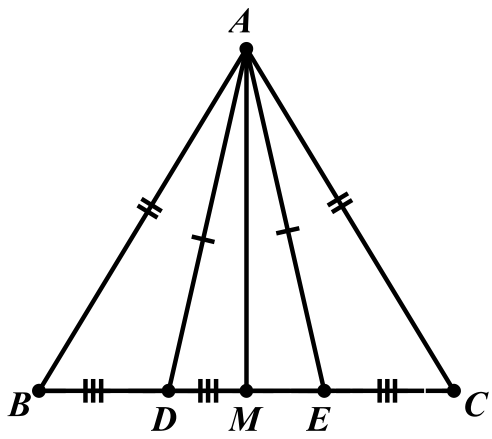
b) Theo câu a) ta có $\Delta AOD = \Delta COB$

$\Rightarrow \widehat{ADO} = \widehat{CBO}$ (hai góc tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow AD//BC$.

Bài 4



a) Xét hai tam giác ΔABE và ΔACD, ta có:

$AD = AE(gt), AB = AC(gt),\ BD = EC(gt)$.

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACD(c-c-c)$.

$\widehat{EBA} = \widehat{DCA}$ (hai góc tương ứng).

b) Xét hai tam giác ΔABM và ΔACM, ta có:

$AB = AC(gt), BM = CM(gt)$, AM là cạnh chung.

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACM(c-c-c)$.

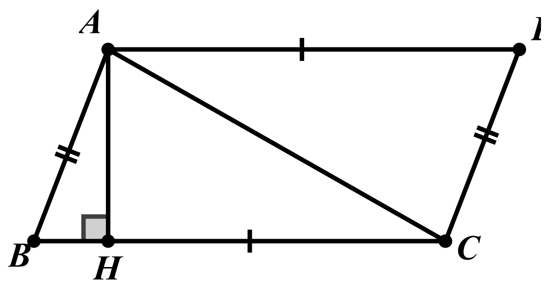
$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (hai góc tương ứng).

Theo câu a) ta có $\Delta ABE = \Delta ACD \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ (hai góc tương ứng).

$\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{EAM}$.

$\Rightarrow AM$ là tia phân giác của $\widehat{DAE}$.

Bài 5.



a) Xét hai tam giác ΔABC và ΔCDA, ta có:

$AB = CD(gt), BC = AD(gt)$, AC là cạnh chung.

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDA(c-c-c)$.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ (hai góc tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong, nên suy ra $AB//CD$.

b) Theo chứng minh trên ta có $\Delta ABC = \Delta CDA$, nên ta suy ra: $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ (hai góc tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong, nên suy ra $AD//BC$.

Mặt khác ta lại có $AH \perp BC\left(gt\right)$.

$\Rightarrow AH \perp AD$.

Bài 6.

Xét hai tam giác ΔADE và ΔABC, ta có:

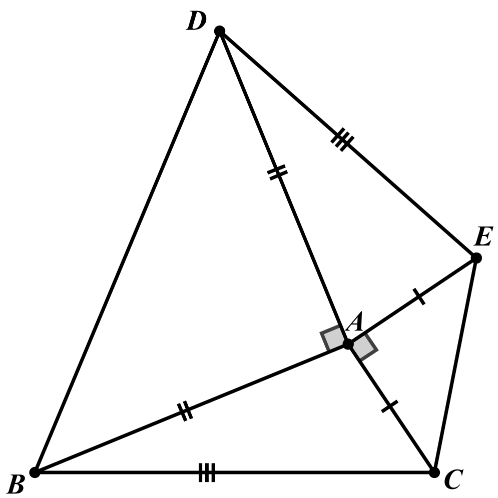
$AD = AB\left(gt\right), AE = AC\left(gt\right),\ DE = BC\left(gt\right)$.

$\Rightarrow \Delta ADE = \Delta ABC\left(c-c-c\right)$.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DAE}$ (hai góc tương ứng).

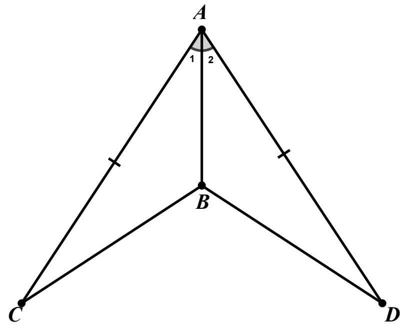
Mặt khác ta lại có $\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^0$ (vì $\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^0\left(gt\right)$.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$.



BÀI 14. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI VÀ THỨ BA CỦA TAM GIÁC

VD 1.1.

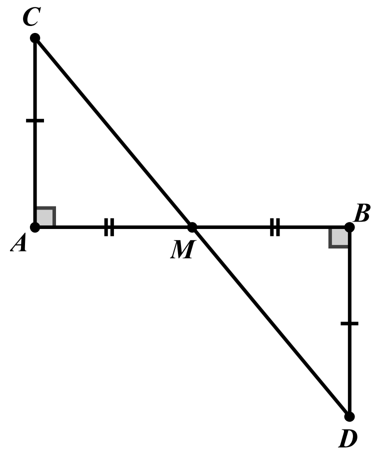


Xét ΔABC và ΔABD, ta có:

$AC = AD(gt)$, $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}(gt)$, AB là cạnh chung.

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ABD(c-g-c)$.

VD 1.2.



Xét ΔAMC và ΔBMD, ta có:

$AC = BD(gt)$, $\widehat{CAM} = \widehat{DBM} = 90^\circ (gt)$,

$AM = BM$ (M là trung điểm của AB).

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta BMD(c-g-c)$.

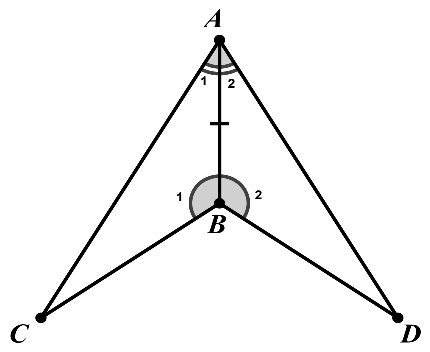
$\Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng).

Ta lại có: $\widehat{AMC} + \widehat{CMB} = 180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{CMB} + \widehat{BMD} = 180^\circ$.

$\Rightarrow C, M, D$ thẳng hàng.

VD 2.1.

<table>
<tr>
<td>Xét ΔABC và ΔABD, ta có:
$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}(gt)$,
AB là cạnh chung, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}(gt)$.
$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ABD(g-c-g)$.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

VD 2.2.

Ta có: $\widehat{B_1}+\widehat{B_2}=180.$

$\widehat{C_1}+\widehat{C_2}=180^0.$

Mà $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}\Rightarrow \widehat{B_2}=\widehat{C_2}.$

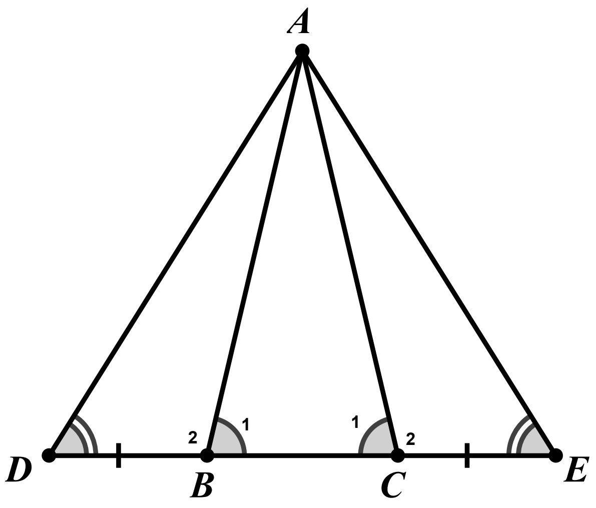
Xét ΔABD và ΔACE, ta có:

$\hat{D}=\hat{E}\left(gt\right)$,

$BD=CE\left(gt\right)$,

$\widehat{B_2}=\widehat{C_2}\left(cmt\right).$

$\Rightarrow \Delta ABD=\Delta ACE\left(g-c-g\right).$



VD 3.1.

a) Xét ΔAIE và ΔCIB, ta có:

$AI=CI\left(gt\right)$, $\widehat{AIE}=\widehat{CIB}$ (hai góc đối đỉnh), $IE=IB\left(gt\right).$

$\Rightarrow \Delta AIE=\Delta CIB\left(c-g-c\right).$

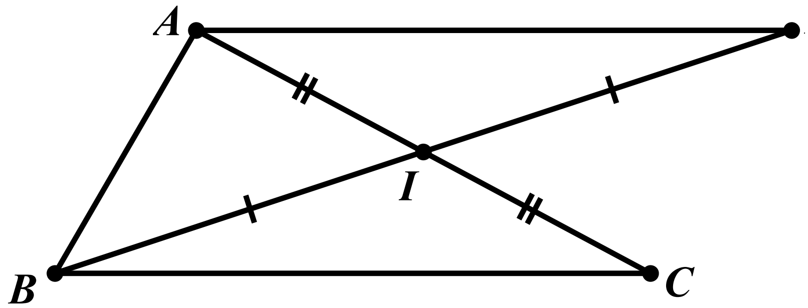
$\Rightarrow AE=BC$ (hai cạnh tương ứng).

b) Theo câu a) ta có $\Delta AIE=\Delta CIB.$

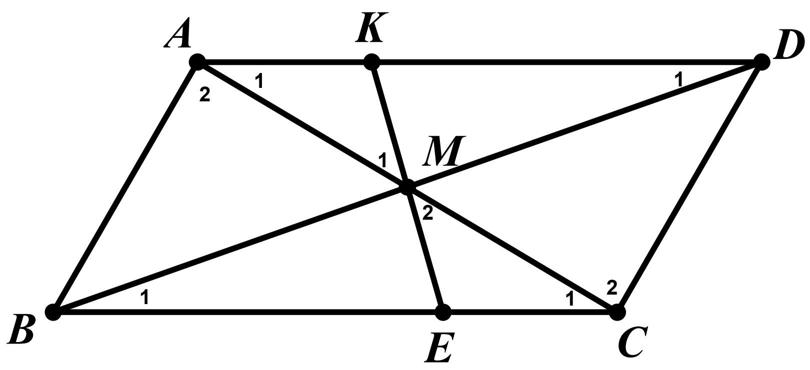
$\Rightarrow \widehat{EAI}=\widehat{BCI}$ (hai góc tương ứng)

Hay $\widehat{BCA}=\widehat{CAE}.$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong, nên suy ra $AE//BC.$



VD 3.2.



a) Xét ΔACD và ΔCAB, ta có:

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc so le trong, $AD // BC$).

AC là cạnh chung.

$\widehat{A_2} = \widehat{C_2}$ (hai góc so le trong, $AB // CD$).

$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta CAB (g-c-g)$.

$\Rightarrow AD = BC$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔMAD và ΔMCB, ta có:

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (chứng minh trên).

$AD = BC$ (chứng minh trên).

$\widehat{D_1} = \widehat{B_1}$ (hai góc so le trong, $AD // BC$).

$\Rightarrow \Delta MAD = \Delta MCB (g-c-g)$.

$\Rightarrow MA = MC$ (hai cạnh tương ứng).

b) Xét ΔMAK và ΔMCE, ta có:

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (hai góc đối đỉnh).

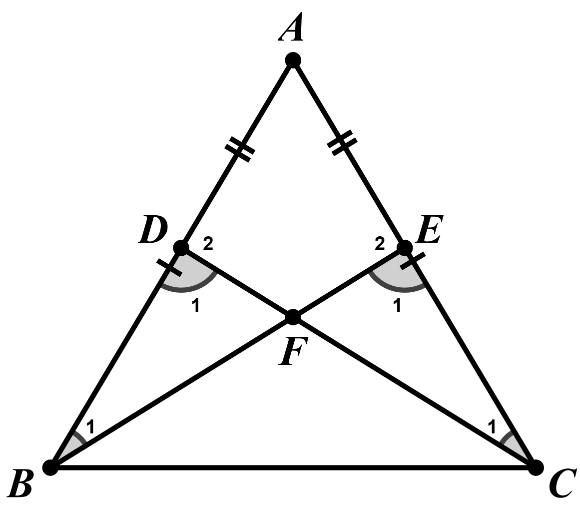
$MA = MC$ (chứng minh trên).

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta MAK = \Delta MCE (g-c-g)$.

$\Rightarrow MK = ME$ (hai cạnh tương ứng).

VD 4.1.



a) Xét ΔADC và ΔAEB, ta có:

$AD = AE (gt)$,

$\widehat{A}$ là góc chung,

$AB = AC (gt)$.

$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta AEB \ (c-g-c)$.

$\Rightarrow DC = EB$ (hai cạnh tương ứng).

b) Theo câu a) ta có $\Delta ADC = \Delta AEB$.

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc tương ứng).

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc tương ứng).

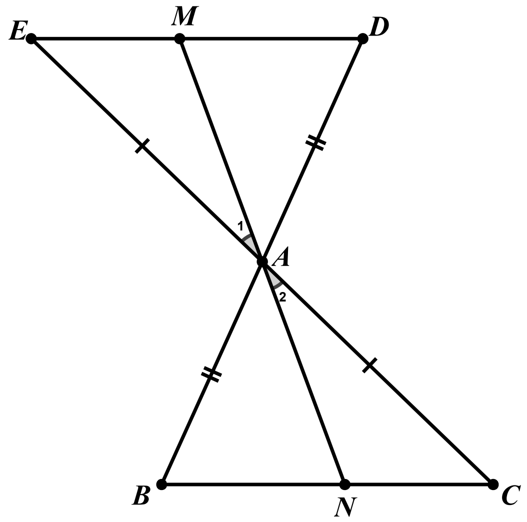
Xét ΔDFB và ΔEFC, ta có: $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (Chứng minh trên),

Dễ thấy $BD = CE$, $\widehat{D_1} = \widehat{E_1}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta DFB = \Delta EFC\left(g-c-g\right)$.

$\Rightarrow DF = FE$ (hai góc tương ứng).

VD 4.2.



Xét ΔAED và ΔACB, ta có:

$AE = AC\left(gt\right)$, $\widehat{EAD} = \widehat{CAB}$ (hai góc đối đỉnh), $AD = AB\left(gt\right)$.

$\Rightarrow \Delta AED = \Delta ACB\left(c-g-c\right)$.

$\Rightarrow \hat{E} = \hat{C}$ (hai góc tương ứng).

Xét ΔAME và ΔANC, ta có:

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (hai góc đối đỉnh).

$AE = AC\left(gt\right)$.

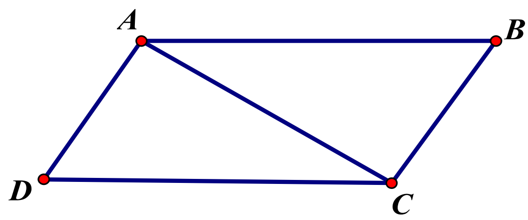
$\hat{E} = \hat{C}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta AME = \Delta ANC\left(g-c-g\right)$.

$\Rightarrow AM = AN$ (hai cạnh tương ứng).

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Xét ΔABC và ΔCDA có



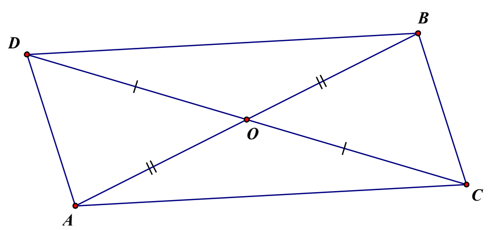
$\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ (cặp góc so le trong $AB//CD$)

AC là cạnh chung

$\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ (cặp góc so le trong $AD//$BC)

Khi đó: ΔABC=ΔCDA (c.g.c)

Bài 2.



a) Xét hai ΔOAD và ΔOBC có

OA=OB(gt)

$\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$(dd)

$OD = OC(gt)$

Khi đó: $\Delta OAD = \Delta OBC$ (c.g.c)

b) Xét hai ΔOBD và ΔOAC có:

OB=OA(gt)

$\widehat{BOD} = \widehat{AOC}$(dd)

$OD = OC(gt)$

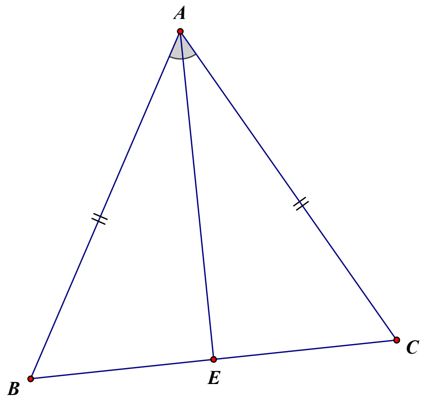
Khi đó: $\Delta OBD = \Delta OAC$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{BDO} = \widehat{ACO}$ (cặp góc tương ứng)

Mà $\widehat{BDO}$ và $\widehat{ACO}$ ở vị trí so le trong

=> $AC//BD$

Bài 3.



a) Xét ΔABE và ΔACE có

AB=AC(gt)

$\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (AE là tia phân giác của $\widehat{BAC}$)

AE là cạnh chung

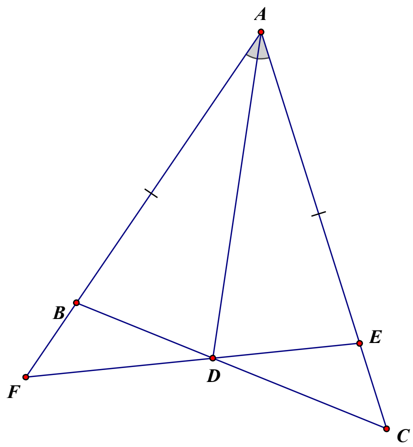
Khi đó: $\Delta ABE = \Delta ACE$ (c.g.c)

b) Vì $\Delta ABE = \Delta ACE$ nên $BE = CE$ (1)

và $\widehat{AEB} = \widehat{AEC}$ mà $\widehat{AEB} + \widehat{AEC} = 180^0$ suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{AEC} = 90^0$ hay $AE \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AE là đường trung trực của BC

Bài 4.



a) Xét ΔABD và ΔAED có

AB=AE(gt)

$\widehat{BAD} = \widehat{EAD}$ (AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$)

AD là cạnh chung

Khi đó: $\Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c)

Suy ra: $BD = ED$ (cặp cạnh tương ứng)

Và $\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (cặp góc tương ứng)

Mặt khác: $\widehat{ABD} + \widehat{DBF} = 180^0$ (cặp góc kề bù)

Và $\widehat{AED} + \widehat{DEC} = 180^0$(cặp góc kề bù)

Lúc đó ta có: $\widehat{DEC} = \widehat{DBF}$

$$\left.\begin{array}{l} AF = AB + BF \\ AC = AE + CE \\ AB = AE \\ AF = AC \end{array}\right\} => BF = CE$$

+ Xét ΔBDF và ΔEDC có

$BD = ED$

$\widehat{DEC} = \widehat{DBF}$

$BF = CE$

Suy ra: $\Delta BDF = \Delta EDC$ (c.g.c)

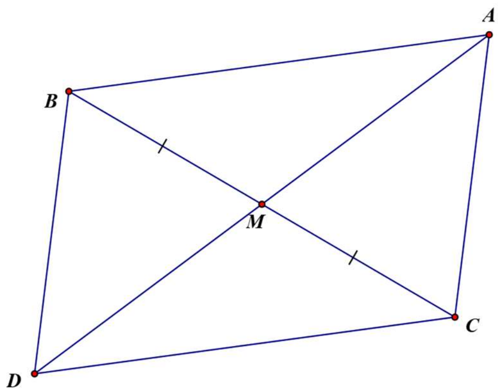
b) $\widehat{BDA} + \widehat{ADE} + \widehat{EDC} = 180^0$

mà $\widehat{EDC} = \widehat{FDB}\,(\Delta BDF = \Delta EDC)$

=> $\widehat{BDA} + \widehat{ADE} + \widehat{FDB} = 180^0$

Vậy F, D, E thẳng hàng.

Bài 5.



a) Ta có: $AD = 2AM => AM = DM$

Xét ΔABM và ΔDCM có:

$AM = DM$

$\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (hai góc đối đỉnh)

$BM = CM$ (AM là trung tuyến)

Khi đó $\Delta ABM = \Delta DCM$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{CDM}$ (cặp góc tương ứng)

Mà $\widehat{BAM}$ và $\widehat{CDM}$ ở vị trí so le trong

Vậy AB//CD

b) Chứng minh tương tự câu a

Bài 6.

a) Xét ΔABD và ΔACE có:

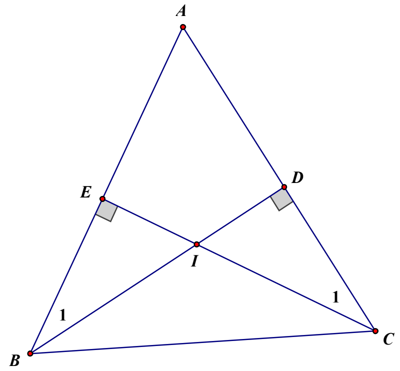
$AB = AC$ (gt)

$\widehat{A}$ là góc chung

$\widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$

Khi đo: $\Delta ABD = \Delta ACE$ (cạnh huyền - góc nhọn)

=> $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (cặp góc tương ứng) và $AE = AD$ (cặp cạnh tương ứng)



b) Ta có: $AB = AE + BE, AC = AD + DC$

Mà $AE = AD, AB = AC$

Từ đó $BE = DC$

Xét ΔBEI và ΔCDI có:

$\widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (cmt)

$BE = DC$ (cmt)

Suy ra $\Delta BEI = \Delta CDI$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Bài 7.

a) Xét ΔABC và ΔCDA có:

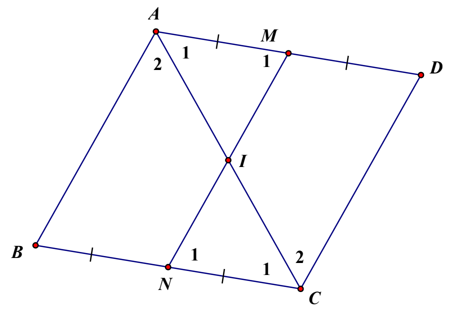
$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (cặp góc so le trong, $AD//BC$)

AC là cạnh chung

$\widehat{A_2} = \widehat{C_2}$ (cặp góc so le trong, $AB//CD$)

Do đó: $\Delta ABC = \Delta CDA$ (g.c.g)

Suy ra $AB = CD, BC = AD$ (cặp cạnh tương ứng)



b) Gọi $I = AC \cap MN$

Xét ΔAIM và ΔCIN có:

$\widehat{M_1} = \widehat{N_1}$ (cặp góc so le trong, $AD//BC$)

$AM = BN$ ($AM = \frac{AD}{2}, BN = \frac{BC}{2}, BC = AD$)

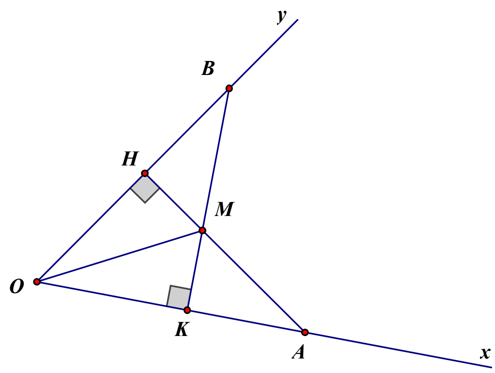
$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (cặp góc so le trong, $AD//BC$)

Khi đó $\Delta AIM = \Delta CIN$ (g.c.g)

Suy ra: $IA = IC, IM = IN$ (cặp cạnh tương ứng)

Vậy MN và AC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Bài 8.



a) Xét ΔOAH và ΔOBK có:

$\widehat{O}$ là góc chung

$OA = OB$ (gt)

$\widehat{H} = \widehat{K} = 90^0$

Do đó: $\Delta OAH = \Delta OBK$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra $OH = OK$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Xét ΔOHM và ΔOKM có:

$OH = OK$ (cmt)

OM là cạnh chung

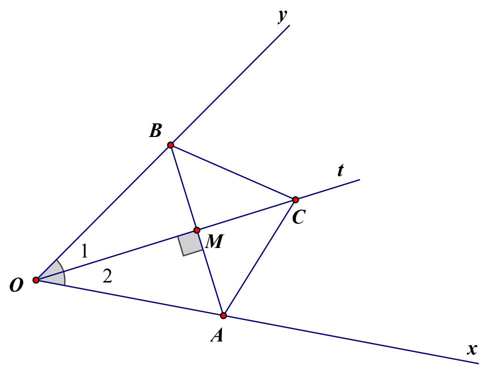
$\widehat{H} = \widehat{K} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta OHM = \Delta OKM$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{HOM} = \widehat{KOM}$ (cặp góc tưng ứng)

$\Rightarrow OM$ là tia phân giác của $\widehat{HOK}$ hay $\widehat{xOy}$

Bài 9.



a) Xét ΔOAM và ΔOBM có:

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (Ot là tia phân giác)

OM là cạnh chung

$\widehat{OMA} = \widehat{OMB} = 90^0$

Do đó: $\Delta OAM = \Delta OBM$ (g.c.g)

$\Rightarrow OA = OB$ (hai cạnh tương ứng)

b) Xét ΔOAC và ΔOBC có:

$OA = OB$ (cmt)

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (Ot là tia phân giác)

OC là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBC$ (c.g.c)

$\Rightarrow CA = CB$ (hai cạnh tương ứng)l $\widehat{OAC} = \widehat{OBC}$ (hai góc tương ứng)

Bài 10.

Xét ΔBEM và ΔCFM có:

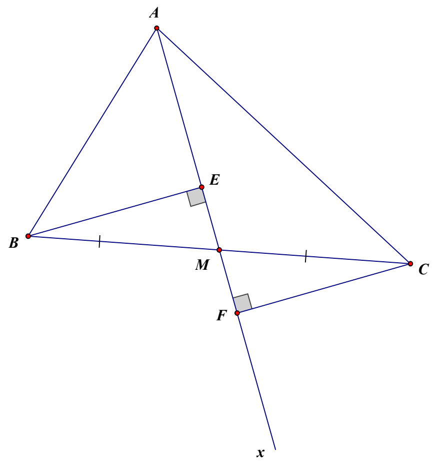
$\hat{E} = \hat{F} = 90^0$

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC)

$\widehat{BME} = \widehat{CMF}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BEM = \Delta CFM$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow BE = CF$ (hai cạnh tương ứng)



Bài 11.

Ta có: $\hat{B} = 2\hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\hat{B}}{2}$ hay $\widehat{ACB} = \frac{\hat{B}}{2}$

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \frac{\hat{B}}{2}$ (BD là tia phân giác)

Khi đó: $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$

Xét ΔAEB và ΔKAC có:

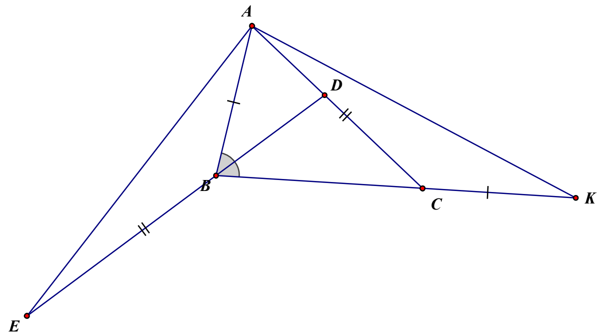
$AB = CK$ (gt)

$\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$

$BE = AC$ (gt)

Suy ra: $\Delta AEB = \Delta KAC$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ $AK = AE$ (cặp cạnh tương ứng)



Bài 12.

a) Xét ΔABE và ΔADC có:

$AB = AD$ (gt)

$\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$

$\left(\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^0, \widehat{BAD} + \widehat{DAE} = \widehat{CAE} + \widehat{DAE}\right)$

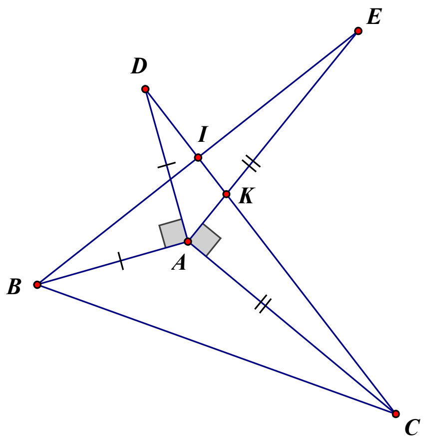
$AE = AC$ (gt)

Khi đó $\Delta ABE = \Delta ADC$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ $CD = BE$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Gọi $I = BE \cap CD; K = AE \cap CD$

Ta có: $\widehat{ACK} + \widehat{AKC} = 90^0$



Mà $\widehat{AKC} = \widehat{IKE}$ cặp góc đối đỉnh) và

$\widehat{IEK} = \widehat{ACK}\left(\Delta ABE = \Delta ACD\right)$

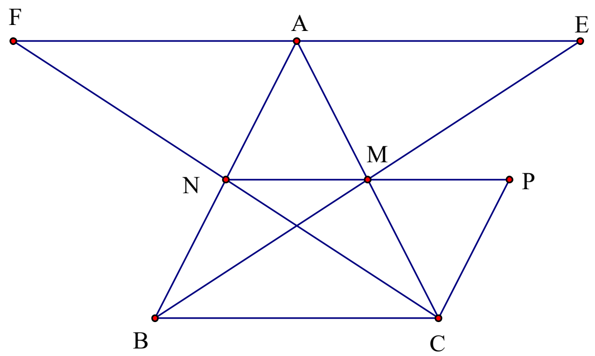
Lúc đó: $\widehat{IEK} + \widehat{IKE} = 90^0$

Tam giác ΔIKE có $\widehat{IEK} + \widehat{IKE} = 90^0$ suy ra

$\widehat{KIE} = 90^0$

Vậy $BE \perp CD$

Bài 13.



a) Vì M là trung điểm của AC (gt) $\Rightarrow$ $AM = MC = \dfrac{1}{2}AC$

Vì N là trung điểm của AB (gt) $\Rightarrow$ $AN = BN = \dfrac{1}{2}AB$

$\Rightarrow$ $AM = AN = BN = CM$

Mà $AB = AC$ (gt)

Xét ΔABM và ΔACN, có:

$AM = AN$ (cmt)

$\widehat{BAC}$ chung

$AB = AC$ (gt)

$\Rightarrow$ $\Delta ABM = \Delta ACN$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $BM = CN$ (2 cạnh tương ứng bằng nhau)

Xét $\Delta BMC = \Delta CNB$, có:

$BM = CN$ (cmt)

$BN = CM$ (cmt)

BC chung

Suy ra $\Delta BMC = \Delta CNB$ (c-c-c)

b) Vì N là trung điểm của CF (gt) $\Rightarrow$ $FN = CN$

Vì M là trung điểmcủa BE (gt) $\Rightarrow$ $BM = ME$

Xét ΔFAN và ΔCBN có:

$NF = NC$ (cmt)

$\widehat{FNA} = \widehat{CNB}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow$ $\Delta FAN = \Delta CBN$ (c.g.c) $\Rightarrow \begin{cases} FA = CB \\ \widehat{FAN} = \widehat{CBN} \end{cases}$

$NB = NA$ (cmt)

Mà $\widehat{FAN}$ & $\widehat{CBN}$ nằm ở vị trí so le trong $\Rightarrow$ $FA//BC$ mà $FA = BC$ (1)

Chứng minh tương tự có $\Delta EAM = \Delta BCM$ $\Rightarrow \begin{cases} EA = CB \\ \widehat{EAM} = \widehat{CBM} \end{cases}$. Mà $\widehat{EAM}$ và $\widehat{BCM}$ nằm ở vị trí so le $\Rightarrow$ $AE = BC$ và $AE//BC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra A là trung điểm của EF

c) Theo b) có $EF//BC$ (3)

Lấy điểm P sao cho M là trung điểm của NP.

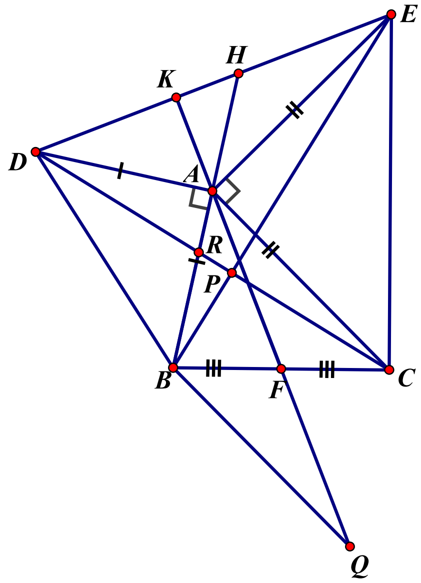
Ta chứng minh $\Delta AMN = \Delta CMP$ (c.g.c)

Suy ra: $\widehat{ANM} = \widehat{CPM}$ => $AB//CP$ => $\widehat{BNC} = \widehat{PCN}(slt)$.

Chứng minh $\Delta BNC = \Delta PCN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NBC} = \widehat{CPN} \Rightarrow \widehat{NBC} = \widehat{ANM}$. Mà $\widehat{NBC}$ & $\widehat{ANM}$ nằm ở vị trí đồng vị. Suy ra $MN//BC$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $MN//BC//EF$

Bài 14.

a) * Ta có: $\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE} + \widehat{DAE} = 360°$



$90° + \widehat{BAC} + 90° + \widehat{DAE} = 360°$

$\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180°$

Mà $0° < \widehat{BAC} < 90°$

$\Rightarrow 90° < \widehat{DAE} < 180°$

Vậy 3 điểm D, A, E không thẳng hàng

* Gọi H là giao điểm của BA và DE.

Ta có:

$\widehat{DAB} + \widehat{DAH} = 180°$

$90° + \widehat{DAH} = 180°$

$\widehat{DAH} = 90°$

Mà $90° < \widehat{DAE}$

$\widehat{DAH} < \widehat{DAE}$

$\Rightarrow$ Tia AH nằm giữa hai tia AD và AE nên điểm H nằm giữa D và E.

Xét ΔDAH có: $\widehat{DAH} = 90° \Rightarrow \widehat{DHA} < 90°$ (Định lí tổng ba góc của một tam giác)

Nên AH không vuông góc với DE hay BA không vuông góc với DE.

b)

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{DAB}+\widehat{BAC}=\widehat{DAC}\\ \widehat{EAC}+\widehat{BAC}=\widehat{EAB}\\ \widehat{DAB}=\widehat{EAC}=90^\circ\left(AD\perp AB, AE\perp AC\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{DAC}=\widehat{EAB}$$

(*)

Xét ΔADC và ΔABE có:

$$\left.\begin{array}{l}AD=AB(GT)\\ \widehat{DAC}=\widehat{EAB}\\ AE=AC\left(GT\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ADC=\Delta ABE\left(C.G.C\right)$$

$\Rightarrow BE=DC$ (Hai cạnh tương ứng)

* Gỉa sử DC cắt BE tại P. DC cắt AB tại R. Ta có $\Delta ADC=\Delta ABE$ (CMT)

$\Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{ADC}$ (Hai góc tương ứng) hay $\widehat{RBP}=\widehat{ADR}$

Mà $\widehat{ADR}+\widehat{ARD}=90^\circ$ (Hai góc phụ nhau)

$\widehat{ARD}=\widehat{BRP}$ (Hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{BRP}+\widehat{RPB}=90^\circ$

Xét ΔBPR có: $\widehat{BRP}+\widehat{RPB}=90^\circ$ (CMT) $\Rightarrow \widehat{BPR}=90^\circ$

Hay $DC\perp BE$ tại P

c) * Trên tia đối của tia FA lấy điểm Q sao cho $FA=FQ$

$\Rightarrow \Delta BFQ=\Delta CFA(C.G.C)$

$\Rightarrow BQ=AC$ (Hai cạnh tương ứng)

Dễ dàng chứng minh được $BQ//AC$ (hai đường thẳng song song)

$\Rightarrow \widehat{ABQ}+\widehat{BAC}=180^0$ (Hai góc đồng vị)

Mà $\widehat{BAC}+\widehat{DAE}=180^\circ$ (Câu a)

$\Rightarrow \widehat{ABQ}=\widehat{DAE}$

Xét ΔDAE và ΔABQ có:

$$\left.\begin{array}{l}AD=AB\left(GT\right)\\ \widehat{DAE}=\widehat{ABQ}\left(CMT\right)\\ AE=BQ\left(=AC\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta DAE=\Delta ABQ\left(C.G.C\right)$$

$\Rightarrow DE=AQ$ (Hai cạnh tương ứng)

Mà $AQ=2AF$ (Cách vẽ)

Vậy $DE=2AF$

* Kẻ AF kéo dài cắt DE tại K.

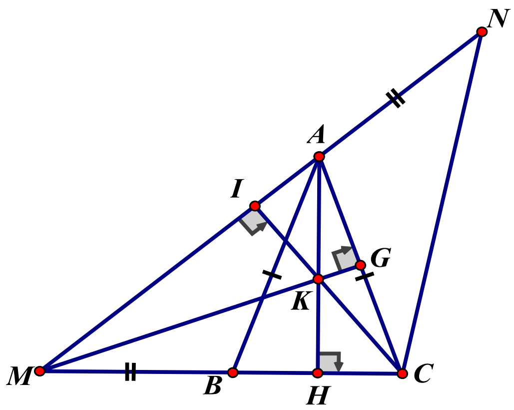
Ta có: $\Delta DAE=\Delta ABQ\Rightarrow \widehat{EDA}=\widehat{BAQ}$ (Hai góc tương ứng) $\Rightarrow \widehat{KDA}=\widehat{BAF}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{KAD}+\widehat{BAF}=90^\circ\\ \widehat{BAF}=\widehat{ADK}\left(CMT\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{KAD}+\widehat{ADK}=90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{AKD}=90^\circ$

Vậy $DE \perp AF$ tại K.

Bài 15.



a) + Xét ΔABC cân tại A ,có :

$\widehat{ABC}+\widehat{ACB}+\widehat{BAC}=180^O$

$\Leftrightarrow 2.\widehat{ABC}+40^O=180^O$

$\Leftrightarrow \widehat{ABC}=\widehat{ACB}=70^O$

+ Ta có :

$AB=AC$

$BH=HC$

$AH \quad chung$

$\Rightarrow \Delta HAB=\Delta HAC$

$\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{CAH}$ nên AH là phân giác $\widehat{BAC}$ của ΔABC

$\Rightarrow \widehat{BHA}=\widehat{CHA}$ mà $\widehat{BHA}+\widehat{CHA}=180^0 \Rightarrow \widehat{BHA}=\widehat{CHA}=\dfrac{180^0}{2}=90^0$

Vậy $AH \perp BC$

b) M thuộc đường trung trực của AC nên $MA=MC$ hay ΔMAC cân tại M

$\Rightarrow \widehat{MCA}=\widehat{MAC}=\widehat{BCA}=70^0$

$\Rightarrow \widehat{MAH}=\widehat{MAC}-\widehat{HAC}=70^0-\dfrac{\widehat{BAC}}{2}=70^0-\dfrac{40^0}{2}=50^0$

c) + Ta có : $\widehat{MAC}+\widehat{CAN}=180^O$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow 70^o+\widehat{CAN}=180^o \Rightarrow \widehat{CAN}=110^O$

+ Ta lại có : $\widehat{ABM}+\widehat{ABC}=180^O$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{ABM}+70^O=180^O \Rightarrow \widehat{ABM}=110^O$

+ Xét ΔABM và ΔCAN có :

$$\begin{cases} AN = BM \\ \widehat{ABM} = \widehat{CAN} = 110^o \Rightarrow \Delta ABM = \Delta CAN\left(c.g.c\right) \Rightarrow AM = CN \\ AB = AC\left(gt\right) \end{cases}$$

d) + Ta có : $\begin{cases} CN = AM \\ CM = AM \end{cases} \Rightarrow CN = CM \Rightarrow \Delta CMN$ cân tại C

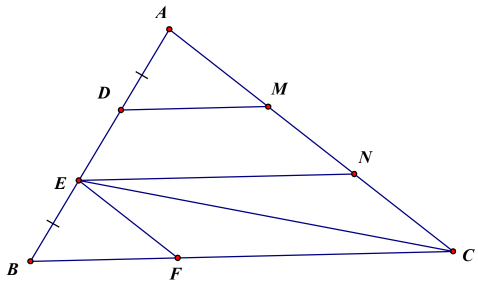
+ Ta lại có $CI \perp MN$ nên suy ra CI là đường cao cũng là đường trung tuyến của ΔCMN
Vậy I là trung điểm đoạn MN .

e) + Xét ΔAMC có :

$\begin{cases} MG \perp AC \\ AH \perp MC \end{cases}$ và K là giao điểm của $MG; AH$ nên K là trực tâm của ΔAMC .

Mà CI là đường cao của ΔAMC ,suy ra : $C; I; K$ thẳng hàng

Bài 16.



Kẻ EF$//AC$ $\left(F \in BC\right)$, nối E với C

Xét ΔCEF và ΔECN có:

$\widehat{FEC} = \widehat{NCE}$ (cặp góc so le trong, EF$//AC$)

EC là cạnh chung

$\widehat{FCE} = \widehat{NEC}$ (cặp góc so le trong, EN$//BC$)

Suy ra: $\Delta CEF = \Delta ECN$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ $EN = FC$ (hai cạnh tương ứng) (1)

Xét ΔADM và ΔEBF có:

$\hat{A} = \widehat{BEF}$ (cặp góc đồng vị, EF$//AC$)

$AD = BE$ (gt)

$\widehat{ADM} = \hat{B}$(cặp góc đồng vị, $DM//BC$)

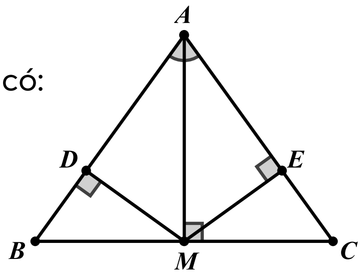
Suy ra: $\Delta ADM = \Delta EBF$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ $DM = BF$ (cặp cạnh tương ứng) (2)

Lấy (1) +(2) vế theo vế ta có: $DM + EN = BF + CF = BC$ (đcpm)

BÀI 15. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

VD 1.1



a) Xét $\Delta AMD\left(\widehat{ADM}=90^o\right)$ và $\Delta AME\left(\widehat{AEM}=90^o\right)$, có:

$\widehat{DAM}=\widehat{EAM}(gt)$,

AM là cạnh chung.

$\Rightarrow \Delta AMD=\Delta AME$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) ΔMAB và ΔMAC có

AM chung

$AB=AC$ (gt)

$\widehat{BAM}=\widehat{CAM}$ (gt)

$\Rightarrow \Delta MAB=\Delta MAC$ (c.g.c)

$\Rightarrow MA=MB$ (hai cạnh tương ứng) và $\widehat{AMB}=\widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng)

Lại có $\widehat{AMB}+\widehat{AMC}=180^0$ (hai góc kề bù) suy ra: $\widehat{AMB}=\widehat{AMC}=90^0$ hay $AM\perp BC$.

c) Có $\Delta AMD=\Delta AME$ (cmt) $\Rightarrow MD=ME$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔMDB và ΔMEC, có:

$MD=ME(gt)$,

$MB=MC$ (cmt).

$\Rightarrow \Delta MDB=\Delta MEC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

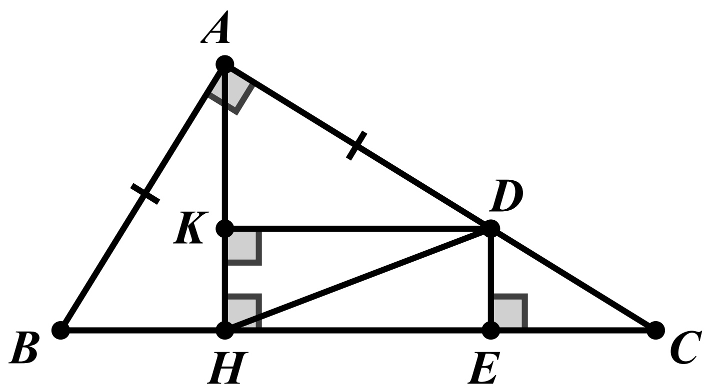
VD 2.1.

Vẽ $DK\perp AH\left(K\in AH\right)$.

Xét $\Delta HAB\left(\widehat{AHB}=90^o\right)$ và $\Delta KDA\left(\widehat{DKA}=90^o\right)$ có:

$AB=AD(gt),\widehat{BAH}=\widehat{ADK}$ (cùng phụ với $\widehat{KAD}$).

Do đó $\Delta HAB=\Delta KDA$ (cạnh huyền – góc nhọn).



$\Rightarrow HA = KD$ (hai cạnh tương ứng).

$KD \perp AH$ và

$EH \perp AH \Rightarrow KD // EH \Rightarrow \widehat{KDH} = \widehat{EHD}$.

Xét $\Delta KDH\left(\widehat{DKH} = 90^o\right)$ và

$\Delta EHD\left(\widehat{HED} = 90^o\right)$ có:

DH cạnh chung, $\widehat{KDH} = \widehat{EHD}\left(cmt\right)$

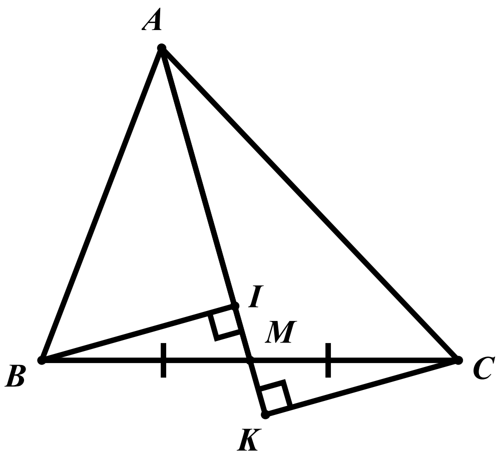
Do đó $\Delta KDH = \Delta EHD$ (cạnh huyền – góc nhọn).

$\Rightarrow KD = HE$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow HA = HE$ (do $HA = KD$).

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

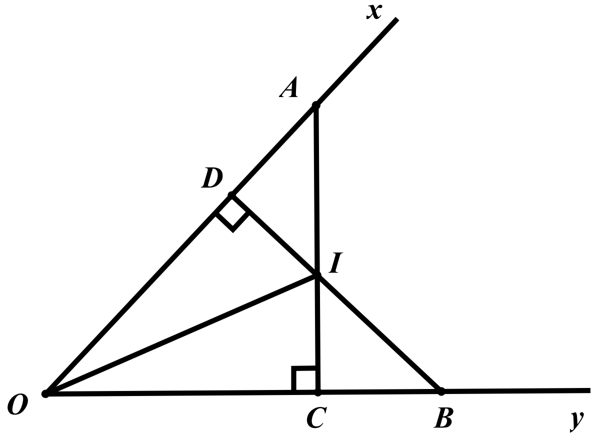
Bài 1.



Xét ΔBMI vuông tại I và ΔCMK vuông tại K có $MB = MC$ (gt) và $\widehat{IMB} = \widehat{KMC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BMI = \Delta CMK$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow BI = CK$ (hai cạnh tương ứng)

Bài 2.



a) Xét ΔOAC vuông tại C và ΔOBD vuông tại D có OA=OB (gt) và $\widehat{O}$ chung

$\Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

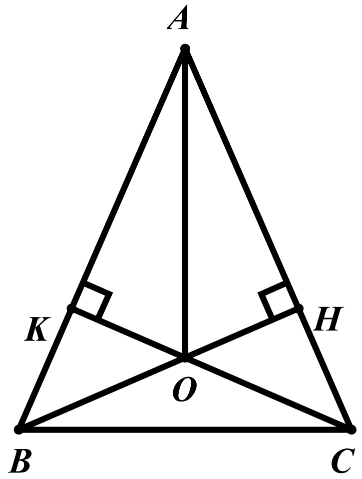
$\Rightarrow AC = BD$ (hai cạnh tương ứng).

b) Xét ΔODI vuông tại D và ΔOCI vuông tại C có OI chung và $OD = OC$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ODI = \Delta OCI$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{DOI} = \widehat{COI}$

Suy ra OI là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Bài 3.



a) Xét ΔAKC vuông tại K và ΔAHB vuông tại H có $\widehat{BAC}$ chung và $AB = AC$ (gt)

$\Rightarrow \Delta AKC = \Delta AHB$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AK = AH$ (hai cạnh tương ứng).

b) Lại có $AB = AC \Rightarrow AB - AK = AC - AH \Rightarrow BK = CH$

Có $\Delta AKC = \Delta AHB$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{ABH}$ (hai góc tương ứng) hay $\Rightarrow \widehat{HCO} = \widehat{KBO}$

Xét ΔBOK vuông tại K và ΔCOH vuông tại H có $BK = CH$ (cmt) và $\widehat{HCO} = \widehat{KBO}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BOK = \Delta COH$ (g.c.g)

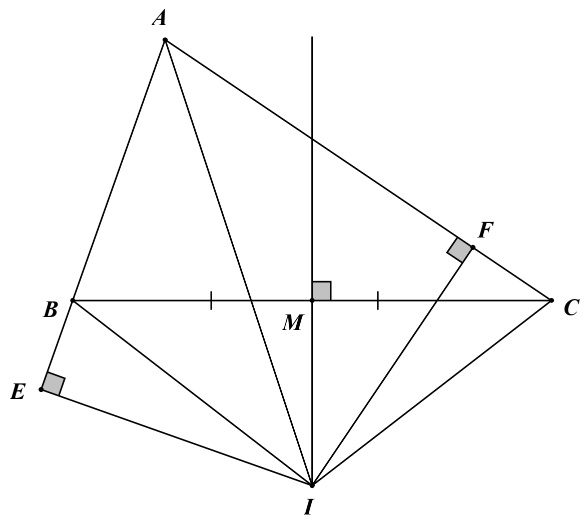
c) Có $\Delta BOK = \Delta COH$ (cmt) $\Rightarrow KO = HO$ (hai cạnh tương ứng)

Xét ΔAKO vuông tại K và ΔAHO vuông tại H có OA chung và $KO = HO$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AKO = \Delta AHO$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{OAK} = \widehat{OAH}$ (hai cạnh tương ứng)

Suy ra AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Bài 4.



a) Xét ΔAIE vuông tại E và ΔAIF vuông tại F có AI chung; $\widehat{EAI} = \widehat{FAI}$ (gt)

$\Rightarrow \Delta AIE = \Delta AIF$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow IE = IF$ (hai cạnh tương ứng)

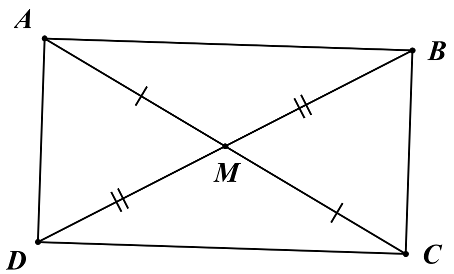
b) Xét ΔIMB và ΔIMC có MI chung; $\widehat{IMB} = \widehat{IMC} = 90^0$ (vì $MI \perp BC$); MB=MC (gt)

$\Rightarrow \Delta IMB = \Delta IMC$ (c.g.c) $\Rightarrow BI = CI$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔBEI vuông tại E và ΔCFI vuông tại F có $IE = IF$ (cmt) và $BI = CI$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BEI = \Delta CFI$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow BE = CF$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 5.



a) Xét ΔMAB và ΔMDC có: $MB = MC$ (vì M la trung điểm của BC);

$\widehat{BMA} = \widehat{CMD}$ (đđ) ; $MA = MD$ (gt)

Nên $\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c)

b) Có $\Delta MAB = \Delta MDC$ (câu a) nên $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AB // CD$

Mặt khác $AB \perp AC$ (do ΔABC vuông tại A) nên $CD \perp AC$

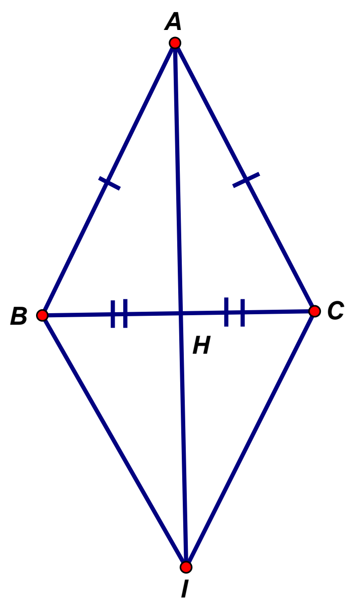
ΔABC và ΔCDA có: $AB = CD$ (do $\Delta MAB = \Delta MDC$);

$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ (= 1v) ; cạnh AC chung nên $\Delta ABC = \Delta CDA$ (c.g.c).

c) Xét ΔBDC và ΔCAB có: $AB = CD$; $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$ (câu b) ; BC là cạnh chung nên $\Delta BDC = \Delta CAB$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{CAB}$ = 90^0. Vậy ΔBDC là tam giác vuông.

Bài 6.



a) Xét ΔABH và ΔACH có:

$AB = AC$ (gt)

AH cạnh chung

$HB = HC$ (H là trung điểm BC)

Suy ra: $\Delta ABH = \Delta ACH$ (c-c-c)

b) Ta có: $\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^0$ (2 góc kề bù)

Mà $\widehat{AHB} = \widehat{AHC}$ (do $\Delta ABH = \Delta ACH$)

Nên : $\Rightarrow \widehat{AHB} = 90^0 \quad \Rightarrow AH \perp BC$

Mà H là trung điểm của BC (gt)

Nên AH là đường trung trực của BC

c) Xét ΔABH và ΔICH có:

$HA = HI$ (gt)

$\widehat{AHB} = \widehat{IHC}$ (đối đỉnh)

$HB = HC$ (H là trung điểm BC)

Suy ra: $\Delta ABH = \Delta IHC$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{CIH}$

Mà $\widehat{BAH}$ và $\widehat{CIH}$ ở vị trí so le trong

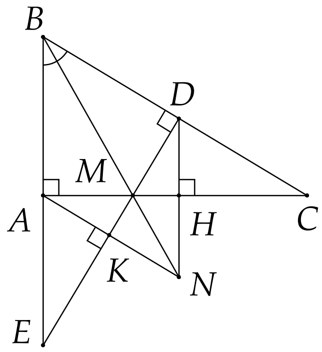
Nên $IC // AB$

d) Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ (do $\Delta ABH = \Delta ACH$)

Mà $\widehat{BAH} = \widehat{CIH}$ (cm trên)

Nên $\widehat{CAH} = \widehat{CIH}$

Bài 7.



a) Ta có $\Delta BMA = \Delta BMD$ (cạnh huyền - góc nhọn), từ đó $BA = BD$.

b) Từ kết quả câu a) chứng minh được $\Delta ABC = \Delta DBE$ (g-c-g).

c) Chú ý $MA = MD,$ từ đó $\Delta MAK = \Delta MDH$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow MK = MH.$

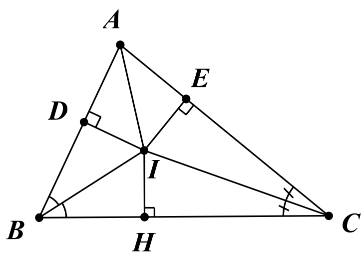
Do đó $\Delta MKN = \Delta MHN$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{KMN} = \widehat{HMN} \Rightarrow$ ĐPCM.

d) Chứng minh được $\widehat{AMB} = \dfrac{\widehat{AMD}}{2} = \dfrac{\widehat{KMH}}{2} = \widehat{HMN}.$

Do đó $\widehat{AMB} + \widehat{AMN} = \widehat{HMN} + \widehat{AMN} = 180^\circ \Rightarrow$ B, M, N thẳng hàng.

Bài 8. Kẻ $HI \perp BC$



$\Delta BID = \Delta BIH$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra $ID = IH$ (1)

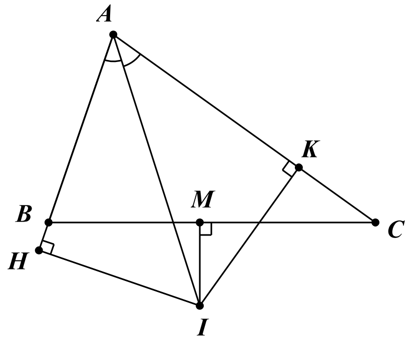
$\Delta CIE = \Delta CIH$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra $IE = IH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ID = IE$. $\Delta IAD = \Delta IAE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) suy ra $AD = AE$

Bài 9.

a) $\Delta AIH = \Delta AKI$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra

$AH = AK$ (1)



b) Gọi M là trung điểm của BC.

$\Delta BMI = \Delta CMI\ (c.g.c) \Rightarrow IB = IC\ \ \Delta CAD$

$\Delta AHI = \Delta AKI$ (câu a) $IH = IK$

$\Delta IHB = \Delta IKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) suy ra $BH = CK$

c) $AC = AK + KC \quad (1)$

$AB = AH - BH \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AC + AB = (AK + AH) + (KC - BH)$.

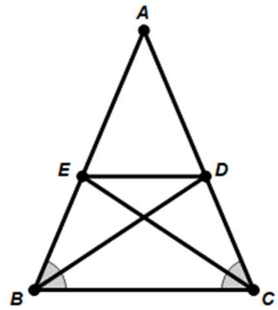
Do $AH = AK$, $BH = CK$ nên $AC + AB = 2AK$, suy ra $AK = \dfrac{AC + AB}{2}$

Từ (1) và (2) suy ra: $AC - AB = (AK - AH) + (KC + BH)$.

Do $AH = AK$, $BH = CK$ nên $AC - AB = 2CK$, suy ra $CK = \dfrac{AC - AB}{2}$

BÀI 16. TAM GIÁC CÂN. ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG

VD 1.1.



Ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$ (do BD là phân giác của $\widehat{ABC}$).

$\widehat{ACE} = \widehat{ECB} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$ (do CE là phân giác của $\widehat{ACB}$).

Mà ΔABC cân đỉnh A nên $AB = AC$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$.

Xét ΔADB và ΔAEC có:

$\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (góc chung).

$AB = AC$ (giả thiết).

$\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (chứng minh trên).

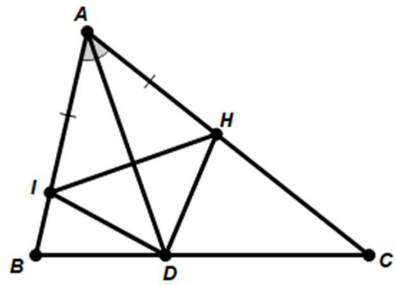
$\Rightarrow \Delta ADB = \Delta AEC$ (g-c-g).

$\Rightarrow AD = AE$ (cặp cạnh tương ứng).

Do đó, ΔADE cân đỉnh A (điều phải chứng minh).

VD 1. 2.

Do AD là phân giác trong góc A nên $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.



Xét ΔADI và ΔADH có: $AI = AH$ (giả thiết), $\widehat{IAD} = \widehat{HAD}$ (AD là đường phân giác trong góc A), AD chung,

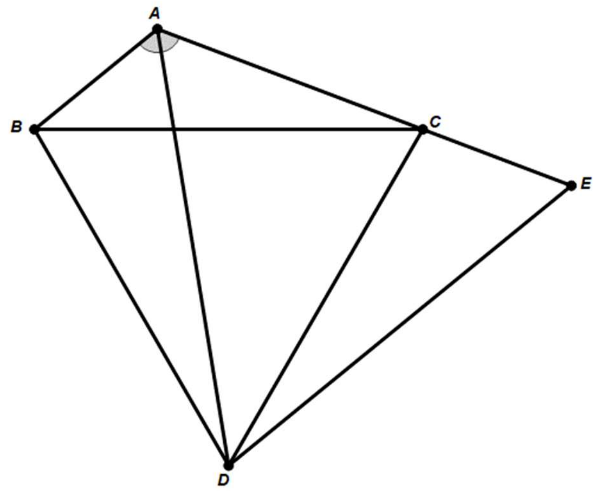
$\Rightarrow \Delta ADI = \Delta ADH$ (c-g-c).

$\Rightarrow DI = DH$ (cặp cạnh tương ứng).

Vậy, tam giác DHI là tam giác cân đỉnh D.

VD 1.3.

Do AD là phân giác trong góc A nên $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=60^\circ$.



Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE=AD$.

Do $AD=AB+AC$ (giả thiết) nên ta có $AE=AB+AC \Rightarrow AE>AC$ hay C nằm giữa A và E.

Khi đó, ta có $AC+EC=AB+AC \Rightarrow EC=AB$.

Xét ΔADE có: $AD=AE$, $\widehat{DAE}=\widehat{DAC}=60^\circ$

Suy ra ΔDAE đều nên ta có được $DA=DE=AE$, $\widehat{DAE}=\widehat{DEA}=\widehat{ADE}=60^\circ$.

Xét ΔABD và ΔECD có: $AB=EC$ (chứng minh trên) , $DA=DE$ (chứng minh trên), $\widehat{BAD}=\widehat{CED}=60^\circ$,

$\Rightarrow \Delta ABD=\Delta ECD$ (c-g-c).

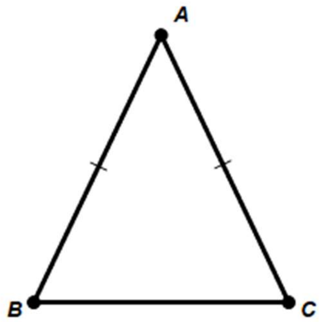
Nên ta có $DB=DC$ (2 cạnh tương ứng), $\widehat{ADB}=\widehat{CDE}$ (2 góc tương ứng) (1)

Theo chứng minh trên, ta có $\widehat{ADE}=60^\circ \Rightarrow \widehat{ADC}+\widehat{CDE}=60^\circ$.

Nên từ (1), ta có $\widehat{ADC}+\widehat{ADB}=60^\circ \Leftrightarrow \widehat{BDC}=60^\circ$.

Vậy, tam giác BCD có $DB=DC$ và $\widehat{BDC}=60^\circ$ nên BCD là tam giác đều.

VD 2. 1. Do tam giác ABC cân đỉnh A nên ta có $\hat{B}=\hat{C}$.



Mà ta luôn có $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.

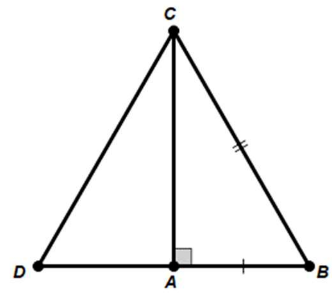
a) Với $\hat{A}=80^\circ$, ta có $\hat{B}+\hat{C}=180^\circ-\hat{A}=180^\circ-80^\circ=100^\circ$.

$\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=\frac{100^\circ}{2}=50^\circ$.

b) Do $\hat{B}=75^\circ$ nên $\hat{C}=75^\circ$.

Suy ra $\hat{A}=180^\circ-\left(\hat{B}+\hat{C}\right)=180^\circ-\left(75+75^\circ\right)=30^\circ$.

VD 2.2. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $DA = BA$. Suy ra $BD = DA + AB = BC$ (1).



Xét ΔCAB và có $\begin{cases} AB = AD \\ CA(\text{chung}) \\ \widehat{CAB} = \widehat{CAD} = 90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta CAB = \Delta CAD$ (c-g-c).

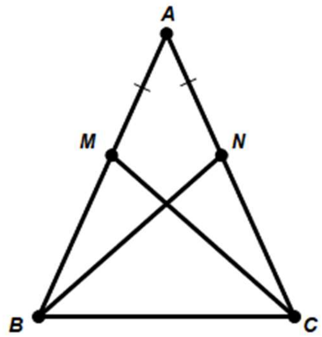
$\Rightarrow CD = CB$ (2 cạnh tương ứng) (2).

Từ (1) và (2) ta được $BC = CD = DB$ nên tam giác BCD là tam giác đều.

Khi đó, ta có được $\widehat{CBD} = 60^\circ$ hay $\widehat{CBA} = 60^\circ$.

Mà tam giác ABC vuông tại A nên $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

VD 3.1. Do CM và BN là hai đoạn thẳng không có đầu mút chung nên ta sẽ chứng minh $CM = BN$ thông qua hai tam giác bằng nhau.



Ta có ΔABC cân đỉnh A nên $AB = AC$ và $\hat{B} = \hat{C}$.

Hay $AM + MB = AN + NC$.

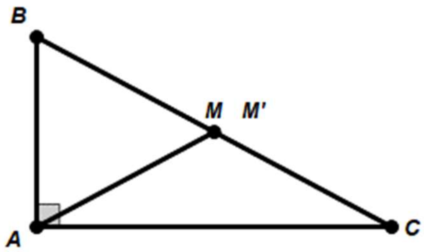
Mà $AM = AN$ (giả thiết), suy ra $BM = CN$.

Xét ΔBCM và ΔCBN có $\begin{cases} BC(\text{chung}) \\ \widehat{CBM} = \widehat{BCN}(\text{cmt}). \\ BM = CN(\text{cmt}) \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta BCM = \Delta CBN$ (c-g-c).

$\Rightarrow CM = BN$ (hai cạnh tương ứng).

VD 3. 2. Gọi M' là điểm nằm trên cạnh BC thỏa mãn $M'B = M'A$. Khi đó, tam giác $M'AB$ cân đỉnh M'.



$\Rightarrow \widehat{M'BA} = \widehat{M'AB}$ hay $\widehat{M'AB} = \hat{B}$ (1).

Do tam giác ABC vuông tại A nên ta có $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ = \hat{A}$.

$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \widehat{M'AB} + \widehat{M'AC}$ (2).

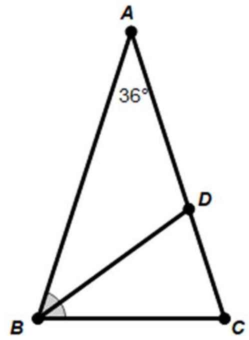
Từ (1) và (2), ta được $\hat{C} = \widehat{M'AC}$ hay $\widehat{M'CA} = \widehat{M'AC}$.

Do đó, tam giác $M'AC$ cân đỉnh M', suy ra $M'A = M'C$.

Kết hợp với $M'B = M'A$ (cách dựng), ta có $M'B = M'C = M'A$ nên M' là trung điểm của đoạn BC.

Vậy, $M' \equiv M$ nên ta chứng minh được $MB = MC = MA$.

VD 3.3. Ta có $AB = AC$, $\widehat{B} = \widehat{C}$ (do ΔABC cân đỉnh A).



Mà ta luôn có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

Với $\widehat{A} = 36°$ $\Rightarrow 36° + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ $\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 144°$.

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{144°}{2} = 72°$.

Do BD là tia phân giác góc B nên $\widehat{DBC} = \widehat{DBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{B} = 36°$.

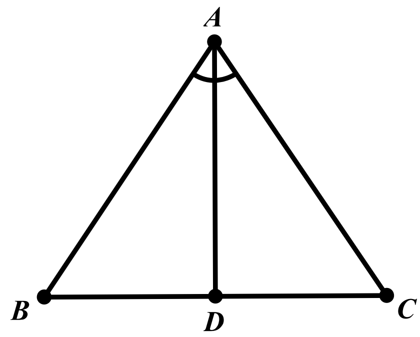
Xét ΔABD có $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 36°$ nên ΔDAB cân đỉnh D $\Rightarrow DB = DA$ (1).

Có $\widehat{BDC}$ là góc ngoài đỉnh D của ΔABD nên $\widehat{BDC} = \widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 36° + 36° = 72°$.

Xét ΔBCD có $\widehat{BDC} = \widehat{BCD} = 72°$ nên ΔBCD cân đỉnh B $\Rightarrow BD = BC$ (2).

Từ (1) và (2), ta được $DA = DB = BC$.

VD 4.1.



Xét ΔABD và ΔACD có

AD chung

$\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (gt)

$AB = AC$ (vì ΔABC cân)

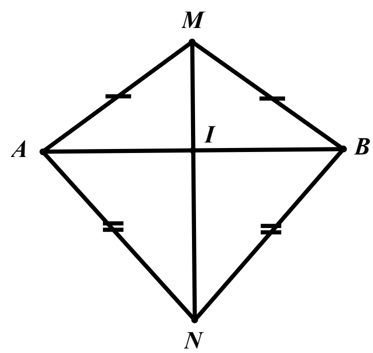
$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACD$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = CD$ (hai góc tương ứng) và $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ (hai góc tương ứng)

Lại có $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^0$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 90^0 \Rightarrow AD \perp BC$.

Ta có AD vuông góc với BC tại trung điểm D của BC. Vậy AD là trung trực của BC.

VD 4.2. Gọi I là giao điểm của MN và AB



Xét ΔAMN và ΔBMN có

MN chung

$MA = MB$ (gt)

$NA = NB$ (gt)

$\Rightarrow \Delta AMN = \Delta BMN$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{BMN}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow MI$ là phân giác $\widehat{AMB}$. Lại có $MA = MB \Rightarrow \Delta AMB$ cân có MI là phân giác

Tương tự VD 4.1 ta suy ra : MN là trung trực của AB.

IV. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.

Xét ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$.

a) Với $\widehat{A}=80^\circ$, ta có $\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ-\widehat{A}=100^\circ$

Từ giả thiết, ta có $\dfrac{\widehat{B}}{1}=\dfrac{\widehat{C}}{4}$.

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có $\dfrac{\widehat{B}}{1}=\dfrac{\widehat{C}}{4}=\dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{1+4}=\dfrac{100^\circ}{5}=20^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{B}=20^\circ$, $\widehat{C}=4.20^\circ=80^\circ$.

Do đó, ta có $\widehat{A}=\widehat{C}=80^\circ$ nên ΔABC cân đỉnh B.

b) Ta có $\widehat{A}+\dfrac{3}{2}\widehat{B}=150^\circ \Rightarrow \widehat{A}=150^\circ-\dfrac{3}{2}\widehat{B}$.

Mà $2\widehat{A}+\dfrac{1}{2}\widehat{B}=150^\circ \Rightarrow 2\left(150^\circ-\dfrac{3}{2}\widehat{B}\right)+\dfrac{1}{2}\widehat{B}=150^\circ$.

$\Leftrightarrow 300^\circ-3\widehat{B}+\dfrac{1}{2}\widehat{B}=150^\circ$.

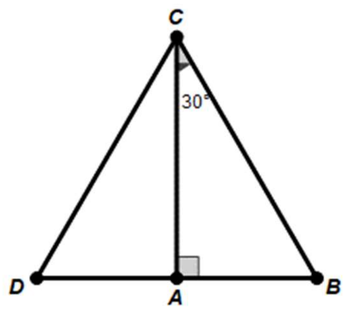
$\Leftrightarrow \dfrac{5}{2}\widehat{B}=150^\circ \Leftrightarrow \widehat{B}=60^\circ$.

Khi đó, ta có $\widehat{A}=150^\circ-\dfrac{3}{2}.60^\circ=60^\circ$.

Vậy ΔABC có $\widehat{A}=\widehat{B}=60^\circ$, suy ra ΔABC là tam giác đều.

Bài 2.

Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{ACB}=30^\circ$. Ta chứng minh $AB=\dfrac{1}{2}BC$.



Ta có $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90^\circ$ (do ΔABC vuông tại A).

$\Rightarrow \widehat{ABC}=90^\circ-\widehat{ACB}=60^\circ$.

Trên tia đối của tia AB, lấy điểm D sao cho $AD=AB$.

Xét ΔABC và ΔADC có:

AC chung, $\widehat{CAB}=\widehat{CAD}=90^\circ$, $AB=AD$ (cách dựng),

$\Rightarrow \Delta ABC=\Delta ADC$ (c-g-c).

$\Rightarrow CD=CB$ (cặp cạnh tương ứng).

Xét ΔBCD có $CB = CD$, $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} = 60^\circ$.

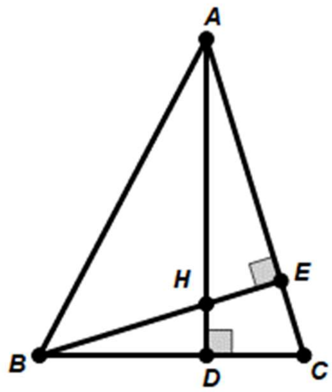
$\Rightarrow \Delta BCD$ là tam giác đều $\Rightarrow BC = CD = DB$.

Mà ta có $AB = AD = \dfrac{BD}{2}$.

Do đó, $AB = \dfrac{BC}{2}$ (điều phải chứng minh).

Bài 3. Ta có $\widehat{DAC} + \widehat{DCA} = 90^\circ$ (do ΔADC vuông tại D).

Ta có $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = 90^\circ$ (do ΔBCE vuông tại E).



$\Rightarrow \widehat{DAC} + \widehat{DCA} = \widehat{ECB} + \widehat{EBC} = 90^\circ$ hay $\widehat{DAC} = \widehat{CBE}$

Xét ΔAHE và ΔBCE có:

$AH = BC$ (giả thiết), $\widehat{AEH} = \widehat{BEC} = 90^\circ$, $\widehat{HAE} = \widehat{CBE}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta AHE = \Delta BCE$ (cạnh huyền – góc nhọn).

$\Rightarrow AE = BE$ (2 cạnh tương ứng).

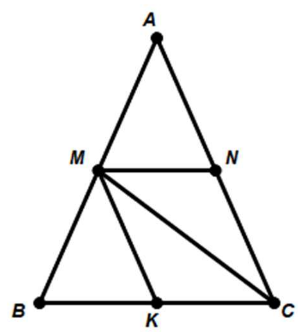
Xét ΔABE có $AE = BE$, $\widehat{AEB} = 90^\circ$.

Suy ra ΔAEB là tam giác vuông cân đỉnh E.

Do đó, ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BAE} = 45^\circ$.

Bài 4. Do ABC cân đỉnh A nên $AB = AC$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Ta có $AM = BM = \dfrac{1}{2}AB$, $AN = CN = \dfrac{1}{2}AC$ (tính chất trung điểm).



$\Rightarrow AM = AN$.

Nên ΔAMN cân đỉnh A $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$.

Mà ΔAMN có $\widehat{AMN} + \widehat{ANM} + \widehat{MAN} = 180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \dfrac{180^\circ - \widehat{MAN}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Mặt khác, ta có được $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Do đó $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Mà hai góc ở vị trí sole trong nên $MN // BC$.

Qua M, dựng đường thẳng song song với AC, cắt cạnh BC tại điểm K.

$\Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{ACB}$ (đồng vị).

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{ABC} = \widehat{MBK}$.

Xét ΔMBK có $\widehat{MKB} = \widehat{MBK}$ nên ΔMBK cân đỉnh M.

$\Rightarrow MK = MB$.

Do đó, ta có $MK = MB = MA = AN = CN$.

Xét ΔAMN và ΔMBK có:

$\widehat{AMN} = \widehat{MBK}$, $\widehat{ANM} = \widehat{MKB}$, $AM = MB$.

$\Rightarrow \Delta AMN = \Delta MBK$ (g-c-g).

$\Rightarrow MN = BK$ (2 cạnh tương ứng) (1).

Xét ΔMNC và ΔCKM có:

Cạnh CM chung,

$\widehat{NMC} = \widehat{KCM}$ (sole trong do $MN // BC$),

$\widehat{NCM} = \widehat{KMC}$ (sole trong do $MK // AC$).

$\Rightarrow \Delta MNC = \Delta CKM$ (g-c-g).

$\Rightarrow MN = CK$ (2 cạnh tương ứng) (2).

Từ (1) và (2), ta có $MN = BK = CK$.

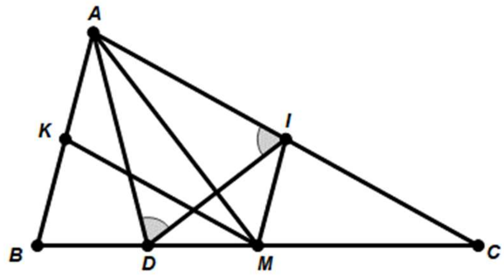
Mà $BK + CK = BC$, suy ra K là trung điểm của BC.

Do đó, ta có $MN = BK = CK = \dfrac{BC}{2}$ (điều phải chứng minh).

Nhận xét: Đây là bài toán điển hình trong việc sử dụng các mối quan hệ từ tam giác cân cho đến các đường thẳng song song. Có thể mở rộng kết quả của bài toán này cho tam giác ABC bất kỳ. Khi đó, lưu ý việc chứng minh song song ($MN // BC$) có thể thực hiện thông qua việc dựng đường thẳng $MN' // BC$ với $N' \in BC$. Sau đó, ta tìm cách chỉ ra $N' \equiv N$.

Kết luận: Cho tam giác ABC bất kỳ. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khi đó, ta luôn có $MN // BC$, $MN = \frac{1}{2}BC$.

Bài 5.



Do M là trung điểm của BC nên $BM = CM = \frac{BC}{2} = AB$.

Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow AK = BK = \frac{AB}{2}$.

Ta có D là trung điểm của BM nên $BD = MD = \frac{BM}{2}$

.

$\Rightarrow AK = BK = BD = MD$.

Xét ΔABD và ΔMBK có:

$AB = MB$, $BD = BK$, $\widehat{ABM}$ chung,

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta MBK$ (c-g-c).

$\Rightarrow AD = MK$ (hai cạnh tương ứng)

(1).

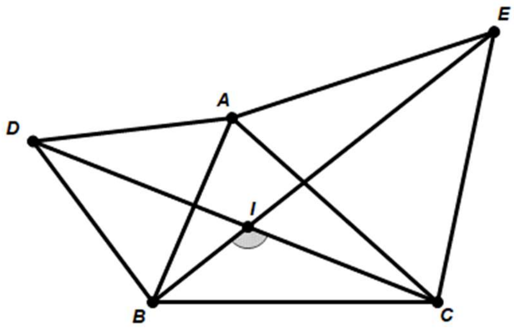
Gọi I là trung điểm của AC.

Áp dụng kết quả chứng minh trong ví dụ 1, ta có được $MK = AI = IC = \frac{AC}{2}$

(2).

Từ (1) và (2), ta có $AD = \frac{AC}{2}$ hay $AC = 2AD$.

Bài 6.



c) Do ΔABD, ΔACE là các tam giác đều nên ta có:

$AB = BD = DA$, $AC = CE = EA$ và $\widehat{BAD} = \widehat{EAC} = 60^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BAC} = \widehat{CAE} + \widehat{BAC}$.

$\Leftrightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$.

Xét ΔABE và ΔADC có:

$AB = AD$, $AE = AC$ (giả thiết),

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ADC$ (c-g-c).

d) Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{ACD}$ (do $\Delta ABE = \Delta ADC$).

$\Rightarrow \widehat{AEB} + \widehat{BEC} + \widehat{ECA} = \widehat{ACD} + \widehat{BEC} + \widehat{ECA}$.

$\Leftrightarrow \widehat{AEC}+\widehat{ECA}=\widehat{IEC}+\widehat{ECI}$.

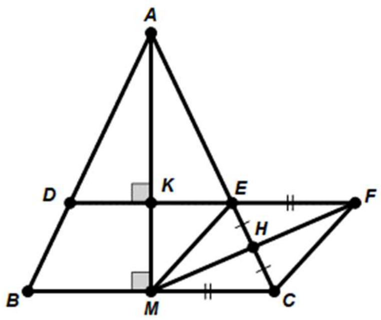
$\Leftrightarrow \widehat{IEC}+\widehat{ECI}=\widehat{AEC}+\widehat{ECA}=60^\circ+60^\circ=120^\circ$.

Xét ΔEIC có $\widehat{BIC}$ là góc ngoài đỉnh I

$\Rightarrow \widehat{BIC}=\widehat{IEC}+\widehat{ECI}=120^\circ$ (điều phải chứng minh).

Bài 7.

d) Ta có ΔABC cân đỉnh A nên $AB=AC$, $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$.



Xét ΔABM và ΔACM có:

$AB=AC$, $BM=CM$ (giả thiết), AM chung,

$\Rightarrow \Delta ABM=\Delta ACM$ (c-c-c).

$\Rightarrow \widehat{AMB}=\widehat{AMC}$.

Mà $\widehat{AMB}+\widehat{AMC}=\widehat{BMC}=180^\circ$ nên ta có $\widehat{AMB}=\widehat{AMC}=90^\circ$

$\Rightarrow AM\perp BC$.

Ta có $DE\perp AM$ (giả thiết) $\Rightarrow DE\,//\,BC$ (cùng vuông góc với AM).

$\Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{ABC}$, $\widehat{AED}=\widehat{ACB}$ (các góc sole trong).

Mà theo trên, ta có $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$ $\Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{AED}$.

Vậy, ΔADE cân đỉnh A $\Rightarrow AD=AE$ (điều phải chứng minh).

e) Gọi $MF\cap AC=\{I\}$.

Xét ΔFEI và ΔMCI có:

$FE=MC$ (giả thiết), $\widehat{FEI}=\widehat{MCI}$ (sole trong), $\widehat{EFI}=\widehat{CMI}$ (sole trong),

$\Rightarrow \Delta FEI=\Delta MCI$ (g-c-g).

$\Rightarrow EI=CI$ (2 cạnh tương ứng).

Vậy I là trung điểm của CE.

Mà theo giả thiết, H là trung điểm của CE $\Rightarrow I\equiv H$.

Do đó, ta có M, H, F thẳng hàng (điều phải chứng minh).

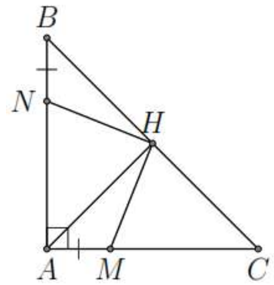
ÔN TẬP CHƯƠNG IV. TAM GIÁC BẰNG NHAU

Bài 1.

a) Ta có $\widehat{MAH}=45^\circ$ (AH là tia phân giác) và $\widehat{NBH}=45^\circ$ ($\triangle ABC$ vuông cân) nên $\widehat{NBH}=\widehat{MAH}$.

$\triangle ABC$ cân tại A, AH là phân giác nên cũng là đường cao, do đó $AH\perp BC$.

$\triangle ABH$ vuông tại H có $\widehat{ABH}=45^\circ$ nên là tam giác vuông cân, do đó $AH=BH$. Xét $\triangle AHM$ và $\triangle BHN$, ta có:



$$\begin{cases} AH=HB \text{ (cmt)} \\ \widehat{NBH}=\widehat{MAH} \text{ (cmt)} \\ AM=BN \text{ (gt)} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle AHM=\triangle BHN$ (c.g.c)

b) $BN=AM, AB=AC \Rightarrow AN=MC$.

Chứng minh tương tự câu a) ta được $\triangle AHN=\triangle CHM$ (c.g.c).

c) $\triangle AHM=\triangle BHN \Rightarrow HM=HN$ (cạnh tương ứng) và $\widehat{MHA}=\widehat{NHB}$ (góc tương ứng).

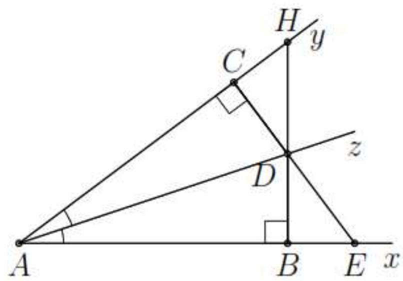
Lại có $\widehat{NHB}+\widehat{NHA}=90^\circ$ nên

$\widehat{MHA}+\widehat{NHA}=90^\circ \Rightarrow \widehat{MHN}=90^\circ$.

Từ $HM=HN$ và $\widehat{MHN}=90^\circ$ suy ra tam giác MHN vuông cân.

Bài 2.

a) Xét $\triangle ABD$ vuông tại B và $\triangle ACD$ vuông tại C, ta có:



AD: cạnh chung;

$\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$ (AD là phân giác)

Suy ra $\triangle ABD=\triangle ACD$ (ch.gn).

b) Xét $\triangle DBE$ và $\triangle DCH$, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{DBE}=\widehat{DCH} (=90^\circ) \\ DC=DB (\triangle ABD=\triangle ACD) \\ \widehat{BDE}=\widehat{CDH} \end{cases}$$

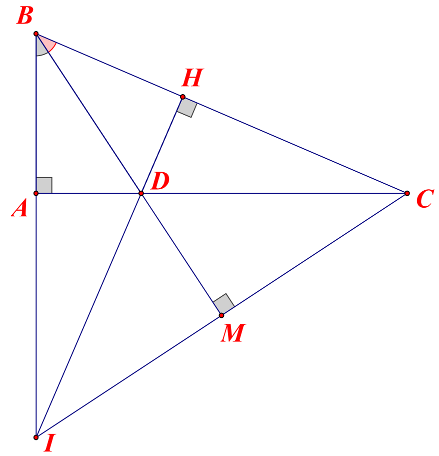
Suy ra $\triangle DBE=\triangle DCH$ (g.c.g).

c) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACE$, ta có:

$$\begin{cases}\hat{A} \text{ chung}\\ AB = AC(\triangle ABD = \triangle ACD)\\ \widehat{ABH} = \widehat{ACE}(=90^\circ)\end{cases}$$

Suy ra $\triangle ABH = \triangle ACE$ (g.c.g).

Bài 3.



a) Xét ΔABD và ΔHBD có:

$\widehat{BAD} = \widehat{BHD} = 90°$

BD chung

$\widehat{ABD} = \widehat{HBD}$ (BD là phân giác của $\hat{B}$)

Do đó: $\Delta ABD = \Delta HBD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AB = BH$ (hai cạnh tương ứng)

b) Xét ΔHCD vuông tại D. Có DC là cạnh huyền nên: $DC > DH$

Mà $DA = DH$ (do $\Delta ABD = \Delta HBD$) $\Rightarrow DC > DA$

c) Xét ΔAID và ΔHCD có:

$\widehat{IAD} = \widehat{CHD} = 90°$

$DA = DH$

$\widehat{ADI} = \widehat{HDC}$ (đối đỉnh)

Do đó: $\Delta AID = \Delta HCD$ (góc nhọn – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AI = CH$ (hai cạnh tương ứng)

Ta có: $BI = BA + AI; BC = BH + HC$

Mà $AB = BH$, $AI = CH$ (cmt)

$\Rightarrow BI = BC \Rightarrow \Delta BIC$ cân tại B

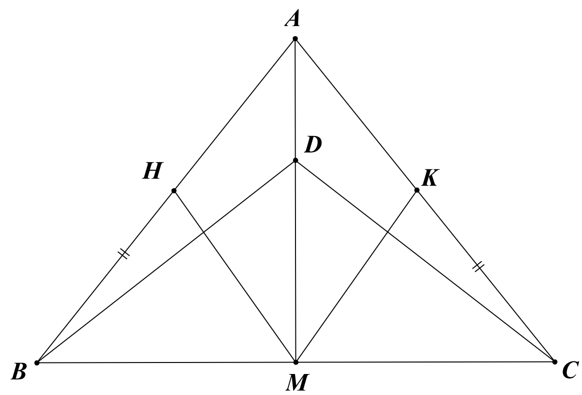
d) Ta có: ΔBIC cân tại B, vì M Trung điểm của tia IC nên BM vừa là trung tuyến vừa là đường cao hay $BM \perp IC$

Mặt khác: $CA \perp BI$ (gt), $DH \perp BC (gt) \Rightarrow IH \perp BC$

Do đó: BM, CA, IH là ba đường cao trong ΔBIC

Mà: $D = CA \cap IH \Rightarrow D$ là trực tâm ΔBIC, hay Ba điểm B, D, M thẳng hàng

Bài 4.



a) M là trung điểm BC nên BM = MC

Xét tam giác ABM và tam giác ACM có:

AB = AC (gt)

BM = CM (cmt)

AM cạnh chung

Suy ra $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c)

b) $\Delta ABM = \Delta ACM$ nên $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (2 góc tương ứng)

Suy ra AM là tia phân giác góc BAC

$\Delta ABM = \Delta ACM$ nên $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (2 góc tương ứng)

Lại có: $\widehat{AMC} + \widehat{AMB} = 180^\circ$ (kề bù)

$2.\widehat{AMC} = 180^\circ$

$\widehat{AMC} = 90^\circ$ hay $AM \perp BC$

c) Xét ΔBDM và ΔCDM có:

MB = MC (cmt)

$\widehat{AMC} = \widehat{AMB} = 90^\circ$

MD cạnh chung

Suy ra $\Delta BDM = \Delta CDM$ (c.g.c)

Suy ra BD = DC (2 cạnh tương ứng)

d) ΔABC có $AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (tính chất tam giác cân)

Xét ΔBHM và ΔCKM có:

BH = CK (gt)

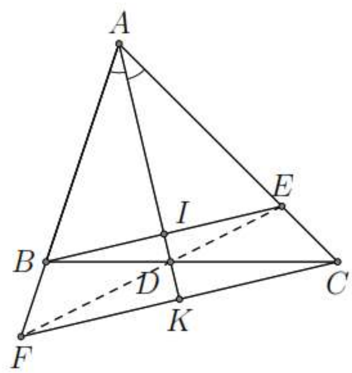
$\widehat{HBM} = \widehat{KCM}$ (cmt)

BM = CM (cmt)

Suy ra $\Delta BHM = \Delta CKM$ (c.g.c)

Suy ra MH = MK (2 cạnh tương ứng)

Bài 5.



a) Xét $\triangle BAD$ và $\triangle EAD$, ta có:

AD là cạnh chung;

$\widehat{BAD} = \widehat{EAD}$ (AD là phân giác);

$AB = AE$ (E là trung điểm AB).

Suy ra $\triangle BAD = \triangle EAD$ (c.g.c) $\Rightarrow DB = DE$.

Lại có $AB = AE, AF = AC$ nên $AF - AB = AC - AE \Rightarrow BF = CE$.

b) Chứng minh tương tự câu a) ta được $\triangle FAD = \triangle CAD$

$\Rightarrow FD = CD$ và $\widehat{BFD} = \widehat{ECD}$.

Xét $\triangle FDB$ và $\triangle CDE$, ta có:

$\begin{cases} BF = CE \text{ (cmt)} \\ \widehat{BFD} = \widehat{ECD} \text{ (cmt)} \\ FD = CD \text{ (cmt)} \end{cases}$

Suy ra $\triangle FDB = \triangle CDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{CDE}$.

Mà $\widehat{BDE} + \widehat{CDE} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{FDB} + \widehat{BDE} = 180^\circ$.

Vậy F, D, E thẳng hàng.

c) AD cắt BE tại I và CF tại K.

Xét $\triangle FAK$ và $\triangle CAK$, ta có:

AK là cạnh chung;

$\widehat{FAK} = \widehat{CAK}$ (AK là phân giác);

$AF = AC$ (giả thiết).

Suy ra $\triangle FAK = \triangle CAK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AKF} = \widehat{AKC}$.

Mà $\widehat{AKF} + \widehat{AKC} = 180^\circ$ (kề bù) nên $\widehat{AKF} = \widehat{AKC} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp CF$.

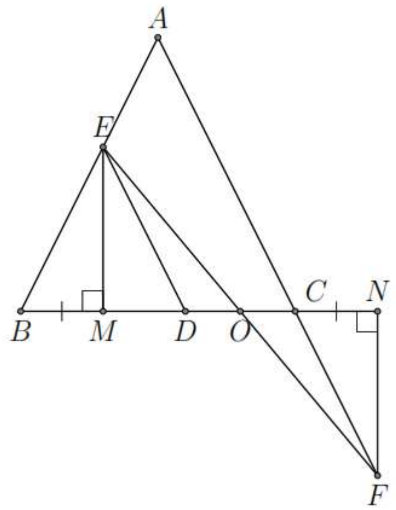
Chứng minh tương tự ta được $AD \perp BE$.

Từ $AD \perp BE$ và $AD \perp CF$ suy ra $BE \parallel FC$.

Bài 6.

a) Ta có $\widehat{EBM} = \widehat{ACB}$ ($\triangle ABC$ cân) và $\widehat{FCN} = \widehat{ACB}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{EBM} = \widehat{FCN}$.

Xét $\triangle BEM$ và $\triangle CFN$, ta có:



$\begin{cases} \widehat{EBM} = \widehat{FCN} \text{ (cmt)} \\ BM = CN \text{ (gt)} \\ \widehat{EMB} = \widehat{FNC} (= 90^\circ) \end{cases}$

$\triangle BEM = \triangle CFN$ (g.c.g) $\Rightarrow EM = FN$.

b) Ta có $ED \parallel AC \Rightarrow \widehat{EDM} = \widehat{ACB}$ (đồng vị) mà $\widehat{EBM} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{EDM} = \widehat{EBM}$, suy ra $\triangle EBD$ cân tại E, do đó $EB = ED$.

Xét $\triangle BME$ vuông tại M và $\triangle DME$ vuông tại M, ta có:

$\begin{cases} EB = ED \text{ (cmt)} \\ \widehat{EDM} = \widehat{EBM} \text{ (cmt)} \end{cases}$

Suy ra $\triangle BME = \triangle DME$ (ch.gn) $\Rightarrow BM = MD$.

c) Ta có $EM \parallel FN$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \widehat{MEO} = \widehat{NFO}$ (so le trong).

Xét $\triangle MEO$ và $\triangle NFO$, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{MEO} = \widehat{NFO} \text{ (cmt)} \\ EM = FN \text{ (cmt)} \\ \widehat{EMO} = \widehat{FNO} (= 90^\circ) \end{cases}$$

Suy ra $\triangle MEO = \triangle NFO$ (g.c.g) $\Rightarrow OE = OF$.

Bài 7.

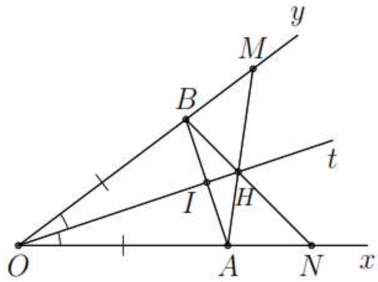
a) Xét $\triangle OAH$ và $\triangle OBH$, ta có:

$OA = OB$ (giả thiết);

$\widehat{AOH} = \widehat{BOH}$ (Ot là phân giác);

OH là cạnh chung.

Suy ra $\triangle OAH = \triangle OBH$ (c.g.c).



b) Xét $\triangle OAM$ và $\triangle OBN$, ta có:

$$\begin{cases} OA = OB \text{ (gt)} \\ \widehat{OAM} = \widehat{OBN} \ (\triangle OAH = \triangle OBH) \\ \hat{O} \text{ chung} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle OAM = \triangle OBN$ (g.c.g).

c) AB cắt OH tại I.

Xét $\triangle OAI$ và $\triangle OBI$, ta có:

OI là cạnh chung;

$\widehat{AOI} = \widehat{BOI}$ (Ot là tia phân giác);

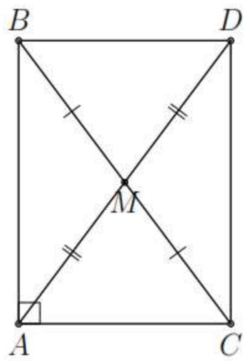
$OA = OB$ (giả thiết).

Suy ra $\triangle OAI = \triangle OBI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{BIO}$.

Mà $\widehat{AIO} + \widehat{BIO} = 180^\circ$ (kề bù) nên $\widehat{AIO} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Vậy $AB \perp OH$.

Bài 8.



a) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle DMC$, ta có:

$AM = MD$ (giả thiết);

$\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ (đối đỉnh);

$BM = MC$ (M là trung điểm của BC).

Suy ra $\triangle AMB = \triangle DMC$ (c.g.c).

b) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$, ta có:

$AM = MD$ (giả thiết);

$\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$ (đối đỉnh);

$BM = MC$ (M là trung điểm của BC).

Suy ra $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = BD$ và $\widehat{MAC} = \widehat{MDB}$.

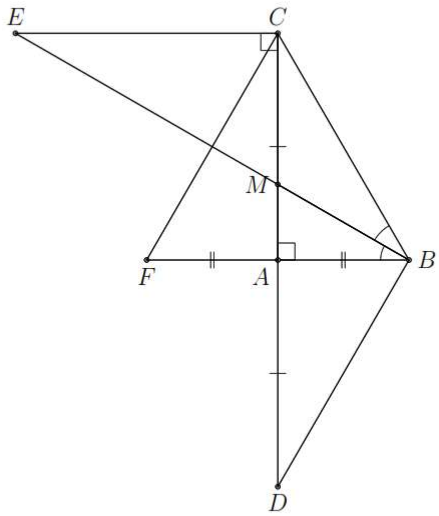
Mà hai góc trên ở vị trí so le trong nên $AC \parallel BD$.

c) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DCB$, ta có:

$$\begin{cases} BC \text{ chung} \\ \widehat{ACB} = \widehat{DBC} (AC \parallel BD) \\ AC = BD \text{ (cmt)} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle DCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{BDC} = 90^\circ$.

Bài 9.



a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có:

$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 30^\circ$.

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ABC$, ta có:

$$\begin{cases} AB \text{ chung} \\ \widehat{BAD} = \widehat{ACB} (= 90^\circ) \\ AD = AC \text{ (gt)} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle ABD = \triangle ABC$ (c.g.c).

c) Ta có $EC \parallel AB$ (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CEM}$ (so le trong).

Mà $\widehat{ABM} = \widehat{CEM}$ (BM là phân giác) nên $\widehat{CEM} = \widehat{CEM}$

Do đó $\triangle ECB$ cân tại $C \Rightarrow EC = CB$ (1)

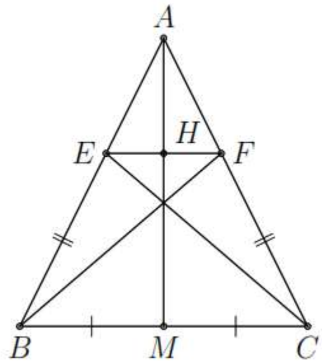
Trên tia đối tia AB lấy điểm F sao cho $AB = AF$.

Ta chứng minh được $\triangle AFC = \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow FC = FB \Rightarrow CFB$ cân tại C, mà $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle CFB$ đều. Do đó $FB = BC$, mà $AB = \dfrac{1}{2} BF (AB = AF)$ nên $AB = \dfrac{1}{2} BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB = \dfrac{1}{2} EC$.

Bài 10.

a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$, ta có:



$AB = AC$ (ΔABC cân tại A);
AM: cạnh chung;
$BM = MC$ (M là trung điểm của BC).

Suy ra $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c).

b) $\triangle ABM = \triangle ACM \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$.

Mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (kề bù) nên $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Vậy $AM \perp BC$

c) Xét $\triangle EBC$ và $\triangle FCB$, ta có:

BC là cạnh chung;
$\widehat{EBC} = \widehat{FCB}$ (ΔABC cân tại A);
$EB = FC$ (giả thiết).

Suy ra $\triangle EBC = \triangle FCB$ (c.g.c).

d) $AB = AC, BE = CF$ nên $AB - BE = AC - CF \Rightarrow AE = AF$.

Gọi H là giao điểm của AM và EF.

Xét $\triangle AEH$ và $\triangle AFH$, ta có:

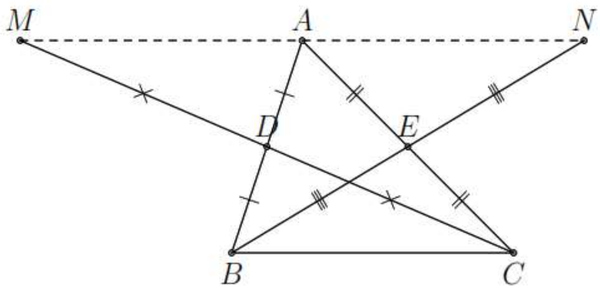
$$\begin{cases} AE = AF \text{ (cmt)} \\ \widehat{EAH} = \widehat{FAH} (\triangle ABM = \triangle ACM) \\ AH \text{ chung} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle AEH = \triangle AFH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EHA} = \widehat{FHA}$ mà $\widehat{EHA} + \widehat{FHA} = 180^\circ$ (kề bù) nên $\widehat{EHA} = \widehat{FHA} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Do đó $AM \perp EF$, mà $AM \perp BC$ nên $EF \parallel BC$.

Bài 11.

a) Xét $\triangle DBC$ và $\triangle DAM$, ta có:



$DB = DA$ (D là trung điểm AB);
$\widehat{BDC} = \widehat{MDA}$ (đối đỉnh);
$DC = DM$ (giả thiết).

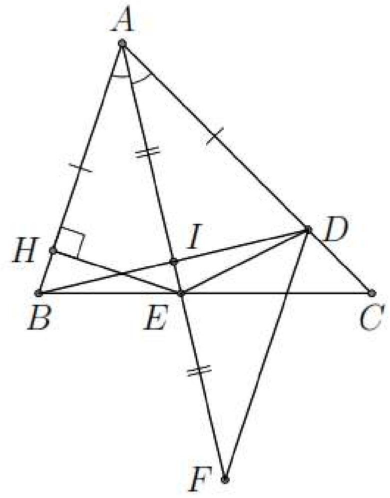
Suy ra $\triangle DBC = \triangle DAM$ (c.g.c)

b) $\triangle DBC = \triangle DAM \Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{MAD}$, mà hai góc này so le trong nên $AM \parallel BC$.

c) Chứng minh tương tự câu a) và câu b) ta được $AN \parallel BC$

Lại có $AM \parallel BC$, theo tiên đề Ơ-clit, AM và AN phải trùng nhau, do đó M, A, N thẳng hàng.

Bài 12.



a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADE$, ta có:

$AB = AD$ (giả thiết);

$\widehat{BAE} = \widehat{DAE}$ (AE là phân giác);

AE là cạnh chung.

Suy ra $\triangle ABE = \triangle ADE$ (c.g.c)

b) Xét $\triangle ABI$ và $\triangle ADI$, ta có:

$AB = AD$ (giả thiết);

$\widehat{BAI} = \widehat{DAI}$ (AI là phân giác);

AI là cạnh chung.

Suy ra $\triangle ABI = \triangle ADI$ (c.g.c) $\Rightarrow BI = DI$ $\Rightarrow I$ là trung điểm BD.

c) Xét $\triangle AIB$ và $\triangle FID$, ta có:

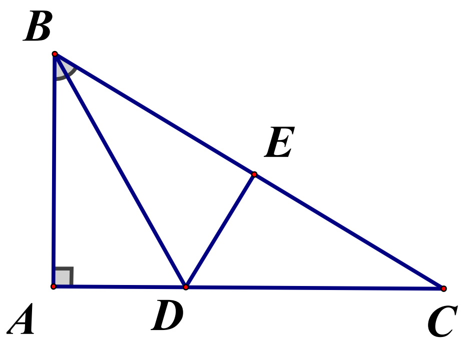
$$\begin{cases} AI = IF \text{ (gt)} \\ \widehat{AIB} = \widehat{FID} \text{ (cmt)} \\ BI = ID \text{ (cmt)} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle AIB = \triangle FID$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{DFI}$.

Hai góc này so le trong nên $AB \parallel DF$

Mà $EH \perp AB$ nên $EH \perp DF$.

Bài 13.



a) Chứng minh $AD = DE$

Xét ΔABD và ΔAED có:

$BA = BE$ (gt)

$\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$ (BD là phân giác $\widehat{ABC}$)

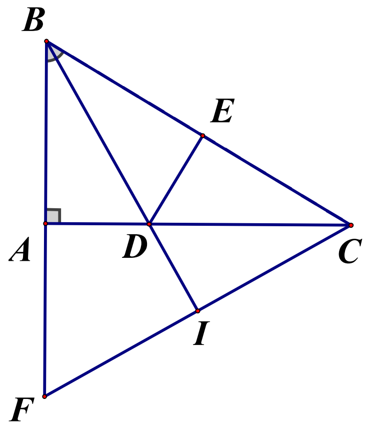
BD chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBD$ (c-g-c)

$\Rightarrow AD = DE$ (hai cạnh tương ứng)

b) Chứng minh $BD \perp FC$.

Gọi $BD \cap FC = \{I\}$



$\left.\begin{array}{l} BA = BE \text{ (cmt)} \\ AF = EC \text{ (gt)} \end{array}\right\} \Rightarrow BA + AF = BE + AC$

$\Rightarrow BF = BC$

Xét ΔBFI và ΔBCI có:

$BF = BC$ (cmt)

$\widehat{FBI} = \widehat{CBI}$ (BD là phân giác $\widehat{ABC}$)

BI chung

$\Rightarrow \Delta BFI = \Delta BCI$ (c-g-c)

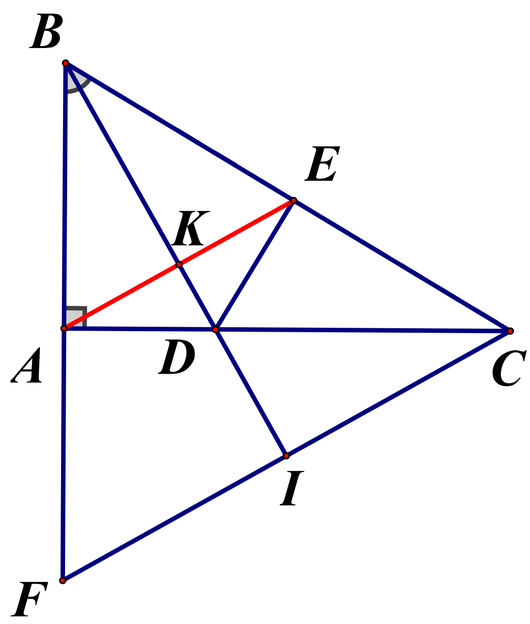
$\Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{BIC}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{BIF} + \widehat{BIC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{BIC} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\Rightarrow BI \perp FC$ hay $BD \perp FC$ (đpcm)

c) Chứng minh $AE // FC$



Gọi $BD \cap AE = \{K\}$

Xét ΔBAK và ΔBEK có:

$BA = BE$ (cmt)

$\widehat{ABK} = \widehat{EBK}$ (BD là phân giác $\widehat{ABC}$)

BK chung

$\Rightarrow \Delta BAK = \Delta BEK$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{BKA} = \widehat{BKE}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{BKA} + \widehat{BKE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BKA} = \widehat{BKE} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\Rightarrow BK \perp AE$ hay $BD \perp AE$

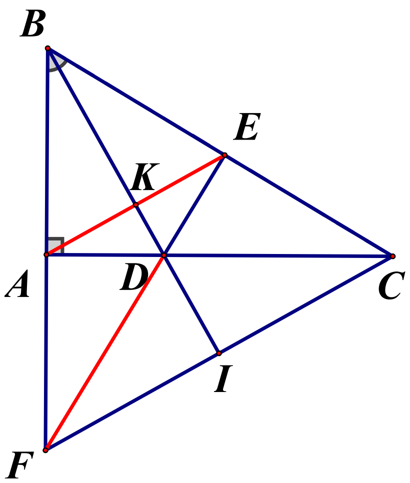
Mà $BD \perp FC$ (cmt)

$\Rightarrow AE // FC$ (từ vuông góc đến song song)

d) Chứng minh 3 điểm D, E, F thẳng hàng.

$\Delta ABD = \Delta EBD$ (cmt)

$\widehat{BED} = \widehat{BAD}$ (hai góc tương ứng) mà $\widehat{BAD} = 90° \Rightarrow \widehat{BED} = 90°$



$\Rightarrow \widehat{DEC} = 90°$

Xét ΔDAF và ΔDEC có:

$DA = DE$ (cmt)

$\widehat{DAF} = \widehat{DEC} = 90°$

$AF = EC$ (gt)

$\Rightarrow \Delta DAF = \Delta DEC$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{EDC}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{ADE} + \widehat{EDC} = 180°$ (2 góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{ADF} = 180°$ hay $\widehat{EDF} = 180°$

$\Rightarrow D, E, F$ thẳng hàng.

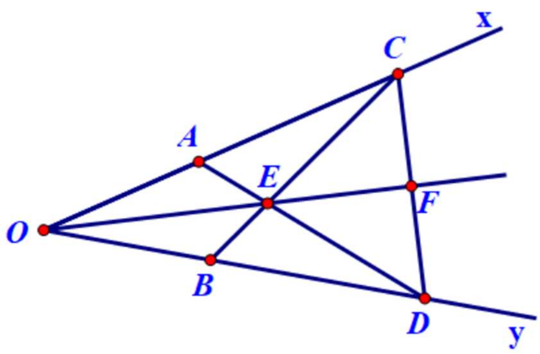
Bài 14.

a) Xét ΔOAD và ΔOBC có:

$OA = OB$ (gt)

$\hat{O}$ là góc chung

$OD = OC$ (do $OA = OB$ và $AC = BD$)



Do đó $\Delta OAD = \Delta OBC$ (c.g.c)

Suy ra $AD = BC$ (2 cạnh tương ứng)

b) Vì $\Delta OAD = \Delta OBC$ (cmt) nên $\widehat{OAD} = \widehat{OBC}$ (2 góc tương ứng)

Suy ra $\widehat{CAD} = \widehat{DBC}$ (do tính chất hai góc kề bù)

Xét ΔEAC và ΔEBD có:

$\widehat{CAD} = \widehat{DBC}$ (cmt)

$AC = BD$ (gt)

$\widehat{ACE} = \widehat{DBE}$ (do $\Delta OAD = \Delta OBC$)

Do đó $\Delta EAC = \Delta EBD$ (g.c.g)

c) Xét ΔOAE và ΔOBE có:

$OA = OB$ (gt)

OE là cạnh chung (do $\Delta EAC = \Delta EBD$)

Do đó $\Delta OAE = \Delta OBE$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{AOE} = \widehat{BOE}$ (2 góc tương ứng)

Nên OE là tia phân giác của góc xOy.

Gọi F là giao điểm của OE và CD.

Xét ΔOCF và ΔODF có:

$OD = OC$ (do $OA = OB$ và $AC = BD$)

$\widehat{COF} = \widehat{DOF}$ (do OE là tia phân giác của góc xOy)

OF là cạnh chung

Do đó $\Delta OCF = \Delta ODF$ (c.g.c)

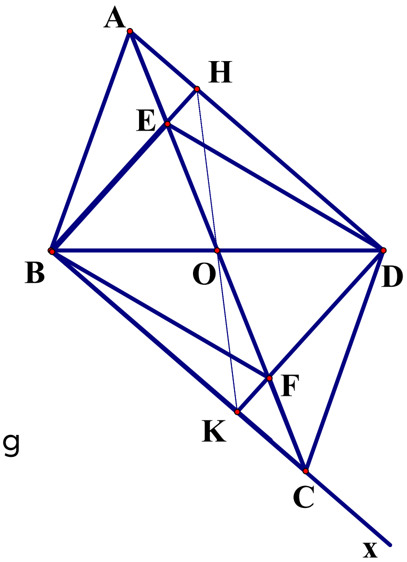
Suy ra $\widehat{OFC} = \widehat{DFO}$ (2 góc tương ứng)

Mà ra $\widehat{OFC} + \widehat{DFO} = 180°$ (2 góc kề bù)

Nên $\widehat{OFC} = \widehat{DFO} = 90°$

Vậy $OE \perp CD$.

Bài 15.



a) Chứng minh AB // CD và AB = CD.

* Vì AD // BC (gt) $\Rightarrow$ $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ (so le trong)

Xét ΔABD và ΔCDB, ta có:

BD là cạnh chung

$\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ (cmt)

AD = BC (gt)

$\Rightarrow$ ΔABD = ΔCDB (c.g.c) $\Rightarrow$ AB = CD (2 cạnh tương ứng)

và $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ (2 góc tương ứng) . Mà chúng ở vị trí so le trong

$\Rightarrow$ AB // CD (dhnb)

b) Chứng minh O là trung điểm AC và BD.

* Vì AD // BC (gt) $\Rightarrow$ $\widehat{DAO} = \widehat{BCO}$ (so le trong)

* Xét ΔAOD và ΔCOB, có:

$\widehat{DAO} = \widehat{BCO}$ (cmt)

AD = BC (gt)

$\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ (cmt)

$\Rightarrow$ΔAOD = ΔCOB (g.c.g)

$\Rightarrow$ AO = OC ; BO = OD (cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow$ O là trung điểm của AC, BD

c) Chứng minh ED // BF và ED = BF.

* Ta có: AE + EO = AO

CF+FO = OC

Mà AE = CF

Nên EO = FO

* Xét ΔEOD và ΔFOB, ta có:

EO = FO

$\widehat{EOD} = \widehat{BOF}$ (đối đỉnh)

OB = OD (cmt)

$\Rightarrow$ΔEOD = ΔFOB (c.g.c) $\Rightarrow$ED = BF (2 cạnh tương ứng)

$\widehat{OED} = \widehat{BFO}$(2 góc tương ứng) $\Rightarrow$ ED//BF (dhnb)

d) Chứng minh K, O, H thẳng hàng

* Xét ΔEOB và ΔFOD, ta có:

EO = OF (cmt)

$\widehat{EOB} = \widehat{DOF}$ (đối đỉnh)

BO = OD (cmt)

$\Rightarrow$ΔEOB = ΔFOD (c.g.c)

$\Rightarrow$ $\widehat{EBO} = \widehat{ODF}$ (2 góc tương ứng)

* Xét ΔBHD và ΔBKD, có:

$\widehat{EBO} = \widehat{ODF}$

BD chung

$\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$(cmt)

$\Rightarrow$ ΔBHD = ΔBKD (c.g.c) $\Rightarrow$ HD = BK (2 cạnh tương ứng)

* Xét ΔHOD và ΔKOB, có

HD = BK (cmt)

$\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$(cmt)

OD = OB (cmt)

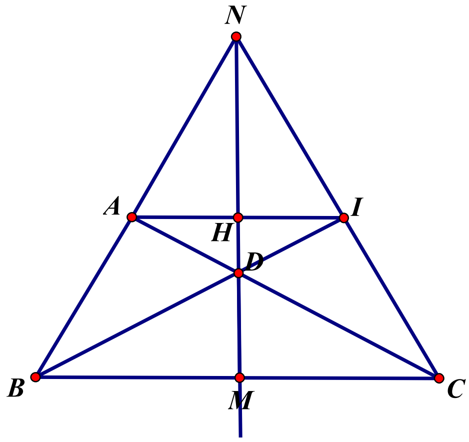
$\Rightarrow$ΔHOD = ΔKOB (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{HOD} = \widehat{BOK}$

* $\widehat{HOD}+\widehat{HOB}=180^o \Rightarrow \widehat{BOK}+\widehat{HOB}=180^o \Rightarrow \widehat{HOK}=180^o$.

Vậy O, H, K thẳng hàng.

Bài 16.



a) Do DM là đường trung trực của BC và $M \in BC$ nên M là trung điểm của BC

$\Rightarrow MB = MC$

Xét ΔDBM và ΔDCM có:

DM là cạnh chung

$\widehat{DMB}=\widehat{DMC}=90^o$

$MB = MC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta DMB = \Delta DMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = DC$ (hai cạnh tương ứng) $AE = BE$

b) Do $AH \perp DM$; $BC \perp DM \Rightarrow AH // BC \Rightarrow \widehat{HAC}=\widehat{ACB}$ (hai góc so le trong)

Mà $\Delta DMB = \Delta DMC$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{DBC}=\widehat{DCB}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{HAC}=\widehat{DBC}$

c) Chứng minh tương tự câu a) ta cũng có: $AD = DI$

Mà $AC = AD + DC$; $BI = BD + DI$; $DB = DC$

$\Rightarrow AC = BI$

Xét ΔABC và ΔICB có:

BC là cạnh chung

$\widehat{ACB}=\widehat{IBC}$ (câu b)

$AC = IB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ICB$ (c.g.c)

d) Do $\Delta ABC = \Delta ICB$ (câu b) $\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{ICB}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{DBC}=\widehat{DCB}$ (câu b)

$\Rightarrow \widehat{DBA}=\widehat{DCI}$

Xét ΔNBI và ΔNCA có:

$\widehat{BNC}$ góc chung; $\widehat{DBA}=\widehat{DCI} \Rightarrow \widehat{NIB}=\widehat{NAC}$

$AC = IB$ (câu c)

$\Rightarrow \Delta NBI = \Delta NCA$ (g.c.g)

$\Rightarrow NI = NA$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AB = CI$ (do $\Delta ABC = \Delta ICB$)

$\Rightarrow NB = NC$

Do đó: $\Delta BMN = \Delta CMN$ (c. c. c)

$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{CMN}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{BMN} + \widehat{CMN} = 180^o$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{CMN} = 180^o : 2 = 90^o$

$\Rightarrow NM \perp BC$

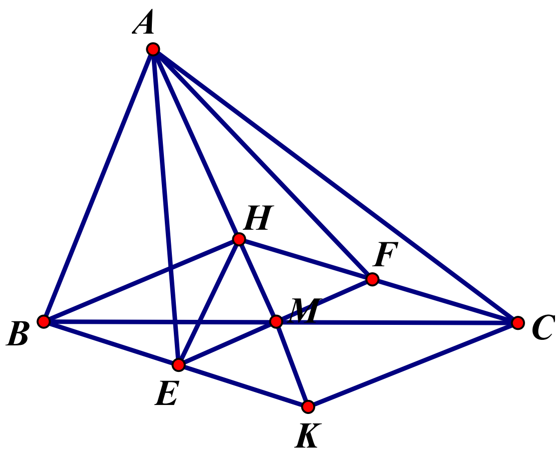
Lại có: M là trung điểm của BC

$\Rightarrow NM$ là đường trung trực của BC

Mà H thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow$ Ba điểm N, H, M thẳng hàng.

Bài 17.



a) Do $BH \perp AM; \quad CK \perp AM \quad \Rightarrow BH / / CK$

Xét ΔBHM và ΔCKM có:

$MB = MC$ (gt)

$\widehat{HMB} = \widehat{KMC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{BHM} = \widehat{CKM} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta BHM = \Delta CKM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = CK$ (hai cạnh tương ứng)

b) Do $\Delta BHM = \Delta CKM$ (câu a)

$\Rightarrow MH = MK$ (hai cạnh tương ứng)

$\widehat{KMB} = \widehat{HMC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BMK = \Delta CMH$ (c.g.c)

$\Rightarrow BK = CH; \quad \widehat{KBM} = \widehat{HCM}$

Mà $\widehat{KBM}$ và $\widehat{HCM}$ ở vị trí so le trong. Vậy $BK // CH$

c) Xét ΔBEM và ΔCFM có:

$\widehat{EBM} = \widehat{FCB}$ (câu b)

$BM = MC$ (gt)

$\widehat{BME} = \widehat{CMF}$ (hai góc đổi đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BEM = \Delta CFM$ (g.c.g)

$\Rightarrow BE = CF$ (hai cạnh tương ứng)

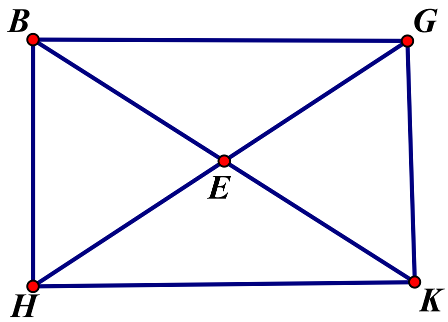
d) Do $BK = CH$ (câu b)

Mà $BE = \frac{1}{2}BK;\quad BE = CF$

$\Rightarrow CF = \frac{1}{2}CH \Rightarrow F$ là trung điểm của HC

e) Trước hết chứng minh $BE = HE$

+ Trên tia đối của tia EH lấy G sao cho $EG = EH$



$\Rightarrow \Delta BEH = \Delta KEG$ (c.g.c)

$\Rightarrow \begin{cases} BH = KG \\ \widehat{HBK} = \widehat{GKB} \end{cases}$

Mà $\widehat{HBK}$ và $\widehat{GKB}$ ở vị trí so le trong

$\Rightarrow BH // GK$

Lại có $BH \perp HK \left(BH \perp AM\right)$

$\Rightarrow KG \perp HK$

Do đó: $\Delta BHK = \Delta GKH$ (c.g.c)

$\Rightarrow BK = HG \Rightarrow \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}HG \Rightarrow BE = HE$

Mặt khác $BE = HF$

Vậy $HE = HF$

+ Xét ΔHEM và ΔHFM có:

$HE = HF$

MH là cạnh chung

$EM = MF$ (do $\Delta BEM = \Delta CFM$)

$\Rightarrow \Delta HEM = \Delta HFM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{HMF}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{HME} + \widehat{HMF} = 180^\circ$

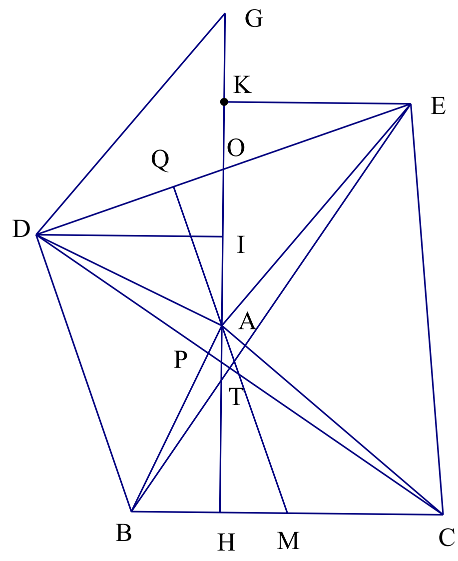
$\Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{HMF} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta AME = \Delta AMF$ (c.g.c)

$\Rightarrow AE = AF$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 18.

a) Có $\widehat{DAI} = \widehat{ABH}$ (cùng phụ với $\widehat{BAH}$)



Xét ΔDAI và ΔABH có

$AB = AC\,(gt)$

$\widehat{DAI} = \widehat{ABH}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta DAI = \Delta BAH\ (ch-gn)$

$\Rightarrow DI = AH$

b) Có

$\left.\begin{matrix} DI \perp AH \\ EK//DI \end{matrix}\right\} \Rightarrow EK \perp AH$

Chứng minh tương tự câu a) ta có

$\Delta KAE = \Delta HCA(ch-gn)$

$\Rightarrow KE = AH$

$\Rightarrow DI = EK$

c) Gọi O là giao điểm của IK và ED

Có $\Delta OEK = \Delta ODI$ (g.c.g)

$\Rightarrow OI = OK, OD = OE$

Suy ra DE và IK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

d) Có $\widehat{DAC} = \widehat{EAB} = 90^0 + \widehat{BAC}$

Xét ΔDAC và ΔBAE có

$\Rightarrow CD = BE, \widehat{ADC} = \widehat{ABE}$

Gọi T là giao điểm của BE, CD; CD cắt AB tại P

$\widehat{TPB} + \widehat{TBP} = \widehat{ADP} + \widehat{APD} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BTP} = 90^0 \Rightarrow CD \perp BE$

e) Qua D kẻ đường thẳng song song với AE cắt HA tại G

$\Rightarrow \widehat{DGA} = \widehat{EAG} = \widehat{ACB}$ và $\Delta ODG = \Delta OEA(\text{g.c.g}) \Rightarrow \text{DG} = \text{AE} = \text{AC}, \text{OG} = \text{OA} = \dfrac{AG}{2}$

$\Rightarrow \widehat{GDA} = \widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{DAE}$

$\Rightarrow \Delta DAG = \Delta ABC\,(c.g.c)$

$\Rightarrow AG = BC \Rightarrow AO = \dfrac{BC}{2}$

f) Xét ΔAOE và ΔCMA có

$AO = CM\,(=\dfrac{BC}{2})$

$\widehat{OAE} = \widehat{MCA}\,(=\widehat{DGA})$

$AE = CA(gt)$

$\Rightarrow \Delta AOE = \Delta CMA\ (cgc)$

$\Rightarrow OE = AM, \widehat{OEA} = \widehat{MAC}$

$\Rightarrow AM = \dfrac{DE}{2}$

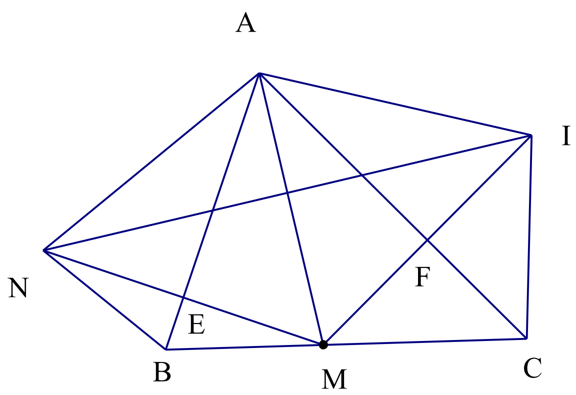
Gọi Q là giao điểm của MA và DE

$$\widehat{QEA} + \widehat{QAE} = \widehat{QAE} + \widehat{MAC} = 90^0 \quad \left.\begin{array}{r} AD = AB\,(gt) \\ \widehat{DAC} = \widehat{EAB}\,(cmt) \\ AC = AE \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DAC = \Delta EAB(c.g.c)$$

$\Rightarrow \widehat{AQE} = 90^0 \Rightarrow MA \perp DE$.

Bài 19.

a) Xét hai tam giác vuông ΔAEM và ΔAFM có



AM chung

$\widehat{AEM} = \widehat{FAM}$(gt)

$\Rightarrow \Delta AEM = \Delta AFM\ (ch-gn) \Rightarrow AE = AF$

b) Xét ΔBEN và ΔBEM có

BE chung

$\widehat{BEN} = \widehat{BEM}(=90^0)$

$EN = EM(gt)$

$\Rightarrow \Delta BEN = \Delta BFM$ (c.g.c) $\Rightarrow BN = BM$

Chứng minh tương tự $CI = CM$ Có $BC = BM + MC = BN + CI$

c) Có $\Delta AEN = \Delta AEM(c.g.c) \Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{EAM}$

Chứng minh tương tự $\widehat{IAF} = \widehat{MAF}$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MAI}$ hay AM là phân giác của $\widehat{NAI}$

d) Có $AN = AM = AI$

Để $NI = 2AM \Rightarrow NI = AM + AI$